ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

WOLF BARTH

Verallgemeinerung des bertinischen Theorems in abelschen Mannigfaltigkeiten

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 2 (1969), p. 317-330

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_2_317_0>

VERALLGEMEINERUNG DES BERTINISCHEN THEOREMS IN ABELSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN

WOLF BARTH

§ 1. Der Komplex-projektive Fall.

1.1. *Einführung:* In letzter Zeit hat man eine genaue Untersuchung von Einbettungen positiv-dimensionaler algebraischer Unterräume in gewisse leicht zu behandelnde algebraische Mannigfaltigkeiten, etwa in den komplex-projektiven Raum P_n oder in abelsche Mannigfaltigkeiten, begonnen [5]. Am interessantesten sind Fortsetzungs-eigenschaften, die man von Hyperebenenschnitten her kennt, und die sich leicht auf « mengentheoretische vollständige Durchschnitte » verallgemeinern lassen. Anscheinend sind die meisten dieser Eigenschaften nicht auf vollständige Durchschnitte beschränkt: So lässt sich jede Funktion, die in einer zusammenhängenden Umgebung der algebraischen Menge $A \subset P_n$ positiver Dimension meromorph ist, meromorph auf ganz P_n fortsetzen ([3, 5, 6, 8, 9]).

Fortsetzungseigenschaften analytischer Mengen, wie sie zuerst von W. ROTHSTEIN [9] und jüngst von H. ROSSI [8] gezeigt wurden, stehen in engem Zusammenhang mit folgender BERTINI-Eigenschaft:

$Z(A, B)$: *A und $B \subset P_n$ seien irreduzible algebraische Mengen* mit $\dim A + \dim B > n$. *Dann ist das Urbild von A unter der Normalisierungsabbildung $\nu_B : \widetilde{B} \to B$ zusammenhängend.*

Ist A vollständiger Durchschnitt, so folgt $Z(A, B)$ aus dem Satz von BERTINI. Wir werden $Z(A, B)$ allgemein beweisen (1.3), und vorher kurz auf den Zusammenhang mit der Fortsetzbarkeit analytischer Mengen eingehen (1.2).

Unser eigentliches Ziel ist der Beweis eines Analogons zu $Z(A, B)$ in einer abelschen Mannigfaltigkeit Y an Stelle von P_n. Dabei müssen

---

Pervenuto alla Redazione il 2 Dicembre 1968.

wir Voraussetzungen an Y (Y darf keine abgeschlossenen Untertori enthalten), an A (A darf keine Singularitäten besitzen) und an die Einbettungen $A \hookrightarrow Y$, $B \hookrightarrow Y$ machen (die induzierten Homomorphismen $\pi_1(A) \to \pi_1(Y)$, bzw. $\pi_1(B) \to \pi_1(Y)$ müssen surjektiv sein).

Die Beweisidee besteht darin, aus A und B eine Überlagerung π von Y zu konstruieren, deren Blätterzahl die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\nu_B^{-1}(A)$ ist. Lokale Fortsetzungseigenschaften für analytische Mengen gestatten die Unverzweigtheit von π nachzuweisen. (Hierbei geht wesentlich der Kontinuitätssatz ein. Der Beweis ist also transzendent.) Dass dann die Blätterzahl 1 sein muss, folgt aus der Voraussetzung über die Homotopiegruppen. Die Anwendung eines Fortsetzungssatzes für meromorphe Funktionen ([3] oder [5]) gestattet eine kurz zu formulierende Version des endgültigen Ergebnisses: *Der Durchschnitt zweier zusammenhängender Untermannigfaltigkeiten A und B eines « irreduziblen » Torus Y ist zusammenhängend, falls* $\dim A + \dim B > \dim Y$. Die Voraussetzungen über die Singularitätenfreiheit der beiden Mengen lassen sich abschwächen, völlig kann man auf sie nicht verzichten: Wir geben ein Beispiel für eine Untermannigfaltigkeit A und eine *lokal-reduzible* analytische Menge B in einem irreduziblen Torus Y, die der Dimensionsbedingung genügen, und deren Durchschnitt nicht zusammenhängt.

1.2. *Fortsetzbarkeit und* BERTINI-*Eigenschaft:* Es sei $A \subset P_n$ algebraisch, abgeschlossen und überall a-dimensional. In einer offenen Umgebung $U \subset P_n$ von A sei eine irreduzible b-dimensionale analytische Menge B_1 gegeben. Falls $A \cap B_1 \neq \emptyset$ und

$$a + b \geq n + 1, \tag{1}$$

gibt es eine abgeschlossene b-dimensionale algebraische Menge $B \subset P_n$, die B_1 enthält. (Dies wurde zuerst in [9] gezeigt kann aber auch aus [1, Théorème 6] gefolgert werden, wenn man Pseudo-konkavitätsaussagen für kleine Umgebungen von A benutzt, s. [3,5.1]).

Damit B eine *Fortsetzung* von B_1 ist, muss man zusätzlich fordern: *Für eine offene Umgebung $U_1 \subset U$ von A gilt*

$$B \cap U_1 = B_1 \cap U_1 .$$

Dies ist äquivalent zu $Z(A, B)$. Beweis:

α) *Aus $Z(A, B)$ folgt die Fortsetzbarkeit:* $B_\varkappa$ seien die irreduziblen Komponenten von $B \cap U$. Wenn $\nu_B^{-1}(A)$ zusammenhängt, muss $B_\varkappa \cap A$ leer sein für $\varkappa \neq 1$. Dann gibt es ein U_1 mit $B \cap U_1 = B_1 \cap U_1$.

