ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE COEN

Sull'omologia degli aperti q-completi di uno spazio di Stein

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 2 (1969), p. 289-303

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_2_289_0>

SULL'OMOLOGIA DEGLI APERTI q-COMPLETI DI UNO SPAZIO DI STEIN

SALVATORE COEN

Questa nota si propone di estendere alcuni teoremi dimostrati da L. Kaup in [3] e da R. Narasimhan in [4]; precisamente si proverà:

(1.4) TEOREMA. *Sia Q un sottospazio aperto q-completo* (1) *di uno spazio di Stein; sia* $\dim Q = n$; *allora si ha*

$$H_k(Q, \mathbf{Z}) = 0 \qquad \textit{per } k > n + q$$

$$H_{n+q}(Q, \mathbf{Z}) \qquad \textit{privo di torsione.}$$

(3.2) TEOREMA. *Sia G un gruppo abeliano finitamente generato e siano k, q, n numeri interi tali che*

i) $k \geq 1$

ii) $q \geq 0$

iii) $n \geq k + 3 - q$, $n \geq q$;

allora esiste in $\mathbf{C}^n$ un dominio D q-completo, tale che $H_k(D, \mathbf{Z}) \simeq G$.

(3.3) TEOREMA. *Sia G un gruppo abeliano numerabile e siano k, q, n numeri interi tali che*

i) $k \geq 1$

ii) $q \geq 0$

iii) $n \geq 2k + 2 - q$, $n \geq q$;

allora esiste in $\mathbf{C}^n$ un dominio D q-completo tale che $H_k(D, \mathbf{Z}) \simeq G$.

Pervenuto alla Redazione il 23 Ottobre 1968.

(1) Alcuni autori (cfr. [1], [5]) chiamano $(q+1)$-plurisubarmoniche le funzioni che qui sono chiamate q-plurisubarmoniche; con tale posizione si dicono fortemente $(q+1)$-pseudoconvessi e $(q+1)$-completi gli spazi complessi che qui sono chiamati rispettivamente fortemente q-pseudoconvessi e q-completi.

In [4] questi teoremi sono mostrati nel caso $q = 0$. Riguardo ad (1.4) v. pure L. Kaup ([3] Satz 1).

Nel § 0 del presente lavoro si espongono alcune definizioni ed alcuni teoremi noti ed utili per il seguito; nel § 1 si presenta la dimostrazione di (1.4); il § 2 contiene alcuni corollari ad (1.4); il § 3 è dedicato ai teoremi (3.2), (3.3).

Ringrazio i proff. A. Andreotti e V. Villani per avermi dato utili suggerimenti durante la redazione di questo lavoro.

§ 0.

Con il termine *spazio complesso* si intende spazio analitico complesso nel senso di Serre e numerabile all'infinito; se X è un tale spazio, con $\dim X$ si intende la sua dimensione complessa.

Con $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ si indicano rispettivamente gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali, reali, complessi, con le loro strutture naturali.

Sia Ω un aperto di $\mathbf{C}^n$; una funzione $\widehat{\varphi} : \Omega \to \mathbf{R}$ di classe C^∞ si dice *fortemente q-plurisubarmonica* (risp: *q-plurisubarmonica*) su Ω quando per ogni $x \in \Omega$ la *forma di Levi*

$$\mathcal{L}(\widehat{\varphi}, x)(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \widehat{\varphi}}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j} \right)_x u_i \bar{u}_j$$

ha almeno $n - q$ autovalori positivi (risp: positivi o nulli).

Sia X uno spazio complesso, una funzione $\varphi : X \to \mathbf{R}$ si dice *fortemente q-plurisubarmonica* (1) (risp: *q-plurisubarmonica*) quando, per ogni $x \in X$, esistono

a) un intorno aperto U di x in X

b) un isomorfismo χ di U su un sottoinsieme analitico di un aperto Ω di un opportuno spazio $\mathbf{C}^n$

c) una funzione $\widehat{\varphi} : \Omega \to \mathbf{R}$ che sia fortemente q-plurisubarmonica (risp: q-plurisubarmonica) su Ω e tale che su U si abbia $\varphi = \widehat{\varphi} \circ \chi$.

Si dimostra che tale definizione è indipendente dalla scelta dell'isomorfismo χ.

Si dice che uno spazio complesso X è *fortemente q-pseudoconvesso* (risp: *q-pseudoconvesso*) quando esiste una funzione $\varphi : X \to \mathbf{R}$ di classe C^∞, fortemente q-plurisubarmonica (risp: q-plurisubarmonica) al di fuori di un compatto $K \subset X$ e tale che gli insiemi

$$B_c := \{x \in X \mid \varphi(x) < c\}$$

siano relativamente compatti in X per ogni $c \in \mathbf{R}$; X si dice *q-completo* (1) quando $K = \emptyset$ e φ è fortemente q-plurisubarmonica.

Enunciamo ora alcuni teoremi che saranno usati in seguito.

In [2], A. Andreotti ed R. Narasimhan, sulla base della teoria di Morse, hanno esteso un precedente teorema di A. Andreotti-T. Frankel dimostrando:

(0.1) TEOREMA. *Sia X uno spazio di Stein di dimensione n. Sia Y un sottospazio aperto olomorficamente convesso in X. Supponiamo che le singolarità di X siano isolate, allora*

$$H_k(X \bmod Y, \mathbf{Z}) = 0 \quad \textit{per} \ k > n$$

$$H_n(X \bmod Y, \mathbf{Z}) \quad \textit{non ha torsione.}$$

Inoltre se Y è relativamente compatto ed ha frontiera differenziabile, allora $H_n(X \bmod Y, \mathbf{Z})$ è un gruppo libero.

