Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

A. Tognoli

Sulla classificazione dei fibrati analitici reali E-principali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 1 (1969), p. 75-86
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_1_75_0>

SULLA CLASSIFICAZIONE DEI FIBRATI ANALITICI REALI E-PRINCIPALI

A. TOGNOLI (*)

Sia X uno spazio di Stein, $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrato olomorfo di gruppi su X, $\mathcal{F}_c$, $\mathcal{F}_a$, i fasci dei germi delle sezioni continue, olomorfe di E.

H. Grauert ha provato, (vedi [3] e [4]), che l'applicazione $\eta : H^1(X, \mathcal{F}_a) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}_c)$ indotta dall'immersione $\mathcal{F}_a \longrightarrow \mathcal{F}_c$ è bigettiva.

Esaminando i metodi di dimostrazione usati da H. Grauert si riconosce che, sostanzialmente, le proprietà che portano alla bigettività di η sono:

I) la validità del teorema delle matrici olomorfe invertibili per le sezioni, di un fibrato di gruppi, che sono analitiche ed omotope alla sezione identità

II) il fatto che per ogni aperto di Stein di X le classi di omotopia di sezioni di $\mathcal{F}_a$ e di $\mathcal{F}_c$ sono in corrispondenza bigettiva

III) il fatto che ogni sezione di $\mathcal{F}_c$ definita su un chiuso, ed omotopa alla sezione identità, si estenda ad una sezione definita su X

IV) il teorema di Runge generalizzato per le sezioni di $\mathcal{F}_a$ (vedi [2])

V) la completezza dello spazio delle sezioni di $\mathcal{F}_a$.

In questo lavoro abbiamo « assiomatizzato » parte della situazione e dei metodi usati da H. Grauert ottenendo un criterio generale che garantisce la bigettività di η a partire da proprietà del tipo I) ... V).

In particolare si esamina il caso in cui X sia uno spazio analitico reale coerente, ogni componente connessa del quale abbia dimensione finita, ed $E \longrightarrow X$ un fibrato analitico reale di gruppi complessificabile.

Usando i risultati di [8] ed il criterio accennato si prova, in questo caso, che η è bigettiva (la bigettività di η, nel caso in cui E sia banale, era già stata dimostrata in [7]).

Pervenuto alla Redazione il 23 Aprile 1968.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 35 del C. N. R. nell'anno accademico 1968-69.

Si noti che la differenza più notevole fra il caso reale e quello complesso è la seguente: nel caso reale non vale la proprietà V), tale proprietà è, in un certo senso, sostituita dai teoremi di approssimazione di H. Whitney (vedi [9]).

Geometricamente il risultato enunciato significa che su uno spazio analitico reale coerente, ogni componente connessa del quale abbia dimensione finita, comunque si fissi un fibrato analitico di gruppi complessificabile E, le classi di fibrati topologici E-principali sono in corrispondenza biunivoca naturale con le classi di fibrati analitici E-principali (per la definizione di fibrato E-principale si veda [0]).

L'ipotesi che lo spazio analitico reale coerente abbia le componenti connesse di dimensione finita è inutile come si proverà in un lavoro di prossima pubblicazione.

Si può dunque dire, rispondendo ad una questione posta da H. Cartan nel 1957, che per i fibrati analitici reali E-principali su uno spazio analitico reale coerente la classificazione topologica e quella analitica coincidono.

§ 1. Lemmi preliminari.

Sia X uno spazio topologico paracompatto, $p : \mathcal{F} \longrightarrow X$ un fascio di gruppi (non necessariamente abeliani) su X, (con il termine fascio intenderemo fascio di sezioni (vedi [10] pag. 110)).

Dato un insieme U di X noteremo con $\Gamma_U(\mathcal{F})$ il gruppo delle sezioni di $\mathcal{F}$ su U.

DEFINIZIONE 1. Diremo che sui gruppi delle sezioni di $\mathcal{F}$, è definita una topologia compatibile se su ogni gruppo $\Gamma_U(\mathcal{F})$, $U \subset X$, è definita una topologia ed inoltre:

i) $\Gamma_U(\mathcal{F})$ è un gruppo topologico

ii) per ogni coppia di insiemi $U, U', U \supset U'$ di X gli omomorfismi di restrizione $r : \Gamma_U(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_{U'}(\mathcal{F})$ sono continui.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di X, $p : \mathcal{F} \longrightarrow X$ un fascio di gruppi su X ed $\{f_{i,j}\}_{i,j \in I}$ un uno-cociclo a valori in $\mathcal{F}$ definito su $\{U_i\}$.