β) *Fortsetzbarkeit von beliebig kleinen U aus impliziert $Z(A, B)$.* Die Voraussetzung lautet jetzt: $A \cap B$ besitzt eine offene Umgebungsbasis $\{U_\iota\}$ mit irreduziblen Mengen $B \cap U_\iota$. Äquivalent ist, dass $\nu_B^{-1}(U_\iota)$ zusammenhängt. Würde $Z(A, B)$ nicht gelten, so wäre $C := \nu_B^{-1}(A)$ nicht zusammenhängend. $V \subset \widetilde{B}$ sei eine offene Umgebung von C und in jeder Zusammenhangskomponente von V liege höchstens eine Zusammenhangskomponente von C. Nach [3, Hilfssatz 3.1] gibt es eine Umgebung $W_\iota = U_\iota \cap$ $\cap B \subset \nu_B(V)$ von $A \cap B$ derart, dass $\nu_B \mid \nu_B^{-1} W_\iota$ eigentlich ist. Insbesondere ist $\nu_B^{-1}(W_\iota) \cap \partial V$ leer. Das Bild jeder Zusammenhangskomponente von $\nu_B^{-1} W_\iota$ ist W_ι. Denn es ist analytisch in W_ι, und $W_\iota = B \cap U_\iota$ ist irreduzibel. Daher schneidet jede Zusammenhangskomponente von $\nu_B^{-1} W_\iota$ die Menge C. $\nu_B^{-1}(U_\iota)$ liegt also ganz in V und kann deswegen nicht zusammenhängen. Widerspruch!

1.3. *Beweis von $Z(A, B)$.* — $A, B \subset P_n$ seien algebraisch, abgeschlossen und mögen (1) erfüllen. Weiter gelte

(2) $A \cup B$ liege in keiner Hyperebene.

(3) Die Hyperebene $P_{n-1} \subset P_n$ enthalte keine irreduzible Komponente von $A \cap B$.

Wir zeigen: *Das Urbild der Diagonale $\Delta \subset P_n \times P_n$ unter der Abbildung*

$$id_A \times \nu_B : A \times \widetilde{B} \longrightarrow A \times B \hookrightarrow P_n \times P_n$$

hängt zusammen.

Dazu wählen wir homogene Koordinaten $x_0, \dots, x_n$ des ersten und $y_0, \dots, y_n$ des zweiten Exemplars von P_n so, das $P_{n-1} = \{x_0 = 0\}$, bzw. $P_{n-1} = \{y_0 = 0\}$. Keine Komponente von $\Delta \cap A \times B$ liegt dann in $S :=$ $= \{(x, y) \in P_n \times P_n : x_0 = y_0 = 0\}$. Durch

$$(x_0, \dots, x_n) \times (y_0, \dots, y_n) \longmapsto (x_0 y_0, \dots, x_n y_0, x_0 y_1, \dots, x_0 y_n)$$

wird eine birationale Transformation $\tau : P_n \times P_n \longrightarrow P_{2n}$ definiert. Es gibt eine Faktorisierung $\tau = \tau_2 \circ \tau_1^{-1}$, wo τ_1^{-1} die monoidale Transformation mit Zentrum S ist, und τ_2 biregulär im Komplement von $\tau_2^{-1}(I_1 \cup I_2)$ mit

$$I_1 := \{z \in P_{2n} : z_0 = z_1 = \dots = z_n = 0\}$$

$$I_2 := \{z \in P_{2n} : z_0 = z_{n+1} = \dots = z_{2n} = 0\}.$$

(Falls $z = \tau(x, y) \notin I_1 \cup I_2$, ist ja weder $x_0 = 0$ noch $y_0 = 0$). Schliesslich werde noch ein Faserprodukt ausgeführt

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varrho"'] & \overline{\tau_1^{-1}((A \times B) \setminus S)} \arrow[d, "\tau_1"] \\ A \times \widetilde{B} \arrow[r, "id_A \times \nu_B"'] & A \times B \end{tikzcd}$$

Wegen (2) gilt $A \times B \not\subset S$ und wegen (3) hat das eigentliche Bild $C := \overline{\tau(A \times B \setminus S)}$ von $A \times B$ wieder die Dimension $a + b > n$. Das eigentliche Bild von Δ ist der n-dimensionale lineare Unterraum $E := \{z \in P_{2n} : z_1 = z_{n+1}, \dots, z_n = z_{2n}\}$ und $\tau : \Delta \to E$ ist biregulär. Nach n-maliger Anwendung des Satzes von Bertini über Linearsysteme [2, p. 33] ergibt sich der Zusammenhang von $(\tau_2 \circ \sigma)^{-1} E$. Wegen (3) liegt keine Komponente von $A \times B \cap \Delta$ im Bild S der Entartungsmenge von τ_1. Dann liegt auch keine Komponente von $(id_A \times \nu_B)^{-1} \Delta$ im Bild der Entartungsmenge von ϱ. Da τ_1 die Menge $\tau_2^{-1} E$ bijektiv auf Δ abbildet, bildet ϱ die Menge $(\tau_2 \circ \sigma)^{-1} E$ bijektiv auf $(id_A \times \nu_B)^{-1} \Delta$ ab. Aus dem Zusammenhang von $(\tau_2 \circ \sigma)^{-1} E$ folgt dann der von

$$(id_A \times \nu_B)^{-1} \Delta = \varrho (\tau_2 \circ \sigma)^{-1} E.$$

§ 2. Vorbereitende Hilfssätze.