R. Narasimhan in « The Levi Problem for complex Spaces — Math. Annalen 142 (1961) pagg. 355-65 » ha provato:

(0.2) TEOREMA. *Uno spazio complesso è di Stein se e solo se è 0-completo.*

Nel lavoro [1], a pag. 250, A. Andreotti e H. Grauert hanno dimostrato:

(0.3) TEOREMA. *Se Q è uno spazio q-completo ed $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su Q, allora $H^k(Q, \mathcal{F}) = 0$ per $k > q$.*

Il seguente risultato di G. Sorani [5] mostra la validità di (1.4) quando Q non abbia punti singolari.

(0.4) TEOREMA. *Sia Q una varietà fortemente q-pseudoconvessa relativamente ad una funzione φ fortemente q-plurisubarmonica su $Q - K$ (K compatto di Q). Sia $\dim Q = n$ e poniamo $c_0 = \sup_K \varphi$; per $c > c_0$ si ha (ponendo $B_c = \{x \in Q \mid \varphi(x) < c\}$):*

$$H_k(Q \bmod B_c, \mathbf{Z}) = 0 \quad \textit{per} \ k > n + q$$

$$H_{n+q}(Q \bmod B_c, \mathbf{Z}) \quad \textit{privo di torsione};$$

se inoltre la frontiera di B_c è differenziabile, allora $H_{n+q}(Q \bmod B_c, \mathbf{Z})$ è libero.

§ 1.

(1.1) LEMMA. *Sia Q uno spazio q-completo rispetto a una funzione φ fortemente q-plurisubarmonica, sia $p: Q \to \mathbf{R}$ una funzione 0-plurisubarmonica e sia $R := \{x \in Q \mid p(x) < 0\}$. Per ogni $c \in \mathbf{R}$, poniamo*

$$B_c := \{x \in Q \mid \varphi(x) < c\}.$$

Allora, per ogni $c \in \mathbf{R}$ *esiste una successione* $\psi_{c,1}, \psi_{c,2}, \dots$ *di funzioni che definiscono la q-completezza di* B_c *ed esiste una successione* $a_1, a_2, \dots$ *di numeri reali tali che, ponendo* $B_{c,\nu} := \{x \in B_c \mid \psi_{c,\nu}(x) < a_\nu\}$ *si abbia*

i) $\bar{B}_{c,\nu} \subset B_{c,\nu+1}$

ii) $\bigcup_{\substack{\nu \in \mathbf{N} \\ \nu \neq 0}} B_{c,\nu} = B_c \cap R.$

Inoltre, se Q non ha punti singolari, ogni $B_{c,\nu}$ *può essere scelto a frontiera differenziabile* (2).

DIMOSTRAZIONE. Sia $c \in \mathbf{R}$. Possiamo supporre che si abbia $B_c \cap R \neq \emptyset$. Per semplicità di notazione scriviamo $B_c = B$. Sia $m = |\min_{\bar{B}} p|$, si ha $m \neq 0$. Definendo la funzione

$$\pi = \frac{p + m}{m}$$

si ha

$$B \cap R = \{x \in B \mid \pi(x) < 1\}$$

e $\pi|_{\bar{B}}$ è una funzione non negativa.

È noto (cfr. [6] Prop. (2.2)) che B come sottospazio di Q è q-completo e che la funzione $\chi = \dfrac{1}{c - \varphi}$ ne definisce la q-completezza.

---

(2) Un po' più generalmente si può dimostrare con lo stesso metodo:

« Sia Q uno spazio fortemente q-pseudoconvesso rispetto ad una funzione φ fortemente q-plurisubarmonica al di fuori di un compatto $K \subset Q$; sia $p: Q \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^∞ 0-plurisubarmonica al di fuori di K e sia $R := \{x \in Q \mid p(x) < 0\} \supset K$. Per ogni $c \in \mathbf{R}$, poniamo

$$B_c := \{x \in Q \mid \varphi(x) < c\}.$$

Allora, per ogni $c > \max_K \varphi \geq -\infty$ esiste una successione $\psi_{c,1}, \psi_{c,2}, \dots$ di funzioni che definiscono la forte q-pseudoconvessità di B_c ed esiste una successione di numeri reali $a_1, a_2, \dots$ tali che, ponendo $B_{c,\nu} := \{x \in B_c \mid \psi_{c,\nu}(x) < a_\nu\}$ si abbia

i) $\bar{B}_{c,\nu} \subset B_{c,\nu+1}$

ii) $\bigcup_{\nu \neq 0,\, \nu \in \mathbf{N}} B_{c,\nu} = B_c \cap R$

Inoltre, se Q non ha punti singolari, ogni $B_{c,\nu}$ può essere scelto a frontiera differenziabile »

Esiste un numero naturale $\bar{\nu}$ che, per semplicità, supporremo uguale a 0, tale che per ogni $\nu \in \mathbf{N}, \nu > \bar{\nu}$ si ha $B_{c-\frac{1}{\nu}} \neq \emptyset$; per tali ν consideriamo su B la funzione

$$\chi_\nu(x) = \frac{\chi(x)}{\left|2\left(\max\limits_{\bar{B}_{c-\frac{1}{\nu}}} \chi\right)\right|};$$

essa definisce ancora la q-completezza di B e per $x \in B_{c-\frac{1}{\nu}}$ si ha $0 < \chi_\nu(x) < 1$.