DEFINIZIONE 2. Diremo fascio associato al cociclo $\{f_{i,j}\}$ il fascio di gruppi $\mathcal{F}^{(f_{i,j})}$ di base $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ ottenuto nel modo seguente: sia $W = \bigcup_{i \in I} (p^{-1}(U_i) \times \{i\})$ ed $\mathcal{R}$ la relazione

$$(x \times \{i\}) \overset{\mathcal{R}}{\sim} (y \times \{j\}) \Longleftrightarrow f_{j,i}(p(x)) \cdot x \cdot f_{j,i}(p(x))^{-1} = y,$$

$p(x) \in U_i \cap U_j$, $i, j \in I$.

Essendo $\{f_{i,j}\}$ un cociclo $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza ed $\mathcal{F}^{(f_{i,j})} = W/\mathcal{R}$ ha una struttura naturale di fascio di gruppi su Y (vedi [1] pag. 145).

Supponiamo sui gruppi delle sezioni di $\mathcal{F}$ sia definita una topologia compatibile, considereremo su ogni $\Gamma_U(\mathcal{F}^{(f_{i,j})})$, $U \subset Y$, la meno fine topologia per cui le applicazioni $r_t : \Gamma_U(\mathcal{F}^{(f_{i,j})}) \longrightarrow \Gamma_{U \cap U_t}(\mathcal{F})$, $t \in I$, siano continue, ove $r_t = q_t^{-1} \cdot r'$, con r' omomorfismo di restrizione da U ad $U \cap U_t$ e q_t è indotta dalla restrizione della proiezione $q : W \longrightarrow \mathcal{F}^{(f_{i,j})}$ a $p^{-1}(U_t)$.

Si verifica che in questo modo si induce una topologia compatibile sui gruppi delle sezioni di $\mathcal{F}^{(f_{i,j})}$.

Supponiamo sui gruppi delle sezioni di $\mathcal{F}$ sia definita una topologia compatibile, per ogni insieme U di X consideriamo la relazione di equivalenza.

$\gamma_1 \overset{\mathcal{R}}{\sim} \gamma_2 \Longleftrightarrow$ esiste un'applicazione continua $a : I \longrightarrow \Gamma_U(\mathcal{F})$, $I = [0, 1]$, tale che $a(0) = \gamma_1$, $a(1) = \gamma_2$.

Notiamo $\pi(\Gamma_U(\mathcal{F})) = \Gamma_U(\mathcal{F})/\mathcal{R}$ e se $\gamma_1 \overset{\mathcal{R}}{\sim} \gamma_2$ diremo che γ_1 è omotopa, (in $\mathcal{F}$), a γ_2.

DEFINIZIONE 3. Sia $\{D_j\}_{j=1,\dots,m}$ una famiglia finita di chiusi di X, diremo che la situazione $\{X, \mathcal{F}, \{D_j\}_{j \in J}\}$, $j = 1, \dots, m$, è decomponibile se esiste una partizione $\{D_{j'}\}_{j' \in J'}$, $\{D_{j''}\}_{j'' \in J''}$, con $J' \cup J'' = J$, $J' \cap J'' = \emptyset$, $J' \neq \emptyset$, $J'' \neq \emptyset$ di $\{D_1, \dots, D_m\}$ tale che posto $D^1 = \bigcup_{j' \in J'} D_{j'}$, $D^2 = \bigcup_{j'' \in J''} D_{j''}$ si abbia $D^0 = D^1 \cap D^2 = \emptyset$ oppure:

i) per ogni intorno aperto $U(D^0)$ di D^0 ed ogni $f_0 \in \Gamma_{U(D^0)}(\mathcal{F})$, f_0 omotopa alla sezione identità, esistono due intorni $U(D^j)$, $j = 1, 2$, di D^j e due elementi $f_j \in \Gamma_{U(D^j)}(\mathcal{F})$ tali che, ove le sezioni sono definite, si abbia $f_0 = f_1 \cdot f_2^{-1}$ ed f_1, f_2 siano omotope alla sezione identità.