Zunächst fixieren wir die Notation: X sei eine komplexe Torusgruppe mit neutralem Element 0 und $\mu : (\mathbf{C}^n, 0) \to (X, 0)$ der universelle Überlagerungs-Homomorphismus. Vektoren aus $\mathbf{C}^n$ bezeichnen wir mit deutschen Buchstaben. Ein für alle mal seien komplexe kartesische Koordinaten $(z_1, \dots, z_n)$ in $\mathbf{C}^n$ festgehalten. Die Koordinaten eines Vektors $\mathfrak{u}$ seien $u_1, \dots, u_n$. Weiter setzen wir für reelles $r > 0$

$$\mathfrak{B}_r := \left\{ \mathfrak{u} \in \mathbf{C}^n : \sum_1^n u_\nu \bar{u}_\nu < r \right\},$$

$$\mathfrak{B}_r(x) := x + \mu(\mathfrak{B}_r) \text{ für } x \in X,$$

$$(A)_r := A + \mu(\mathfrak{B}_r) \text{ für } A \subset X.$$

2.1. *Tubenumgebungen.* Die Koordinaten $(z_1, \dots, z_n)$ stiften eine Trivialisierung.

$$T(X) \ni \sum_1^n c_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}\bigg|_x \longmapsto (x, \mathfrak{c}) \in X \times \mathbf{C}^n$$

des holomorphen Tangentialbündels $T(X)$. Für jede komplexe Untermannigfaltigkeit $A \subset X$ ist

$$\varphi_A : A \times \mathbf{C}^n \ni (a, \mathfrak{t}) \longmapsto a + \mu(\mathfrak{t}) \in X.$$

holomorph.

Wir bezeichnen mit $T_a(A) \subset \{a\} \times \mathbf{C}^n$ den komplexen Tangentialraum in a an A und mit $\mathcal{N}(A) := \bigcup_{a \in A} \mathcal{N}_a(A)$,

$$\mathcal{N}_a(A) := \{(a, \mathfrak{s}) \in \mathbf{C}^n : \sum_1^n \bar{s}_\nu t_\nu = 0 \quad \text{für alle } \mathfrak{t} \in T_a(A)\}$$

das reell-analytische Normalbündel zu A. Wählt man $r > 0$ klein genug, so bildet φ_A die Menge $\mathcal{N}(A) \cap (A \times \mathfrak{B}_r)$ bekanntlich reell bianalytisch auf die Parallelmenge $(A)_r$ *ab.* In diesem Fall heisst $(A)_r$ *Tubenumgebung von A.*

2.2. *Überlagerungen zu zwei analytischen Mengen aus X.* — Nun sei zusätzlich eine irreduzible analytische Menge $B \subset X$ gegeben. Wir setzen voraus:

$$A \times B \ni (a, b) \longmapsto a - b \in X \quad \text{ist surjektiv.} \tag{4}$$

Aus den Abbildungen $\psi_A : A \times X \ni (a, x) \longmapsto a + x \in X$ und $\nu_B : \tilde{B} \to B$ bilden wir das Faserprodukt $\tilde{C} := A \times X \times_B \tilde{B} = \{(a, x, \tilde{b}) \in A \times X \times \tilde{B} : a + x = \nu_B(\tilde{b})\}$. Die kanonischen Abbildungen seien $\chi : \tilde{C} \to \tilde{B}$ und $\omega : \tilde{C} \to A \times X$. Durch $(a, x, \tilde{b}) \longmapsto (a, a + x, \tilde{b})$ wird $\tilde{C}$ biholomorph auf $A \times \tilde{B}$ abgebildet, ist also normal. Die Projektion $(a, x, \tilde{b}) \longmapsto x$ induziert eine (wegen (4)) surjektive holomorphe Abbildung $\tilde{\pi} : \tilde{C} \to X$. Ist $\tilde{\pi} = \pi \circ w$, $w : \tilde{C} \to C$, $\pi : C \to X$, die STEIN-Faktorisierung von $\tilde{\pi}$, so sind die Fasern von w gerade die Zusammenhangskomponenten der Fasern von $\tilde{\pi}$. Unser Interesse an π und $\tilde{\pi}$ wird motiviert durch die Isomorphie

$$\tilde{\pi}^{-1}(x) = \{(a, x, \tilde{b}) : a + x = \nu_B \tilde{b} \in B\} \simeq \nu_B^{-1}(A + x), \; x \in X. \tag{5}$$

Für festes x und reelles $r > 0$ definieren wir: $b_x(r)$ (bzw. $\bar{b}_x(r)$, $c_x(r)$, $\bar{c}_x(r)$) sei die *Anzahl der Zusammenhangskomponenten von* $\nu_B^{-1}(A+x)_r$ (bzw. $\nu_B^{-1}\overline{(A+x)_r}$, $\pi^{-1}(\mathfrak{B}_r(x))$, $\pi^{-1}(\overline{\mathfrak{B}_r(x)})$).

Bei kleinem r haben wir übersichtliche Verhältnisse:

LEMMA 1: *$r > 0$ sei so klein, dass $(A)_r$ eine Tubenumgebung ist. Dann gilt für $\varrho \leq r$:*

(i) $b_x(\varrho) = c_x(\varrho)$, $\bar{b}_x(\varrho) = \bar{c}_x(\varrho)$

(ii) *b_x und $\bar{b}_x$ ist monoton fallend*

(iii) *b_x ist unterhalbstetig und $\bar{b}_x$ ist oberhalbstetig.*

Bweis: (i) Da w zusammenhängt, ist $c_x(\varrho)$, bzw. $\bar{c}_x(\varrho)$ auch die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\tilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{B}_\varrho(x))$, bzw. $\tilde{\pi}^{-1}(\overline{\mathfrak{B}_\varrho(x)})$. Das χ-Bild jeder dieser Komponenten liegt ganz in einer Zusammenhangskomponente von $\nu_B^{-1}(A+x)_\varrho$, bzw. $\nu_B^{-1}\overline{(A+x)_\varrho}$. Es folgt $b_x(\varrho) \leq c_x(\varrho)$ und $\bar{b}_x(\varrho) \leq \bar{c}_x(\varrho)$. Gäbe es eine Zusammenhangskomponente $Z \subset \nu_B^{-1}(A+x)_\varrho$ (bzw. $\nu_B^{-1}\overline{(A+x)_\varrho}$), in deren Urbild $\chi^{-1}(Z)$ zwei Zusammenhangskomponenten Z_1, $Z_2 \subset \tilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{B}_\varrho(x))$ (bzw. $\tilde{\pi}^{-1}(\overline{\mathfrak{B}_\varrho(x)})$ lägen, so enthielte $\nu_B(Z)$ das ψ_A-Bild der beiden Mengen ωZ_1 und ωZ_2. Da π eine Überlagerung ist, trifft ωZ_i die Menge $A \times \{x\}$ und damit

$$\mathfrak{M}(A) := \{(a, x') \in A \times \mathfrak{B}_\varrho(x) : x' = \mu(\mathfrak{t}), \mathfrak{t} \in \mathfrak{N}_a(A) \cap \mathfrak{B}_\varrho\}.$$