Per ogni $\nu \in \mathbf{N}, \nu \neq 0$ poniamo

$$\psi_\nu = \pi^\nu + \chi_\nu^\nu .$$

Dimostriamo che tali funzioni ψ_ν (che ovviamente dipendono da c) sono le $\psi_{c,\nu}$ della tesi.

Osserviamo, anzitutto, che poichè π e χ_ν sono non negative su B, allora π^ν è 0-plurisubarmonica su B e χ_ν^ν è fortemente q-plurisubarmonica su B, così ψ_ν è una funzione fortemente q-plurisubarmonica su B. Inoltre, per ogni $d \in \mathbf{R}$, si ha

$$\{x \in B \mid \psi_\nu(x) < d\} \subset \{x \in B \mid \chi_\nu^\nu(x) < d\}$$

e quindi, poichè $\{x \in B \mid \chi_\nu^\nu(x) < d\}$ è relativamente compatto in B, anche ψ_ν definisce la q-completezza di B.

Sia $\{a_\nu\}_{\nu \neq 0}^{\nu \in \mathbf{N}}$ una successione di numeri reali tali che $0 < a_1 < a_2 < \dots$ e che $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = 1$.

Poniamo $B_{c,\nu} = \{x \in B \mid \psi_\nu(x) < a_\nu\}$ e verifichiamo i), ii).

i) La chiusura di $B_{c,\nu}$ in B è $\bar{B}_{c,\nu}$ cioè è uguale alla chiusura di $B_{c,\nu}$ in Q. Basta ora osservare che se $x \in \bar{B}_{c,\nu}$ allora $\pi^{\nu+1}(x) + \chi_{\nu+1}^{\nu+1}(x) \leq \pi^\nu(x) + \chi_\nu^\nu(x) \leq a_\nu < a_{\nu+1}$.

ii) Mostriamo $B \cap R \subset \bigcup_{\nu \in \mathbf{N}} B_{c,\nu}$ (infatti l'inclusione opposta è ovvia). Sia $x \in B \cap R$, allora esiste $\mu \in \mathbf{N}$ tanto grande da aversi $\chi_\mu(x) < 1$, quindi, fissato arbitrariamente d, $0 < d < 1$, per ogni $\nu \in \mathbf{N}$ abbastanza grande si ha $\chi_\mu^\nu(x) + \pi^\nu(x) < d < a_\nu$ da cui la disuguaglianza cercata

$$\chi_\nu^\nu(x) + \pi^\nu(x) < \chi_\mu^\nu(x) + \pi^\nu(x) < a_\nu$$

pe ν abbastanza grande.

Supponiamo che Q sia una varietà, allora per ogni funzione ϱ di classe C^∞ è noto che $\{x \in Q \mid \varrho(x) < d\}$ è a frontiera differenziabile per tutti i $d \in \mathbf{R}$

al di fuori di un insieme di misura di Lebesgue nulla (teor. di A. P. Morse); quindi è possibile scegliere la successione $\{a_\nu\}_{\substack{\nu \in \mathbf{N} \\ \nu \neq 0}}$ in modo che $B_{c,\nu}$ sia a frontiera differenziabile.

(1.2). LEMMA. *Sia Q una varietà q-completa,* $\dim Q = n$; *sia data una funzione $p : Q \longrightarrow R$ 0-plurisubarmonica e si ponga $R = \{x \in Q \mid p(x) < 0\}$; allora, se G è un arbitrario gruppo abeliano di coefficienti, si ha:*

$$H_k(Q \bmod R, G) = 0 \quad per \quad k > n + q.$$

DIMOSTRAZIONE. Usiamo le notazioni di (1.1). Sia $\{B_{c,\nu}\}_{c,\nu}$ la famiglia degli aperti a frontiera differenziabile di cui (1.1) assicura l'esistenza. Da (0.4) si deduce

$$H_k(B_c \bmod B_{c,\nu}, \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{per} \quad k > n + q$$

$$H_{n+q}(B_c \bmod B_{c,\nu}, \mathbf{Z}) \text{ è un gruppo libero,}$$

per ogni $c \in \mathbf{R}$ e per ogni $\nu \in \mathbf{N}$ $\nu \neq 0$.

Sia G un gruppo abeliano, dalla formula dei coefficienti universali

$$H_j(B_c \bmod B_{c,\nu}, G) = H_j(B_c \bmod B_{c,\nu}, \mathbf{Z}) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}\,(H_{j-1}(B_c \bmod B_{c,\nu}, \mathbf{Z}), G)$$

ponendo $j = n + q + 1,\ n + q + 2, \ldots$ si ricava

$$H_k(B_c \bmod B_{c,\nu}, G) = 0 \quad \text{per} \quad k > n + q.$$

Poichè tale uguaglianza vale per ogni $c \in \mathbf{R}$ e per ogni $\nu \in \mathbf{N}$ $\nu \neq 0$, da ((1.1), ii)) segue la tesi [3].