DEFINIZIONE 4. Diremo che la situazione $\{X, \mathcal{F}, \{D_j\}_{j \in J}\}$ è completamente decomponibile se $\{X, \mathcal{F}, \{D_j\}\}$ è decomponibile in due situazioni entrambe decomponibili e così di seguito fino a scomporre $\{D_j\}_{j \in J}$ in m situazioni ognuna delle quali contiene un solo D_j.

Data una situazione completamente decomponibile supporremo sia fissata una sua decomposizione (completa).

Data una famiglia di aperti $\{U_i\}_{i \in A}$ dello spazio topologico X ed una collezione di chiusi $\{D_i\}_{i \in A}$, con $D_i \subset U_i$ per ogni $i \in A$, diremo restringimento di $\{U_i\}$ rispetto a $\{D_i\}$ una famiglia di aperti $\{V_i\}_{i \in A}$ tali che $U_i \supset \overline{V}_i$, $V_i \supset D_i$, $\forall\, i \in A$.

Data una famiglia di chiusi $\{D_i\}_{i \in A}$ dello spazio X diremo ampliamento di $\{D_i\}$ una famiglia di aperti $\{U_i\}_{i \in A}$, tali che $U_i \supset D_i$, $\forall\, i \in A$.

Dalla topologia generale è noto che in uno spazio paracompatto X ogni ampliamento di una famiglia localmente finita di chiusi $\{D_i\}_{i \in A}$ ammette un restringimento rispetto a $\{D_i\}$.

Nel seguito considereremo due fasci di gruppi $\mathcal{F}_1 \xrightarrow{p_1} X$, $\mathcal{F}_2 \xrightarrow{p_2} X$ e supporremo che:

1⁰) $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$

2⁰) sui gruppi delle sezioni di $\mathcal{F}_1$ sia definita una topologia compatibile. Sui gruppi delle sezioni di $\mathcal{F}_2$ considereremo la topologia (compatibile) indotta da quella delle sezioni di $\mathcal{F}_1$.

Sia $\{D_j\}_{j=1,\dots,m}$ una famiglia finita di chiusi dello spazio topologico X, $\{U_j\}_{j=1,\dots,m}$ un ampliamento di $\{D_j\}$ ed $\{f_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}$, $\{f'_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}$ due uno-cocicli a valori in $\mathcal{F}_2$, definiti sul ricoprimento $\{U_j\}$ di $U = \bigcup_{j=1}^{m} U_j$.

DEFINIZIONE 5. Diremo che i due cocicli $\{f_{i,j}\}$, $\{f'_{i,j}\}$ sono coomologhi relativamente a $\{D_j\}$ se:

a) esiste una zero cocatena $\{s_i\}_{i=1,\dots,m}$, $s_i\colon U_i \longrightarrow \mathcal{F}_1$, tale che $f_{i,j} = s_i f'_{i,j} s_j^{-1}$, $i, j = 1, \dots, m$

b) la situazione $\{X, \mathcal{F}_2^{(f'_{i,j})}, \{D_j\}\}$ è completamente decomponibile

c) sia $\{D_{i_1}, \dots, D_{i_p}\}$, $\{D_{j_1}, \dots, D_{j_q}\}$ una delle decomposizioni (di $\{D_j\}_{j=1,\dots,m}$ o di una sottofamiglia) che compaiono nel procedimento di completa riduzione di $\{D_j\}$ e $D' = \bigcup_{l=1}^{p} D_{i_l}$, $D'' = \bigcup_{l=1}^{q} D_{j_l}$.

Supponiamo allora che per ogni $\gamma \in \Gamma_{U(D')}(\mathcal{F}_1^{(f'_{i,j})})$ esista $\gamma_a \in \Gamma_{U'(D')}(\mathcal{F}_2^{(f'_{i,j})})$ omotopa a γ ristretta ad $U'(D')$, ove $U(D')$, $U'(D') \subset U(D')$ sono intorni di D'. Ed analoga condizione per D'' e $D' \cap D''$.