Nach Voraussetzung ist $\varphi_A \mid \mathfrak{N}(A) \cap \mathfrak{B}_r$ reell bianalytisch und deswegen auch $\psi_A \mid \mathfrak{M}(A)$. Aus Eigenschaften rell-analytischer Mengen folgt:

$$\psi_A(\omega Z_i \cap \mathfrak{M}(A)) = \psi_A(\omega Z_1 \cap \omega Z_2 \cap \mathfrak{M}(A)) = \nu_B(Z).$$

Also liegt $\omega Z_i \cap \mathfrak{M}(A)$ in der Singularitätenmenge von $(A \times \mathfrak{B}_\varrho(x)) \cap \psi_A^{-1}(B)$ und $\nu_B(Z)$ in der Singularitätenmenge von B, Widerspruch! Es folgt die Gleichheit.

Wegen (i) folgen (ii) und (iii) aus entsprechenden Aussagen für c bzw. $\bar{c}$, die trivial sind, da π eine Überlagerung ist.

2.3. *Das Verhalten von $(A)_\varrho \cap B$ am Rande von $(A)_\varrho$.* — Die Entartungsmenge

$$E := \{q \in \tilde{C} : \dim_q \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}\, q) > \dim \tilde{C} - \dim X\} \subset \tilde{C}$$

von $\tilde{\pi}$ ist gerade die Entartungsmenge von w. Im Komplement $\tilde{C}\setminus E$ sind also beide Abbildungen $\tilde{\pi}$ und w offen [7, Satz 28].

LEMMA 2: *Es sei $x \in X\setminus\tilde{\pi}(E)$ und $r > 0$ so klein, dass $\overline{\mathfrak{B}_r(x)} \cap \tilde{\pi}(E)$ leer ist. Dann gilt*

$$\tilde{\pi}^{-1}(\overline{\mathfrak{B}_r(x)}) = \overline{\tilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{B}_r(x))}.$$

Beweis: $\tilde{\pi}$ ist auf einer gemeinsamen Umgebung beider Mengen stetig und offen.

LEMMA 3: *Es sei $x \in X\setminus\tilde{\pi}(E)$* und *$r > 0$ so klein, dass*

(6) $$\mathfrak{B}_r(x) \cap \tilde{\pi}(E) = \emptyset$$

(7) $$(A)_r \text{ Tubenumgebung von } A.$$

Gibt es ein $\varrho_0 < r$ mit $b_x(\varrho) \neq b_x(\varrho_0)$ für alle ϱ, $\varrho_0 < \varrho < r$, so existiert ein $\tilde{b} \in \nu_B^{-1}(\partial(A + X)_{\varrho_0})$ und zu jeder Umgebung $Q \subset \tilde{B}$ von $\tilde{b}$ ein $x' \in \mathfrak{B}_{\varrho_0}(x)$ mit

$$(A + x') \cap \nu_B(Q \cap B_i) \neq \emptyset$$

für mindestens zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten B_i von $\nu_B^{-1}(A+x)_{\varrho_0}$.

Beweis: Wegen (7) ist Lemma 1 anwendbar. Aus Lemma 1, iii) folgt: $\bar{c}_x(\varrho_0) < c_x(\varrho_0)$, d.h. $\tilde{\pi}^{-1}(\overline{\mathfrak{B}_{\varrho_0}(x)})$ besitzt weniger Zusammenhangskomponenten als $\tilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{B}_{\varrho_0}(x))$. Die Zusammenhangskomponenten von $\tilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{B}_{\varrho_0}(x))$ seien C_i, $1 \leq i \leq c_x(\varrho_0)$. Da wegen (6) auch Lemma 2 anwendbar ist, folgt

$$\bigcup \bar{C}_i = \overline{\tilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{B}_{\varrho_0}(x))} = \tilde{\pi}^{-1}(\overline{\mathfrak{B}_{\varrho_0}(x)})$$

und es können nicht alle $\bar{C}_i$ disjunkt sein.

Es existiert also ein $q \in \tilde{\pi}^{-1}(\partial\mathfrak{B}_{\varrho_0}(x))$ das in zwei verschiedenen $\bar{C}_i$ liegt. Da wegen Lemma 1 i) die Zusammenhangskomponenten B_i von $\nu_B^{-1}(A+x)_{\varrho_0}$ gerade die Bilder χC_i sind, ist $\chi q \in \nu_B^{-1}\,\partial(A + x)_{\varrho_0}$. Nach [3, Lemma 1.3 i)] ist $\nu_B\,\chi q = a + t'$, mit $a \in A$, $t' \in \partial\mathfrak{B}_{\varrho_0}(x)$.