Una nota a (1.2): con ragionamenti analoghi a quelli usati nella dimostrazione di (0.1) e di (0.4), si vede che $H_{n+q}(Q \bmod B_{c,\nu}, \mathbf{Z})$ è un gruppo libero per ogni $c \in \mathbf{R}$ e per ogni $\nu \in \mathbf{N}$.

---

(3) Sulla base della nota (2) si può dimostrare qualcosa di lievemente più generale: « Sia Q una varietà fortemente q-pseudoconvessa rispetto ad una funzione fortemente q-plurisubarmonica al di fuori di un compatto $K \subset Q$, sia $\dim Q = n$; $p : Q \longrightarrow \mathbf{R}$ sia una funzione di classe C^∞ 0-plurisubarmonica al di fuori di K e sia $R := \{x \in Q \mid p(x) < 0\} \supset K$ Allora si ha

$$H_k(Q \bmod R, G) = 0 \quad \text{per} \quad k > n + q$$

e per ogni gruppo abeliano di coefficienti G ».

(1.3) LEMMA. *Sia X uno spazio di Stein,* $\dim X = n$ *e sia A un sotto-insieme analitico (chiuso) di X, allora esiste un sistema fondamentale di intorni aperti $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ di A in X del tipo $U_\beta = \{x \in X \mid p_\beta(x) < 0\}$ ove $p_\beta : X \to \mathbf{R}$ è una funzione 0-plurisubarmonica su X.*

DIMOSTRAZIONE. (cfr. [4] Theor. 2 pag. 380). Sia U un intorno aperto di A in X, allora esiste (v. [4] Theor. 1) per un opportuno numero naturale N, un'applicazione olomorfa $f : X \to \mathbf{C}^N$ tale che $f^{-1}(0) = A$, $f_{|X-A}$ è iniettiva ed $f_{|X-U}$ è propria.

Quindi, $f(X - U)$ è chiuso in $\mathbf{C}^N$ e non contiene l'origine. Esiste, allora, un numero reale $\beta = \beta(U) > 0$ tale che, definendo la funzione $v_\beta : \mathbf{C}^N \to \mathbf{R}$ con $v_\beta(z_1 \dots, z_N) = \sum_{j=1}^{N} |z_j|^2 - \beta$ si ha

$$\{z \in \mathbf{C}^N \mid v_\beta(z) < 0\} \cap f(X - U) = \emptyset .$$

La funzione $p_\beta = v_\beta \circ f$ è 0-plurisubarmonica su X e soddisfa le condizioni volute, avendosi $A \subset U_\beta \subset U$.

I lemmi ora mostrati ci permettono, estendendo una dimostrazione di [4], di mostrare il seguente

(1.4) TEOREMA. *Sia Q un sottospazio aperto q-completo di uno spazio di Stein X; sia* $\dim Q = n$; *allora si ha*

$$H_k(Q, \mathbf{Z}) = 0 \qquad \textit{per } k > n + q$$

$$H_{n+q}(Q, \mathbf{Z}) \qquad \textit{privo di torsione.}$$

DIMOSTRAZIONE. In primo luogo osserviamo che non è restrittivo supporre si abbia $\dim X = n$. Infatti sia $\{X_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ la famiglia delle componenti irriducibili di X le quali abbiano intersezione non vuota con Q; allora $\widetilde{X} := \bigcup_{\delta \in \Delta} X_\delta$, essendo chiuso in X, è uno spazio di Stein di cui Q è un sottospazio aperto. Inoltre da $\dim X_\delta \leq \dim Q = n$ segue $\dim \widetilde{X} = n$; possiamo, quindi, porre $X = \widetilde{X}$.

Sia h una funzione olomorfa su X e tale che

$$A := \{x \in X \mid h(x) = 0\}$$

contenga l'insieme dei punti singolari di X; supponiamo, inoltre, che h non si annulli identicamente su alcuna componente irriducibile di Q.

Allora A è uno spazio di Stein e $\dim A \cap Q < n$; $X - A$ è una varietà di Stein. Osserviamo che il sottospazio aperto di X $Q - A = (X - A) \cap Q$ è una varietà q-completa (v. [6] Prop. (2.4)) e che si ha $\dim (Q - A) = n$.

Sia $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ un sistema fondamentale di intorni aperti di A scelto come in (1.3). Per ogni $\beta \in B$ si ha

$$(U_\beta \cap Q) - A = \{x \in Q - A \mid p_\beta(x) < 0\}$$

ove p_β è una funzione 0-plurisubarmonica su $X - A$ (precisamente p_β è del tipo $p_\beta = p'_{\beta\,|X-A}$ ove p'_β è una funzione 0-plurisubarmonica su X); siamo, perciò, nelle condizioni di (1.2) e possiamo scrivere

$$H_k((Q - A) \bmod (U_\beta \cap Q) - A, G) = 0$$

per ogni $k > n + q$, per ogni $\beta \in B$ e per ogni gruppo abeliano di coefficienti G.

Per excisione si ha

$$H_k(Q \bmod U_\beta \cap Q, G) = 0$$

al variare come sopra di k, β, G.

Ora $\{U_\beta \cap Q\}_{\beta \in B}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di $A \cap Q$ in Q, quindi

$$H_k(Q \bmod A \cap Q, G) = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, H_k(Q \bmod U_\beta \cap Q, G) = 0$$

al variare come sopra di k, β, G.