Chiediamo infine che per ogni aperto V di un intorno di $\bigcup_{j=1}^{m} D_j$ l'applicazione $\pi(\Gamma_V(\mathcal{F}_2^{(f'_{i,j})})) \longrightarrow \pi(\Gamma_V(\mathcal{F}_1^{(f'_{i,j})}))$ indotta dall'immersione $\Gamma_V(\mathcal{F}_2^{(f'_{i,j})}) \longrightarrow \Gamma_V(\mathcal{F}_1^{(f'_{i,j})})$ sia iniettiva.

LEMMA 1. *Siano $\{D_j\}_{j=1,\dots,m}$, X, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ gli enti appena definiti, $\{U_j\}_{j=1,\dots,m}$ un ampliamento di $\{D_j\}$ ed $\{f_{i,j}\}$, $\{f'_{i,j}\}$, $i, j = 1, \dots, m$ due uno-cocicli, a valori in $\mathcal{F}_2$, definiti su $\{U_j\}$.*

Se $f_{j,j}$ ed $f'_{i,j}$ sono coomologhi relativamente a $\{D_j\}$ esiste un restringimento $\{V_j\}$ di $\{U_j\}$ rispetto a $\{D_j\}$ ed una zero cocatena $\{f_i\}_{i=1,\dots,m}$, $f_i\colon V_i \longrightarrow \mathcal{F}_2$ tale che, ove le applicazioni sono definite, risulti:

$$f_{i,j} = f_i \cdot f'_{i,j} \cdot f_j^{-1}.$$

Prova. Come osservato in [3] pag. 471 basta dimostrare che dato un uno-cociclo $g_{i,j}\colon U_i \cap U_j \longrightarrow \mathcal{F}_2^{(f'_{i,j})}$ per cui esista una zero-cocatena $t_i\colon U_i \longrightarrow \mathcal{F}_1^{(f'_{i,j})}$ tale che, ove le applicazioni sono definite si abbia: $g_{i,j} = t_i \cdot t_j^{-1}$, $i, j = 1, \dots, m$, allora esiste un restringimento $\{V_j\}$ di $\{U_j\}$ rispetto a $\{D_j\}$ ed una zero cocatena $g_i : V_i \longrightarrow \mathcal{F}_2^{(f_i', j)}$ tale che, ove l'espressione ha senso valga $g_{i,j} = g_i \cdot g_j^{-1}$.

Dimostriamo dunque quest'ultimo fatto ragionando per induzione sul numero m, Se $m = 1$ non vi è nulla da dimostrare.

Supponiamo provato il lemma per ogni famiglia di $m - 1$ elementi; per ipotesi la situazione $\{X, \mathcal{F}_2^{(f_i', j)}, \{D_j\}\}$ è completamente decomponibile, sia $K_1 = \{1, \dots, s\}$, $K_2 = \{s + 1, \dots, m\}$, $\{D_j\}_{j \in K_1}$, $\{D_i\}_{i \in K_2}$ la partizione associata alla prima decomposizione. Per l'ipotesi di induzione il lemma è provato per le famiglie $\{D_j\}_{j \in K_1}$, $\{D_i\}_{i \in K_2}$, esistono quindi due ampliamenti $\{U_j'\}_{j \in K_i}$, $i = 1, 2$ di $\{D_l\}_{l \in K_i}$ e degli elementi $'g_j \in \Gamma_{U_j'}(\mathcal{F}_2^{(f_i', j)})$ tali che, ove le applicazioni sono definite si abbia:

(1) $\quad g_{i,j} = 'g_i\,('g_j)^{-1}$ per ogni coppia di indici i, j entrambi di K_1 oppure di K_2.

Notiamo $D^1 = \bigcup_{j \in K_1} D_j$, $D^2 = \bigcup_{j \in K_2} D_j$, $D^0 = D^1 \cap D^2$.

Dalla (1) e dalle condizioni di compatibilità di cociclo segue che la sezione:

$$'g = ('g_i)^{-1} \cdot g_{i,j} \cdot 'g_j, \quad i \in K_1, \ j \in K_2$$

non dipende da i, j e quindi definisce una sezione di $\mathcal{F}_2^{(f_i', j)}$ su un intorno di D^0.

Analogamente si ha, ove le applicazioni sono definite:

$$t_j^i = ('g_j)^{-1} \cdot t_j = ('g_l)^{-1} \cdot t_l, \ j, l \in K_i, \ i = 1, 2$$

e quindi le t_j^i definiscono, per incollamento, due sezioni t^1, t^2 di $\mathcal{F}_1^{(f_i', j)}$ definite su due intorni di D^1, D^2 rispettivamente.