Sei eine offene Umgebung $Q \subset \widetilde{B}$ von χq vorgegeben. Da χ stetig ist besitzt q in $\widetilde{C}$ eine offene Umgebung $\widetilde{U} \subset \chi^{-1} Q$. Da w offen ist (wegen der Voraussetzung (6)), besitzt wq eine offene Umgebung $U \subset w(\widetilde{U})$. U kann man insbesondere so wählen, dass $\pi \mid U : U \longrightarrow \pi U$ eine Überlagerungsabbildung ([3, 3.1] oder [4, III B 6.]) auf eine offene Menge $\pi U \subset \mathfrak{B}_r(x)$ mit zusammenhängendem $\pi U \cap \mathfrak{B}_{\varrho_0}(x)$ ist. Da sich mindestens zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten C_i von $\widetilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{B}_{\varrho_0}(x))$ gegen q häufen, sind mindestens zwei verschiedene offene Mengen $w(C_i \cap \widetilde{U}) \cap U$ nicht leer. Da $\pi U \cap \mathfrak{B}_{\varrho_0}(x)$ zusammenhängt und in $\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}^{-1} \mathfrak{B}_{\varrho_0}(x) \cap \widetilde{U}) = \bigcup_i \widetilde{\pi}(\widetilde{U} \cap C_i)$ liegt, liegt ein $x' \in \pi U \cap \mathfrak{B}_{\varrho_0}(x)$ in zwei verschiedenen offenen Mengen $\widetilde{\pi}(\widetilde{U} \cap C_i)$. Für diese i ist $\widetilde{\pi}^{-1}(x') \cap C_i \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$, und es folgt mit $B_i := \chi C_i$

$$\nu_B^{-1}(A + x') \cap B_i \cap Q \supset \chi(\widetilde{\pi}^{-1}(x') \cap C_i \cap \widetilde{U}) \neq \emptyset .$$

2.4. *Unverzweigtheit von* π. — Wir benutzen den Kontinuitätssatz in der Form des folgenden Lemmas, um ein Kriterium für die Unverzweigtheit von π zu finden.

LEMMA 4: *Es sei* $P := \{\mathfrak{u} \in \mathbf{C}^b : |u_1| < 1, \ldots, |u_b| < 1\}$ *der Einheitspolyzylinder und* $G = G_1 \cup G_2$

$$G_1 := \{\mathfrak{u} \in P : |u_1| > 1 - s, \ldots, |u_d| > 1 - s\}$$

$$G_2 := \{\mathfrak{u} \in P : |u_{d+1}| < s, \ldots, |u_b| < s\}$$

für $1 \leq d < b$ *und reelles* $s > 0$ *eine Hartogsfigur.* $B \subset P \times D$, $D \subset\subset \mathbf{C}^q$ *sei analytisch. Die Projektion auf den ersten Faktor induziere auf* B *eine Überlagerung* $\lambda : B \longrightarrow P$. *Ist nun* B *irreduzibel, so auch* $\lambda^{-1}(G)$.

Beweis: Die Koordinaten des $\mathbf{C}^q$ seien $z_1, \ldots, z_q$. Da die Projektion $B \ni (u, v) \longmapsto (u, v_1) \in P \times \mathbf{C}^1$ eigentlich ist, kann man o. B. d. A. $q = 1$ annehmen. — $\lambda^{-1}(G)$ zerfalle in zwei Komponenten — B_1 und B_2. Ist β_i die Blätterzahl von $\lambda \mid B_i$, so genügt die Funktion $z_1 \mid B_i$ einer Gleichung $p_i(z_1 \mid B_i) = 0$, wo

$$p_i(X) = \sum_{l=0}^{\beta_i} a_l^i X^l \qquad (i = 1, 2)$$

ein Polynom mit in G holomorphen Koeffizienten a_l^i. Ebenso wie ihre Koeffizienten a_l^i lassen sich die p_i mit Hilfe des Kontinuitätssatzes auf ganz P

holomorph fortsetzen zu Polynomen p_i. Dann ist $B = B_1 \cup B_2$,

$$B_i : = \}(\mathfrak{u}, v) \in P \times \mathbf{C}^1 : p_i(\mathfrak{u})(v) = 0\{,$$

reduzibel, Widerspruch!

Wir erinnern: A (b z w. B) ist rein a — (b z w. b —) dimensional.

Lemma 5. (*Unverzweigtheitskriterium*): *Es sei* $0 \in X - \tilde{\pi}(E)$ *und* $r > 0$ *mindestens so klein, dass* (6) *und* (7) *aus Lemma* 3 *mit* $x = 0$ *erfüllt sind. Zu jedem* $q = c + \mu(\mathfrak{t}) \in \partial(A)_\varrho \cap B$, $0 < \varrho < r$, $c \in A$, $\mathfrak{t} \in \partial \mathfrak{B}_\varrho$, *gebe es eine offene Umgebung* $Q \subset X$ *und dort lokale, in* q *zentrierte, komplexe Koordinaten* $z_1, \dots, z_n$ *mit:*

$$A + \mu(\mathfrak{t}) \cap Q = \}x \in Q : z_{a+1}(x) = \dots = z_n(x) = 0\{ \tag{8}$$

$$q \text{ ist isolierter Punkt von } B \cap \}x \in Q : z_{n-b+1}(x) = \dots = z_n(x) = 0\{ \tag{9}$$

$$x \in Q \cap \partial(A)_\varrho \cap (A + \mu(\mathfrak{t})) \succ z_{n-b+1}(x) = \dots = z_a(x) = 0 \tag{10}$$

Dann ist $b_0(\varrho)$ *konstant für* $0 < \varrho < r$.

Beweis: Anderenfalls existiert $\varrho_0 > 0$ mit $b_0(\varrho) < b_0(\varrho_0)$ für alle ϱ, $\varrho_0 < \varrho < r$. Aus Lemma 3 folgt dann die Existenz von $\tilde{q} \in \tilde{B}$, $c \in A$ und einer Folge $\mathfrak{t}_k \in \mathfrak{B}_{\varrho_0}$, die gegen $\mathfrak{t} \in \partial \mathfrak{B}_{\varrho_0}$ konvergiert mit $q : = \nu_B \tilde{q} = c + \mu(\mathfrak{t}) \in \partial(A)_{\varrho_0}$ und so, dass

$$B_i \cap \nu_B^{-1}(A + \mu(\mathfrak{t}_k)) \cap U_k \neq \emptyset, \nu_B(U_k) \subset \mathfrak{B}_{\frac{1}{k}}(q)$$

für jeweils mindestens zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten $B_i \subset \nu_B^{-1}(A)_{\varrho_0}$ und eine Umgebungsbasis $U_k \subset \tilde{B}$ von $\tilde{q}$.