Ragioniamo, adesso, per induzione sulla dimensione di Q: supponiamo che per ogni gruppo abeliano di coefficienti G si abbia

$$H_k(T, G) = 0 \qquad \text{per } k > \dim T + q$$

per ogni aperto T q-completo di uno spazio di Stein S con $\dim T < n$.

Poichè $A \cap Q$ è un aperto q-completo dello spazio di Stein A e $\dim A \cap Q < n$, allora si ha

$$H_k(A \cap Q, G) = 0 \text{ per } k > n + q - 1.$$

Dalla successione esatta

$$\ldots \to H_k(A \cap Q, G) \to H_k(Q, G) \to H_k(Q \bmod A \cap Q, G) \to$$

$$\to H_{k-1}(A \cap Q, G) \to \ldots$$

segue $H_k(Q, G) = 0$ per $k > n + q$: con ciò si conclude il ragionamento induttivo e si vede in particolare

$$H_k(Q, \mathbf{Z}) = 0 \qquad \text{per } k > n + q.$$

Finalmente, dalla formula dei coefficienti universali

$$H_{n+q+1}(Q, G) = H_{n+q+1}(Q, \mathbf{Z}) \otimes G \oplus \operatorname{Tor}[H_{n+q}(Q, \mathbf{Z}), G]$$

si deduce

$$H_{n+q}(Q, \mathbf{Z}) \text{ privo di torsione.} \qquad \text{q. e. d.}$$

Si dà ora qualche condizione sufficiente perchè un aperto di uno spazio di Stein sia q-completo.

(1.5) Osservazione. *Sia Q un aperto di uno spazio di Stein X; allora Q è un sottospazio q-completo di X se e solo se è q-pseudoconvesso.*

Dimostrazione. Sia φ una funzione q-plurisubarmonica che definisca la q-pseudoconvessità di Q e π sia una funzione fortemente 0-plurisubarmonica che definisca la 0-completezza di X (v. (0.2)); possiamo supporre che π e φ siano positive su Q. Supponiamo che φ sia q-plurisubarmonica al di fuori del compatto K. Sia $x \in K$ ed U sia un intorno aperto di x, immerso mediante l'isomorfismo analitico χ come sottoinsieme analitico in un aperto Ω di $\mathbf{C}^N$. Esistono su Ω una funzione $\widehat{\pi}$ fortemente 0-plurisubarmonica ed una funzione $\widehat{\varphi}$ di classe C^∞ tali che $\widehat{\pi} \circ \chi = \pi$, $\widehat{\varphi} \circ \chi = \varphi$. Restringendo eventualmente Ω, possiamo supporre che gli autovalori di $\mathcal{L}(\widehat{\pi}, y)$ si mantengano su Ω maggiori di un numero $m > 0$ che gli autovalori di $\mathcal{L}(\widehat{\varphi}, y)$ si mantengano su Ω maggiori di un numero $s > -\infty$. Sia $M > 0$ tale che $mM + s > 0$, allora $M\widehat{\pi} + \widehat{\varphi}$ è una funzione fortemente 0-plurisubarmonica su Ω.

Ricopriamo K con un numero finito di aperti scelti come U, allora esiste un numero positivo A tale che la funzione $A\pi + \varphi$ definisce la q-completezza di Q.

(1.6) Osservazione. *Sia X uno spazio di Stein, sia $\varphi : X \to \mathbf{R}$ una funzione q-plurisubarmonica su X e sia $Q := \{x \in X \mid \varphi(x) < 0\}$; allora Q è un sottospazio aperto q completo di X.*

Dimostrazione. Sia $\pi : X \to \mathbf{R}$ una funzione positiva fortemente 0-plurisubarmonica che definisca la 0-completezza di X. La q-completezza di Q è definita dalla funzione

$$\psi := \pi - \frac{1}{\varphi}.$$

Verifichiamo che ψ è fortemente q-plurisubarmonica. Sia U un intorno di x immerso secondo l'isomorfismo χ come sottoinsieme analitico in un aperto Ω di $\mathbf{C}^N$; le funzioni $\widehat{\pi} = \pi \circ \chi^{-1}$, $\widehat{\varphi} = \varphi \circ \chi^{-1}$ sono rispettivamente fortemente 0-plurisubarmonica e q-plurisubarmonica su Q. Ponendo $\widehat{\psi} = \psi \circ \chi^{-1}$ si ha per ogni $y \in \Omega$

$$\mathcal{L}(\widehat{\psi}, y)(u) = \mathcal{L}(\widehat{\pi}, y)(u) + \frac{1}{(-\widehat{\varphi})^2}\mathcal{L}(\widehat{\varphi}, y)(u) + \frac{2}{(-\widehat{\varphi})^3}\,|\operatorname{grad}\widehat{\varphi} \times u|^2$$

e quindi $\mathcal{L}(\widehat{\psi}, y)$ ha almeno $N - q$ autovalori positivi.

Per ogni $c \in \mathbf{R}$ poniamo $B_c = \{x \in Q \mid \psi(x) < c\}$; si ha $B_c \subset \{x \in X \mid \pi(x) < c\}$. Quindi, per vedere che B_c è relativamente compatto in Q, basta osservare che si ha $\partial Q \cap \partial B_c = \emptyset$ (∂ denota la frontiera in X).