Su un intorno di D^0 risulta:

(2) $$t^1 \cdot (t^2)^{-1} = 'g.$$

Per l'ipotesi *c*) della definizione di uno-cocicli coomologhi rispetto a $\{D_j\}$ esistono delle sezioni $''g^1, ''g^2$ di $\mathcal{F}_2^{(f_i', j)}$ definite su due intorni di D^1, D^2 che sono omotope a t^1, t^2 (opportunamente ristrette).

Sia $^*g = (''g^1)^{-1} \cdot 'g \cdot ''g^2$, per la (2) $^*g$ è omotopa in $\mathcal{F}_1^{(f_i', j)}$, e (quindi per l'ipotesi *c*) della definizione di uno cocicli coomologhi rispetto a $\{D_j\}$) in $\mathcal{F}_2^{(f_i', j)}$, alla sezione identità.

Per la decomponibilità di $\{X, \mathcal{F}_2^{(f_i', j)}, \{D_j\}\}$ esistono due sezioni $^*g^1, ^*g^2$ di $\mathcal{F}_2^{(f_i', j)}$ definite su due intorni di D^1, D^2 tali che, ove le applicazioni sono definite si abbia:

(3) $$ {}^*g = {}^*g^1 \cdot ({}^*g^2)^{-1}. $$

Esistono perciò due intorni U^1, U^2 di D^1, D^2 su cui risultano definite le sezioni: $g^1 = {}''g^1 \cdot {}^*g^1$, $g^2 = {}''g^2 \cdot {}^*g^2$ di $\mathcal{F}_2^{(f_{i,j}')}$.

Ove le applicazioni sono definite vale $g^1 \cdot (g^2)^{-1} = g'$ ed infine se si pone $g_j = {}'g_j g^i$ per ogni $j \in K_i$, $i = 1, 2$, si ha che le g_j sono sezioni di $\mathcal{F}_2^{(f_{i,j}')}$ definite su un intorno V_j' di D_j ed inoltre su $V_j' \cap V_k'$ risulta $g_j \cdot g_k^{-1} = g_{j,k}$, $j, k = 1, \dots, m$.

Restringendo, eventualmente, la famiglia $\{V_j'\}$ rispetto a $\{D_j\}$ e prendendo le restrizioni delle g_j si ha la tesi del lemma.

OSSERVAZIONE 1. Siano $\{D_j\}_{j=1,\dots,m}$, X, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ gli enti che intervengono nell'enunciato del lemma 1, $\{U_j\}_{j=1,\dots,m}$ un ampliamento di $\{D_j\}$ ed $\{f_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}$ un uno-cociclo definito su $\{U_j\}$ a valori in $\mathcal{F}_2$ che sia coomologo, relativamente a $\{D_j\}$, al cociclo unità.

Indichiamo con $s_i \in \Gamma_{U_i}(\mathcal{F}_1)$ degli elementi tali che su $U_i \cap U_j$, $i, j = 1, \dots, m$ risulti: $f_{i,j} = s_j \cdot s_j^{-1}$ (tali sezioni esistono per le ipotesi fatte).

Se esiste un sistema fondamentale di intorni $\{U_D^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ di $D = \bigcup_{j=1}^m D_j$ tale che l'applicazione canonica $\pi(\Gamma_{U_D^\lambda}(\mathcal{F}_2)) \longrightarrow \pi(\Gamma_{U_D^\lambda}(\mathcal{F}_1))$, $\lambda \in \Lambda$, sia surgettiva allora esiste un restringimento $\{V_j\}$ di $\{U_j\}$ rispetto a $\{D_j\}$ e degli elementi $f_j \in \Gamma_{V_i}(\mathcal{F}_2)$, tali che, ove le applicazioni sono definite si abbia $f_{i,j} = f_i \cdot f_j^{-1}$ $i, j = 1, \dots, m$ ed inoltre la sezione s di $\Gamma_V(\mathcal{F}_1)$, $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, definita su V_i da $f_i^{-1} \cdot s_i$, $i = 1, \dots, m$, sia omotopa alla sezione identità.