Definiert man $\lambda : Q \ni x \longmapsto (z_{n-b+1}(x), \dots, z_n(x)) \in \mathbf{C}^b$ und $\lambda_B : = \lambda \mid Q \cap B$, so ist wegen (9) q isoliert in $\lambda_B^{-1}(\lambda_B q)$. Nach [3,3.1] oder [4, III B 6] existiert ein Polyzylinder $P \subset\subset Q$, o. B. d. A.

$$P = \} x \in Q : |z_1(x)| < 1, \dots, |z_n(x)| < 1 \{$$

so, dass $\lambda_P : = \lambda_B \mid B \cap P$ eigentlich, d.h., eine Überlagerung über

$$P_b : = \} \mathfrak{u} \in \mathbf{C}^b : |u_1| < 1, \dots, |u_b| < 1\{$$

ist. (Dies ist der Fall, wenn man die Koordinaten so bestimmt hat, dass

$$B \cap \}|z_1| = 1 \text{ oder } |z_{n-b}| = 1, |z_{n-b+1}| < 1, \dots, |z_n| < 1\{ = \emptyset).$$

Wählt man $\mathfrak{s} \in \mathbf{C}^n$ klein genug (mindestens so klein, dass $P(\mathfrak{s}) : = P - \mu(\mathfrak{s}) \subset\subset Q$), und setzt $z_\nu^{\mathfrak{s}}(x) : = z_\nu(x + \mu(\mathfrak{s}))$ für $\nu = 1, \dots, n$, so ist auch

$$B \cap \}|z_1^{\mathfrak{s}}| = 1 \text{ oder } |z_{n-b}^{\mathfrak{s}}| = 1, |z_{n-b+1}^{\mathfrak{s}}| < 1, \dots, |z_n^{\mathfrak{s}}| < 1\{ = \emptyset.$$

Also wird auch durch $\lambda_{P(\mathfrak{s})} : B \cap P(\mathfrak{s}) \ni x \longmapsto (z^{\mathfrak{s}}_{n-b+1}(x), \dots, z^{\mathfrak{s}}_n(x)) \in \mathbf{C}^b$ eine Überlagerung auf den Polyzylinder P_b definiert.

Nach Voraussetzung (10) ist für kleine $\mathfrak{s}$ die Menge

$$\lambda^{-1}_{P(\mathfrak{s})}(\{\mathfrak{u} \in P_b : |u_1| = 1, \dots, |u_{a+b-n}| = 1, u_{a+b+1-n} = 0, \dots, u_b = 0\})$$

ganz in $(A)_{\varrho_0}$ enthalten. Nach eventueller Streckung der Koordinaten kann man daher für kleine $\mathfrak{s}$ annehmen

$$\lambda^{-1}_{P(\mathfrak{s})}\, G_1(s) \subset (A)_{\varrho_0},$$

wo ein s, $0 < s < 1$, fest und $G_1(s) := \{\mathfrak{u} \in P_b : |u_1| > 1 - s, \dots, |u_{a+b-n}| > 1 - s\}$.

Bestimmt man $\mathfrak{s}$ so, dass $q - \mu(\mathfrak{s}) \in \mathfrak{B}_{\varrho_0}(c)$, so kann man $s(\mathfrak{s}) > 0$ so klein wählen, dass $\lambda^{-1}_{P(\mathfrak{s})}(G_2(s(\mathfrak{s}))) \subset (A)_{\varrho_0}$, wo

$$G_2(s) := \{\mathfrak{u} \in P_b : |u_{a+b+1-n}| < s, \dots, |u_b| < s\}.$$

Setzt man insbesondere $\mathfrak{s}_k := \mathfrak{t} - \mathfrak{t}_k$ (k so gross, dass $\mathfrak{B}_{\frac{1}{k}}(q) \subset P(\mathfrak{s}_k) \cap P$, so enthält $\nu_B(U_k) \cap \lambda^{-1}_{P(\mathfrak{s}_k)}(G_1(s(\mathfrak{s}_k)) \cup G_2(s(\mathfrak{s}_k)))$ Punkte zweier verschiedener irreduzibler Komponenten von $P(\mathfrak{s}_k) \cap B \cap (A)_{\varrho_0}$.

Andererseits kann U_k so gewählt werden, dass es nur Punkte einer einzigen Zusammenhangskomponente von $\nu_B^{-1}(P(\mathfrak{s}_k))$ enthält. Dies widerspricht Lemma 4.

§ 3. Irreduzible Tori.