§ 2.

(2.1) COROLLARIO. *Sia X uno spazio di Stein e Q sia un sottospazio aperto q-completo di X, $\dim Q = n$ allora si ha:*

i) $H^k(Q, \mathbf{Z}) = 0$ *per* $k > n + q + 1$

ii) $H^k(Q, G) = 0$ *per* $k > n + q$ *e per ogni gruppo divisibile* G.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo il teorema dei coefficienti universali

$$H^j(Q, G) = \operatorname{Ext}(H_{j-1}(Q, \mathbf{Z}), G) \oplus \operatorname{Hom}(H_j(Q, \mathbf{Z}), G).$$

Dal precedente teor. (1.4) e dalla formula ora scritta applicata nel caso $j > n + q + 1$, segue i). Si ottiene ii) applicando ancora (1.4) e la formula scritta nel caso $j > n + q$ e ricordando che un gruppo è uno $\mathbf{Z}$-modulo iniettivo se e solo se è divisibile.

In particolare, $H^{n+q+1}(Q, \mathbf{Q}) = H^{n+q+1}(Q, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0$.

Quando Q è uno spazio complesso di dimensione n, $H_k(Q, \mathbf{Z}) = 0$ per $k > n + q$ e $H_{n+q}(Q, \mathbf{Z})$ è libero, allora, essendo $\operatorname{Ext}(H_{n+q}(Q, \mathbf{Z})\mathbf{Z}) = 0$, ne segue $H^k(Q, \mathbf{Z}) = 0$ per $k > n + q$. Un caso in cui si verifica tale proprietà è quello di uno spazio Q come in (2.1) e tale che $H_{n+q}(Q, \mathbf{Z})$ sia finitamente generato; un altro esempio è dato dagli spazi di Stein i cui punti singolari siano isolati (cfr. (0.1), [4]); in particolare se X è uno spazio di Stein 1-dimensionale si ha $H^2(X, \mathbf{Z}) = 0$; un ulteriore esempio è dato, ricordando (0.4), dalla seguente

(2.2) OSSERVAZIONE. *Sia Q una varietà q-completa di dimensione n; allora, $H^k(Q, \mathbf{Z}) = 0$ per $k > n + q$.*

(2.3) COROLLARIO. *Sia Q una varietà q-completa ed A sia una sottovarietà (chiusa) di Q; si abbia* $\dim A < \dim Q = n$.

Allora, indicando con $\mathcal{B}(A)$ il fascio (non analitico) *dei germi delle funzioni olomorfe, mai nulle e che valgono identicamente* 1 *su A, abbiamo*:

i) $H^k(Q, \mathcal{B}(A)) \simeq H^{k+1}(Q \bmod A, \mathbf{Z})$ *per* $k > q$

ii) $H^k(Q, \mathcal{B}(A)) = 0$ *per* $k > \max(q, n + q - 1)$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che ii) è conseguenza di i). Si ha la successione esatta

$$\ldots \longrightarrow H^{n+q}(A, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{n+q+1}(Q \bmod A, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{n+q+1}(Q, \mathbf{Z}) \longrightarrow \ldots$$

Poichè, per (2.2), $H^{s-1}(A, \mathbf{Z}) = 0 = H^s(Q, \mathbf{Z})$ per $s > n + q$, allora si ha $H^s(Q \bmod A, \mathbf{Z}) = 0$ per $s > n + q$. Quindi, se è valido i), quando sia $\max(q, n + q - 1) < k$, si ha $H^k(Q, \mathcal{B}(A)) \simeq H^{k+1}(Q \bmod A, \mathbf{Z}) = 0$.

Proviamo i). Indichiamo con $\mathcal{I}(A)$ il fascio degli ideali dei germi delle funzioni olomorfe che si annullano su A; indichiamo con $\mathbf{Z}(A)$ il fascio su Q le cui sezioni sono quelle del fascio $\mathbf{Z}$ che si annullano su A. Si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}(A) \longrightarrow \mathcal{I}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(A) \longrightarrow 0$$

da cui la successione esatta di coomologia

$$\ldots \longrightarrow H^q(Q, \mathcal{B}(A)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{q+1}(Q, \mathbf{Z}(A)) \longrightarrow H^{q+1}(Q, \mathcal{I}(A)) \longrightarrow H^{q+1}(Q, \mathcal{B}(A)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{q+2}(Q, \mathbf{Z}(A)) \longrightarrow H^{q+2}(Q, \mathcal{I}(A)) \longrightarrow \ldots$$

Da (0.3) si vede $0 = H^{q+1}(Q, \mathcal{I}(A)) = H^{q+2}(Q, \mathcal{I}(A)) = \ldots$ Per concludere basta osservare che si ha $H^k(Q, \mathbf{Z}(A)) \simeq H^k(Q \bmod A, \mathbf{Z})$.

Si può, evidentemente, ripetere il discorso ora concluso anche in altri casi, secondo qnanto si è fatto intorno alle osservazioni (2.1), (2.2). Per esempio se X è uno spazio di Stein 1-dimensionale ed A un sottoinsieme analitico (chiuso) 0-dimensionale di X, allora $H^1(X, \mathcal{B}(A)) = 0$.