Per il lemma 1 infatti esiste un restringimento $\{V_i'\}$ di $\{U_i\}$ rispetto a $\{D_i\}$ e degli elementi ${}'f_i$ di $\Gamma_{V_i'}(\mathcal{F}_2)$ tali che, ove le applicazioni sono definite si abbia ${}'f_i \cdot ({}'f_j)^{-1} = f_{i,j}$.

Sia s' l'elemento di $\Gamma_{V'}(\mathcal{F}_1)$, $V' = \bigcup_{i=1}^m V_i'$, definito su V_i' da ${}'f_i^{-1} \cdot s_i$, $i = 1, \dots, m$.

Per le ipotesi fatte esiste un intorno U_D^λ, $U_D^\lambda \subset V'$, di $D = \bigcup_{j=1}^m D_j$ ed $h \in \Gamma_{U_D^\lambda}(\mathcal{F}_2)$ tale che $(h^{-1} \cdot s')_{|U_D^\lambda}$ è omotopo all'identità.

Poniamo $V_i = V_i' \cap U_D^\lambda$, $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, $f_i = {}'f_{i|V_i} \cdot h_{|V_i}$; risulta su $V_i \cap V_j$: $f_{i,j} = f_i \cdot f_j^{-1}$ ed inoltre la sezione s di $\Gamma_V(\mathcal{F}_1)$ definita su V_i da $f_{i|V_i}^{-1} \cdot (s_{i|V_i})$ è eguale alla sezione $h^{-1} \cdot s'_{|V}$ e quindi è omotopa alla sezione identità. L'osservazione è così dimostrata.

Sia, come all'inizio del paragrafo, X uno spazio topologico paracompatto, $\{D_j\}_{j \in K}$, $K = \{1, \dots, m\}$, una famiglia finita di chiusi di X, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$ due fasci di gruppi (non necessariamente abeliani) sulle cui sezioni siano definite delle topologie compatibili e la topologia di $\mathcal{F}_2$ sia indotta da quella di $\mathcal{F}_1$.

Sia $\{U_j\}_{j \in K}$ un ampliamento di $\{D_j\}_{j \in K}$ e $\{g_{i,j} \in \Gamma_{U_i \cap U_j}(\mathcal{F}_1)\}_{i,j \in K}$ un uno-cociclo a valori in $\mathcal{F}_1$ definito su $\{U_i\}$.

Ad ogni partizione $K = K_1 \cup K_2$ di K, (per cui si abbia cioè: $K_1 \neq \emptyset$, $K_2 \neq \emptyset$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$), si associa la famiglia $\{D_{\lambda,\mu} = D_\lambda \cap D_\mu\}_{\lambda \in K_1, \mu \in K_2}$ di chiusi di X.

Sia $\{V_\mu\}_{\mu \in K_2}$ un ampliamento di $\{D_\mu\}_{\mu \in K_2}$ ed $\{h_{\mu_1,\mu_2} \in \Gamma_{V_{\mu_1} \cap V_{\mu_2}}(\mathcal{F}_2)\}$ un uno-cociclo che sia coomologo a $\{g_{\mu_1,\mu_2}\}$ ristretto a $\{V_\mu\}_{\mu \in K_2}$.

Notiamo con $\{W_{\lambda,\mu}\}_{\lambda \in K_1, \mu \in K_2}$ un ampliamento di $\{D_{\lambda,\mu}\}$ ed $\{l_{\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2} \in \Gamma_{W_{\lambda_1 \mu_1} \cap W_{\lambda_2 \mu_2}}(\mathcal{F}_2^{(h\mu_1 \mu_2)})\}_{\lambda_1, \lambda_2 \in K_1, \mu_1, \mu_2 \in K_2}$ un uno-cociclo definito su $\{W_{\lambda,\mu}\}$ a valori in $\mathcal{G}_2^{(h_{\mu_1,\mu_2})}$. Supponiamo esista una zero-cocatena $\{t_{\lambda,\mu} \in \Gamma_{W_{\lambda,\mu}}(\mathcal{F}_1^{(h_{\mu_1,\mu_2})})\}_{\substack{\lambda \in K_1, \\ \mu \in K_2}}$ tale che, ove le sezioni sono definite si abbia:

$$l_{\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2} = t_{\lambda_1 \mu_1} \cdot (t_{\lambda_2,\mu_2})^{-1}. \tag{1}$$