3.1. Wir nennen einen komplexen Torus X' *irreduzibel*, falls X' keine abgeschlossenen echten Untertori enthält. (Einige Eigenschaften irreduzibler Tori sind in [3] zusammengestellt). $A' \subset X'$ sei eine zusammenhängende abgeschlossene komplexe Untermannigfaltigkeit der Dimension a' und $B' \subset X'$ irreduzibel, abgeschlossen und analytisch von der Dimension $b > 0$. Ist $\nu_{B'} : \widetilde{B}' \to B'$ die Normalisierungsabbildung von B' und $\beta : \widetilde{B}' \to X$ die Albanese-Abbildung von $\widetilde{B}'$, so kann man faktorisieren ($B := \beta \widetilde{B}'$):

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B}' & \xrightarrow{\beta} & X \\ {\scriptstyle \nu_{B'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ B' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

Dabei ist α affin und surjektiv (wegen der Irreduzibilität von X). Die Metriken auf X und X' kann man so einrichten, dass $\alpha\mathfrak{B}_r(x) = \mathfrak{B}_r(\alpha x)$ für kleine $r > 0$. Wir setzen noch $A := \alpha^{-1} A' \subset X$, $n := \dim X$, $n' := \dim X'$ und fordern

$$a' + b > n'. \tag{11}$$

Wie in 2.2 definieren wir $\psi_A : A \times X \ni (a, x) \longmapsto a + x \in X$, $\widetilde{C} := A \times X \times_B \widetilde{B}'$ und $\pi \circ w = \widetilde{\pi} : \widetilde{C} \longrightarrow X$. Nach [3,4.5] ist $(A' + x') \cap B'$ für $x' \in X'$ und daher $(A + x) \cap B$ für $x \in X$ nie leer, $\widetilde{\pi}$ also surjektiv.

Haupt-Lemma: *Unter diesen Voraussetzungen ist $\pi : C \longrightarrow X$ eine unverzweigte Überlagerung.*

Beweis: Das Bild $\widetilde{\pi} E$ der Entartungsmenge E von $\widetilde{\pi}$ ist analytisch in X und besitzt mindestens die Codimension 2 [7, Satz 26]. Da das abgeschlossene Bild V der Verzweigungsmenge von π analytisch und entweder leer oder rein 1-codimensional ist, genügt es zu zeigen: $V \cap (X \setminus \widetilde{\pi} E) = \emptyset$.

Sei deswegen $x_0 \in X \setminus \widetilde{\pi} E$ und $x_0 \in V$. Wir bestimmen $x \notin V$, $x \in X \setminus \widetilde{\pi} E$ so, dass $x_0 \in \mathfrak{B}_r(x) \subset X \setminus \widetilde{\pi} E$, wo $r > 0$ so klein, dass $(A)_r$ eine Tubenumgebung. Ist p die globale Blätterzahl von π, so ist $b_x(\varrho) = p$ für kleine $\varrho > 0$, aber $b_x(r) < p$, wegen $x_0 \in V$. Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 5, angewandt auf $A + x$, denn wir verifizieren nun die Voraussetzungen dieses Lemmas:

Sei dazu $q = c + \mu(\mathfrak{t}) \in \partial (A)_\varrho \cap B$. Wir definieren zunächst Koordinaten $z'_1, \dots, z'_{n'}$ auf einer Umgebung $Q' \subset X'$ von $q' = \alpha q \in \partial (A')_\varrho \cap B'$. Die Bedingung $A' + \alpha\mu(\mathfrak{t}) \cap Q' = \{x' \in Q' : z_{a'+1}(x') = \dots = z_{n'}(x') = 0\}$, ist ohne weiteres zu erfüllen. Da wegen $\mathfrak{B}_r(x) \subset X \setminus \widetilde{\pi} E$ gilt: $\dim (A' + \alpha\mu(\mathfrak{t})) \cap B' = a' + b - n'$ für alle $\mathfrak{t} \in \mathfrak{B}_r \subset \mathbf{C}^n$, kann man die z'_ν so bestimmen, dass q' in $B' \cap \{x' \in Q' : z'_{n'-b+1}(x') = \dots = z'_{n'}(x') = 0\}$ isoliert ist.

Da α lokal-trivial ist, kann man auf einer Umgebung Q von q das System $z_{\nu+n-n'} := z'_\nu \circ \alpha$, $\nu = 1 \dots, n'$, zu einem lokalen, in q zentrierten, Koordinatensystem $z_1, \dots, z_n$ ergänzen. Dann ist (8) trivial erfüllt und ebenso (9), denn $\beta\alpha \mid \widetilde{B}' = \nu_{B'}$ ist diskret. Weiter ist $Q \cap \partial (A)_\varrho \cap (A + \mu(\mathfrak{t}))$ wegen [3, Satz 2.2] enthalten in $Q \cap \alpha^{-1} q'$, und dies liegt in $\{x \in Q : z_{n-n'+1}(x) = \dots = z_n(x) = 0\}$. Daraus folgt (10) wegen $n - b > n - n'$.

3.2. *Das Analogon zu $Z(A, B)$.* Den Fortsetzungssatz [3, 4.6] bzw. [5, 4.5.1] kann man auch so interpretieren: Ist A analytisch im irreduziblen Torus Y und $2 \dim A \geq \dim Y$, so hängt das Urbild $\pi^{-1}(A)$ unter jeder affinen Abbildung $\pi : X \longrightarrow Y$ eines anderen Torus X auf Y wieder zusammen.

Letzteres ist äquivalent zur Surjektivität des von der Einbettung induzierten Homomorphismus $\pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(Y)$.

SATZ 1: *Es sei X' ein irreduzibler Torus, $A' \subset X'$ eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit und $B' \subset X'$ analytisch und irreduzibel. Falls $\pi_1(A') \longrightarrow \pi_1(Y')$ surjektiv und*

$$\dim A' + \dim B' > \dim Y,$$

dann hängt das Urbild von A' unter der Normalisierungsabbildung $\nu_{B'}: \widetilde{B}' \longrightarrow B'$ stets zusammen.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\pi: C \longrightarrow X$ eine triviale Überlagerung ist. Dazu sei o.B.d.A. $0 \in A$. Dann gibt es eine Einbettung $\varepsilon_B: \widetilde{B}' \ni \widetilde{b} \longmapsto (0, \beta\widetilde{b}, \widetilde{b}) \in \widetilde{C}$ mit $\widetilde{\pi} \circ \varepsilon_B = \beta$. Man kann also die Albanese-Abbildung β faktorisieren über $w \circ \varepsilon_B: \widetilde{B}' \longrightarrow C$. Aus der Universalität von β folgt die Trivialität.