Se X è uno spazio q-completo o, più in generale, se X è uno spazio coomologicamente q-completo [i.e. $H^k(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $k > q$ e per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su X], allora $H^{k+1}(X, \mathcal{B}(\varnothing)) \simeq H^{k+2}(X, \mathbf{Z})$ per

$k \geq q$. È noto, per un teorema di H. J. Reiffen, che uno spazio complesso arbitrario di dimensione n è coomologicamente n-completo, quindi per un tale spazio gli isomorfismi precedenti valgono a cominciare da $H^{n+1}(X, \mathcal{B}(\emptyset)) \simeq H^{n+2}(X, \mathbf{Z})$.

In particolare se X è una varietà complessa di dimensione n, allora, poichè X è una varietà n-completa (cfr. ad es. [7]), ne segue $H^{2n}(X, \mathcal{B}(\emptyset)) = 0$ per $n > 0$ (tale uguaglianza è falsa per $n = 0$); con lo stesso metodo si vede che se A è una sottovarietà chiusa con $\dim A < \dim X$, allora $H^{2n}(X, \mathcal{B}(A)) = 0$ per $n > 0$.

(2.4) COROLLARIO. *Sia Q un sottospazio aperto q completo di uno spazio di Stein X. Sia A un sottoinsieme analitico (chiuso) di Q con* $\dim A < \dim Q = n$. *Allora, indicando con $\mathcal{B}(A)$ il fascio (non analitico) dei germi delle funzioni olomorfe mai nulle e che valgono identicamente 1 su A, abbiamo*:

i) $H^k(Q, \mathcal{B}(A)) \simeq H^{k+1}(Q \bmod A, \mathbf{Z})$ *per* $k > q$

ii) $H^k(Q, \mathcal{B}(\emptyset)) = 0$ *per* $k > n + q$.

DIMOSTRAZIONE. Si procede analogamente a (2.3) sulla base di (2.1).

Quest'ultimo risultato estende il Korollar 3 pag. 222 di [3], dove, con lo stesso metodo, si prova ii) nel caso $q = 0$.

§ 3.

(3.1) LEMMA. *Sia U un aperto di $\mathbf{R}^{m+2q}$; si consideri $\mathbf{R}^m$ immerso naturalmente in $\mathbf{C}^m$ e si identifichi $\mathbf{R}^{2q}$ con $\mathbf{C}^q$; allora esiste un aperto q-completo $D \subset \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^q$ tale che $U \subset D$ e che U sia un retratto di deformazione di D.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $x_1, \dots, x_m$ le coordinate di $\mathbf{R}^m$, con $z_1 = x_1 + i y_1, \dots, z_m = x_m + i y_m$ le coordinate di $\mathbf{C}^m$; indichiamo con $x_{m+1}, \dots, x_{m+2q}$ le coordinate di $\mathbf{R}^{2q}$ che si identifica con $\mathbf{C}^q$ di coordinate $z_{m+1} = x_{m+1} + i x_{m+q+1}, \dots, z_{m+q} = x_{m+q} + i x_{m+2q}$.

In ([4] Lemma 6 pag. 383) si dimostra che esiste una funzione $g : \mathbf{R}^m \times \times \mathbf{R}^{2q} \to \mathbf{R}$ tale che: i) $U = \{x \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{2q} \mid g(x) > 0\}$, ii) $g(x) = 0$ per ogni $x \notin U$, iii) le derivate di tutti gli ordini di g sono limitate in $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{2q}$.

Fissata una funzione g di tale natura, per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione $p_\varepsilon : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^q \to \mathbf{R}$ ponendo

$$p_\varepsilon(z_1, \dots, z_{m+q}) = y_1^2 + \dots + y_m^2 - \varepsilon g(x_1, \dots, x_{m+2q}).$$

Per $1 \leq i, j \leq m$ si ha, indicando con δ_{ij} il simbolo di Kronecker,

$$\frac{\partial^2 p_\varepsilon}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j} = \frac{1}{4}\left(2\delta_{ij} - \varepsilon \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \, \partial x_j}\right).$$

Si può, quindi, per la proprietà iii) della funzione g, fissare un $\varepsilon > 0$ tanto piccolo che per ogni $(z^0_{m+1}, \dots, z^0_{m+q}) \in \mathbf{C}^q$ la funzione $p_\varepsilon(z_1, \dots, z_m, z^0_{m+1}, \dots, z^0_{m+q})$ sia fortemente 0-plurisubarmonica in ogni $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbf{C}^m$. Scriviamo $p_\varepsilon = p$.

Vogliamo vedere che p è fortemente q-plurisubarmonica su tutto $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^q$. Una condizione necessaria e sufficiente perchè ciò si verifichi è che per ogni punto $z^0 \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}$ esista una applicazione biolomorfa τ_{z^0} del disco $D_m = \left\{t \in \mathbf{C}^m \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} t_j \bar{t}_j < 1\right\}$ in $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^q$ tale che $\tau_{z^0}(0) = z^0$ e che $p \circ \tau_{z^0}$ sia fortemente 0-plurisubarmonica su D_m. Nel nostro caso tale proprietà è soddisfatta, basta porre:

$$\tau_{z^0}(t_1, \dots, t_m) = (t_1 + z^0_1, \dots, t_m + z^0_m, z^0_{m+1}, \dots, z^0_{m+q}).$$

Sia, ora

$$D := \{z \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^q \mid p(z) < 0\}.$$

Per (1.6) D è un aperto q-completo.