Definizione 6. Diremo che la situazione $\{X, \{g_{i,j}\}, \{D_j\}\}$, $i, j \in K$, è divisibile se esiste una partizione $K = K_1 \cup K_2$ di K tale che per ogni scelta dei coicicli $\{h_{\mu_1,\mu_2}\}$, $\{l_{\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2}\}$, $\{t_{\lambda,\mu}\}$, costruiti come sopra per cui valga la (1) esiste una zero-cocatena $\{t^*_{\lambda,\mu} \in \Gamma_{W^*_{\lambda,\mu}}(\mathcal{F}_2^{(h_{\mu_1,\mu_2})})\}_{\lambda \in K_1, \mu \in K_2}$ definita su un restringimento $\{W^*_{\lambda,\mu}\}$ di $\{W_{\lambda,\mu}\}$ rispetto a $\{D_{\lambda,\mu}\}$ tale che, ove le sezioni sono definite, risulti: $l_{\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2} = t^*_{\lambda_1,\mu_1} \cdot (t^*_{\lambda_2,\mu_2})^{-1}$ ed inoltre la sezione s di $\Gamma_{W^*}(\mathcal{F}_1^{(h_{\mu_1,\mu_2})})$, $W^* = \cup\, W^*_{\lambda,\mu}$, definita da $s|_{W^*_{\lambda,\mu}} = (t^*_{\lambda,\mu})^{-1} \cdot t_{\lambda,\mu}$, sia omotopa alla sezione identità.

Definizione 7. Diremo che la situazione $\{X, \{g_{i,j}\}, \{D_j\}\}$, $i, j \in K$, è completamente divisibile se essa è divisibile in due situazioni ognuna delle quali è divisibile e così di seguito fino a scomporre la situazione data in m situazioni formate da un solo chiuso D_i.

Nel seguito trattando di una situazione completamente divisibile supporremo sia assegnata una sua divisione (completa).

Definizione 8. Sia $\{g_{i,j} \in \Gamma_{U_i \cap U_j}(\mathcal{F}_1)\}$, $i, j \in K$, un uno-cociclo, diremo che, relativamente a $\{D_i\}_{i \in K}$, esso è coomologo ad un cociclo a valori in $\mathcal{F}_2$ se:

a') la situazione $\{X, \{g_{i,j}\}, \{D_j\}\}$, $i, j \in K$, è completamente divisibile

b') data una partizione $\{D_{i_1}, \dots, D_{i_p}\}$, $\{D_{j_1}, \dots, D_{j_q}\}$ (di $\{D_j\}_{j \in K}$ o di una sua sottofamiglia) che compare nella completa divisione di $\{D_j\}_{j \in K}$ sia $D^0 = (D_{i_1} \cup \dots \cup D_{i_p}) \cap (D_{j_1} \cup \dots \cup D_{j_q})$, $K_2 = \{j_1, \dots, j_q\}$.

Esiste allora un intorno chiuso $U(D^0)$ di D^0 tale che per ogni chiuso $S \subset U(D^0)$ ed ogni $\gamma' \in \Gamma_S(\mathcal{F}_1^{(h_{\mu_1},\mu_2)})$, μ_1, $\mu_2 \in K_2$, γ' omotopa alla sezione identità, esiste un'estensione γ, $\gamma \in \Gamma_{U(D^2)}(\mathcal{F}_1^{(h_{\mu_1},\mu_2)})$, con $U(D^2)$ intorno di $D^2 = D_{j_1} \cup \ldots \cup D_{j_q}$ (per la definizione di $\mathcal{F}_1^{(h_{\mu_1},\mu_2)}$ vedasi la definizione 6).

LEMMA 2. *Siano X, $\{D_j\}_{j \in K}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ gli enti sopra definiti, $\{U_j\}$ un ampliamento di $\{D_j\}$ e $\{g_{i,j} \in \Gamma_{U_i \cap U_j}(\mathcal{F}_1)\}_{i,j \in K}$ un uno-cociclo coomologo, relativamente a $\{D_j\}$, ad un uno-cociclo a valori in $\mathcal{F}_2$.*

Esiste allora un restringimento $\{V_j\}_{j \in K}$ di $\{U_j\}$ rispetto a $\{D_j\}$ ed un uno-cociclo $\{f_{i,j} \in \Gamma_{V_i \cap V_j}(\mathcal{F}_2)\}_{i,j \in K}$ che è coomologo, su $\{V_j\}_{j \in K}$, a $\{g_{i,j}\}$.