Wegen der Surjektivität von $\pi_1(A') \longrightarrow \pi_1(X')$ hängt A und deswegen auch C zusammen. π ist also einblättrig und aus (4) erhält man den Zusammenhang von $\nu_B^{-1} A$. Nun ist aber $\nu_{B'} = \alpha\nu_B$ und

$$\nu_{B'}^{-1}(A') = \nu_B^{-1}\,\alpha^{-1}(A') = \nu_B^{-1}(A).$$

Wendet man die Pseudokonkavitätsaussage [3, 4.2], sowie [1, Théorème 6] und 1.2,α, an, so folgt hieraus der

FORTSETZUNGSSATZ FÜR ANALYTISCHE MENGEN: *B_1 sei irreduzibel und analytisch in der Umgebung $U \subset X$ einer Untermannigfaltigkeit A des irreduziblen Torus X. Es gelte:*

(i) $\pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X)$ *ist surjektiv*
(ii) $A \cap B_1 \neq \emptyset$
(iii) $\dim A + \dim B > \dim X$.

Dann gibt es eine analytische Menge $B \subset X$ mit $B \cap U_1 = B_1 \cap U_1$ für eine offene Umgebung $U_1 \subset U$ von A.

SATZ 2: *Es sei X ein irreduzibler Torus, $A \subset X$ zusammenhängend und singularitätenfrei und $B \subset X$ irreduzibel und lokal irreduzibel. Falls $\pi_1(B) \longrightarrow \pi_1(X)$ surjektiv und* $\dim A + \dim B > \dim X$, *dann hängt $A \cap B$ zusammen.*

Beweis: Wieder ist die Überlagerung π trivial: Nimmt man $0 \in A$ an und definiert wie oben $\varepsilon_B: \widetilde{B} \ni \widetilde{b} \longmapsto (0, \nu_B(\widetilde{b}), \widetilde{b}) \in \widetilde{C}$, so gilt $\widetilde{\pi}\,\varepsilon_B = \nu_B$.

Da ν_B injektiv ist, muss auch $\pi \mid w\, \varepsilon_B\, \widetilde{B}$ injektiv sein. Da $\widetilde{C} \simeq A \times \widetilde{B}$ zusammenhängt, muss auch $\pi^{-1} B$ zusammenhängen und die Blätterzahl von π ist 1. Aus (4) folgt die Behauptung.

Die in 1.1 angegebene Aussage erhält man sofort aus Satz 2, da ja wegen der Dimensionsbedingung entweder $2 \dim A \geq \dim Y$, oder $2 \dim B \geq \dim Y$, und dann aus dem zitierten Fortsetzungssatz für meromorphe Funktionen die Eigenschaft der Homotopiegruppen folgt.

Es wäre interessant zu wissen, ob das Komplement einer rein a-dimensionalen Untermannigfaltigkeit A in einem irreduziblen Torus X *streng* $(\dim X - a)$ pseudokonvex ist, da man dann den technischen Teil der Beweise vereinfachen könnte.

3.3. *Ein Gegenbeispiel*: Wir zeigen hier, dass Satz 1 i.a. falsch ist, wenn man weder B lokal irreduzibel voraussetzt, noch annimmt, dass $\pi_1(A) \to \pi_1(Y)$ surjektiv ist. Dazu sei etwa Y' ein Torus der Dimension 7 und $A' \subset Y'$ eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit der Dimension 3. Wie in [3, 4.4] findet man eine endliche Untergruppe $0 \neq G \subset Y'$ mit

$$(A' + g_1) \cap (A' + g_2) = \emptyset \qquad \text{für alle} \qquad g_1 \neq g_2 \in G.$$

Das Geradenbündel $\mathcal{F}$ über Y' sei ample. Dann gibt es ein $\nu_0 = \nu_0(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ so, dass $H^1(Y', \mathcal{F}^\nu \otimes \mathcal{I})$ für alle $\nu \geq \nu_0$ verschwindet ($\mathcal{I}$ Idealgarbe zu $\bigcup_{g_i \in G} (A' + g_i)$). Für diese ν ist die Einschränkung $\Gamma(Y', \mathcal{F}^\nu) \to \bigoplus_{g_i \in G} \Gamma(A' + g_i, \mathcal{F}^\nu \otimes \mathcal{O}_{A'+g_i})$ surjektiv. Aus nachfolgendem Lemma erhält man ein $\nu \geq \nu_0$ und zwei Schnitte f_1 und $f_2 \in \Gamma(Y', \mathcal{F}^\nu)$, für deren gemeinsame Nullstellenmenge $N(f_1, f_2)$ gilt

$$(12) \quad (g' - g + [N(f_1, f_2) \cap (A' + g)]) \cap [N(f_1, f_2) \cap (A' + g')] = \emptyset,\ g \neq g' \in G.$$

Wir setzen $B' := N(f_1, f_2)$, $Y := Y'/G$ und definieren A und $B \subset Y$ als die Bilder von A' und B' unter $Y' \to Y$. A besitzt keine Singularitäten und wegen (12) zerfällt $B \cap A$ in soviele disjunkte Kurven, wie G Elemente enthält. $B \cap A$ ist also keineswegs zusammenhängend.

LEMMA: *A sei eine 3-dimensionale projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit. $F_1, \ldots, F_k$ seien ample Geradenbündel über A. Dann gibt es eine gemeinsame Potenz ν und in jedem Bündel $F_\varkappa^\nu$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, zwei holomorphe Schnitte $f_1^{(\varkappa)}$ und $f_2^{(\varkappa)}$ mit*

$$N(f_1^{(\varkappa)}, f_2^{(\varkappa)}) \cap N(f_1^{(\varkappa')}, f_2^{(\varkappa')}) = \emptyset \qquad \text{für} \qquad \varkappa \neq \varkappa'.$$