Resta da dimostrare che U è un retratto di deformazione di D. Osserviamo subito che $U \subset D$: infatti se $\widehat{z} \in U$, allora, per i) si ha

$$\widehat{y}_1 = \dots = \widehat{y}_m = 0, \quad g(\widehat{x}) = g(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_{m+2q}) > 0$$

e quindi $p(\widehat{z}) = 0 - \varepsilon g(\widehat{x}) < 0$.

Inoltre, si ha

$$D = \{(z_1, \dots, z_{m+q}) \in \mathbf{C}^{m+q} \mid (x_1, \dots, x_{m+2q}) \in U, \, y_1^2 + \dots + y_m^2 < \varepsilon g(x_1, \dots, x_{m+2q})\}$$

infatti, basta notare che se $(x_1, \dots, x_{m+2q}) \notin U$, allora, per ii), $g(x_1, \dots, x_{m+2q}) = 0$ e quindi $p(z) \geq 0$, cioè $z \notin D$. Ciò mostra che la funzione continua $f: D \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{C}^q$ definita da

$$f(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m, x_{m+1} + ix_{m+q+1}, \dots, x_{m+q} + ix_{m+2q}) =$$

$$= (x_1, \dots, x_m, x_{m+1} + ix_{m+q+1}, \dots, x_{m+q} + ix_{m+2q})$$

prende i valori in U. Consideriamo la funzione $F : D \times [0, 1] \rightarrow D$ definita da

$$F(z, t) = (1 - t) z + t f(z) ;$$

essa determina una retrazione di D su U.

(3.2) TEOREMA. *Sia G un gruppo abeliano finitamente generato e siano k, q, n numeri interi tali che*

i) $k \geq 1$

ii) $q \geq 0$

iii) $n \geq k + 3 - q, \; n \geq q$;

allora esiste in $\mathbf{C}^n$ un dominio D q-completo tale che $H_k(D, \mathbf{Z}) \simeq G$.

DIMOSTRAZIONE. In ([4] pag. 384) si dimostra che, fissati arbitrariamente un gruppo abeliano finitamente generato G, un intero $k \geq 1$, ed un intero $s \geq k + 3$, esiste un complesso L finito e connesso immerso in $\mathbf{R}^s$ tale che $H_k(L, \mathbf{Z}) \simeq G$ e che L è un retratto di deformazione di un proprio intorno U in $\mathbf{R}^s$.

Nel nostro caso, essendo per iii) $(n - q) + 2q \geq k + 3$ e $n \geq q$, possiamo, quindi, dire che esiste un aperto U di $\mathbf{R}^{(n-q)+2q}$ tale che si abbia

$$H_k(U, \mathbf{Z}) \simeq G .$$

Basta ora applicare il lemma (3.1).

(3.3) TEOREMA. *Sia G un gruppo abeliano numerabile; k, q, n siano numeri interi tali che si abbia*

i) $k \geq 1$

ii) $q \geq 0$

iii) $n \geq 2k + 2 - q, \; n \geq q$;

allora esiste in $\mathbf{C}^n$ un dominio D q-completo tale che $H_k(D, \mathbf{Z}) \simeq G$.

DIMOSTRAZIONE. Esiste un complesso X connesso localmente finito di dimensione $k + 1$ per cui $H_k(X, \mathbf{Z}) \simeq G$. Si può realizzare X in un $\widehat{X}$ contenuto in $\mathbf{R}^{2(k+1)}$ (4). Sia $D_{n+q-2(k+1)}$ il disco reale di dimensione $n + q - 2(k + 1)$ e sia $K = \widehat{X} \times D_{n+q-2(k+1)}$; allora si ha $H_k(K, \mathbf{Z}) \simeq G$.

(4) Risultato gentilmente comunicato dal Prof. R. Narasimhan.

Sia U un aperto connesso di K fn $\mathbf{R}^{(n-q)+2q}$ per cui si abbia

$$H_k(U, \mathbf{Z}) \simeq H_k(K, \mathbf{Z}) \simeq G ;$$

allora esiste per (3.1) un dominio q-completo D in $\mathbf{C}^{n-q} \times \mathbf{C}^q$ tale che

$$H_k(D, \mathbf{Z}) \simeq H_k(U, \mathbf{Z}).$$

Università di Pisa.
Istituto di Matematica.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREOTTI A. et GRAUERT H., *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. Franc. **90** (1962) pagg. 193-259.

[2] ANDREOTTI A. and NARASIMHAN R., *A topological property of Runge pairs*, Annals of Math. **79** (1962) pagg. 499-509.

[3] KAUP L., *Eine topologische Eigenschaft Steinscher Raume*, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, Math. Phisic. kl. (1966) pagg. 213-244.

[4] NARASIMHAN R., *On the Homology Groups of Stein Spaces*, Inventiones Math., **2** (1967) pagg. 377-385.

[5] SORANI G., *Omologia degli spazi q-pseudoconvessi*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa vol. XIV (1962) pagg. 299-304.

[6] SORANI G. and VILLANI V., *q-complete Spaces and Cohomology*, Transactions of the Am. Math. Soc. **125** (1966) pagg. 432-448.

[7] VILLANI V., *Su alcune proprietà coomologiche dei fasci coerenti su uno spazio complesso* Rend. Sem. Mat. Università di Padova XXXV (1964) pagg. 47-55.