Prova. Ragioniamo per induzione sul numero m dei chiusi della famiglia $\{D_j\}_{j \in K}$; se $m = 1$ non vi è nulla da provare; supponiamo dimostrato il lemma per ogni famiglia con meno di m elementi e proviamolo per una famiglia di m elementi.

Per ipotesi la situazione $\{X, \{g_{i,j}\}, \{D_j\}\}$ $i, j \in K$, è completamente divisibile quindi esiste una partizione $K = K_1 \cup K_2$ di K tale che ai cocicli $\{g_{\lambda_1,\lambda_2}\}_{\lambda_1,\lambda_2 \in K_1}$, $\{g_{\mu_1,\mu_2}\}_{\mu_1,\mu_2 \in K_2}$ si possa applicare il lemma (per l'ipotesi di induzione).

Esistono quindi dei restringimenti $\{'V_\lambda\}_{\lambda \in K_1}$, $\{'V_\mu\}_{\mu \in K_2}$ di $\{U_\lambda\}_{\lambda \in K_1}$ $\{U_\mu\}_{\mu \in K_2}$ rispetto a $\{D_\lambda\}$, $\{D_\mu\}$ e degli elementi $s_i^* \in \Gamma_{'V_i}(\mathcal{F}_1)$, $i \in K$, tali che $f_{i,j}^* = s_i^* \cdot g_{i,j} \cdot (s_j^*)^{-1}$, ($g_{i,j}$ indica impropriamente la restrizione di $g_{i,j}$ a $'V_i \cap {'V_j}$), sia un elemeuto di $\Gamma_{'V_i \cap 'V_j}(\mathcal{F}_2)$ per ogni coppia di indici i, j entrambi in K_1 oppure in K_2.

Notiamo $s_{\lambda,\mu}^* = s_\lambda^* \cdot g_{\lambda,\mu} \cdot (s_\mu^*)^{-1}$ per ogni $\lambda \in K_1$, $\mu \in K_2$. Sia poi: $D_{\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2} = D_{\lambda_1\lambda_2} \cap D_{\mu_1,\mu_2}$, ove

$$D_{\lambda_1,\lambda_2} = D_{\lambda_1} \cap D_{\lambda_2},\ D_{\mu_1,\mu_2} = D_{\mu_1} \cap D_{\mu_2},\ \lambda_1, \lambda_2 \in K_1,\ \mu_1, \mu_2 \in K_2 .$$

Sia $'V^2 = \bigcup_{\mu \in K_2} {'V_\mu}$ ed $\mathcal{F}_2^{(f^*_{\mu_1},\mu_2)}$ il fascio di base $'V^2$ associato al cociclo $\{f^*_{\mu_1,\mu_2}\}_{\mu_1,\mu_2 \in K_2}$.

Gli elementi $f_{i,j}^*$, $s_{i,j}^*$ si possono interpretare come sezioni di $\mathcal{F}_2^{(f^*_{\mu_1},\mu_2)}$, $\mathcal{F}_1^{(f^*_{\mu_1},\mu_2)}$ e dove le sezioni sono definite risulta (con le notazioni introdotte all'inizio del paragrafo):

$$(\mu_1, s^*_{\lambda_1,\mu_1}) \cdot (\mu_2, s^*_{\lambda_2,\mu_2})^{-1} = (\mu_1, f^*_{\lambda_1,\lambda_2} \cdot (f^*_{\mu_1,\mu_2})^{-1})\ \lambda_1, \lambda_2 \in K_1,\ \mu_1, \mu_2 \in K_2 .$$

Essendo $K = K_1 \cup K_2$ una partizione di K associata ad una divisione della famiglia $\{D_j\}_{j \in K}$ esiste un ampliamento $\{W_{\lambda,\mu}\}$ di $\{D_{\lambda,\mu}\}$, $\lambda \in K_1$, $\mu \in K_2$

e degli ${}^*f_{\lambda,\mu} \in \Gamma_{W_{\lambda,\mu}}(\mathcal{F}_2^{(f^*_{\mu_1,\mu_2})})$ tali che, ove le sezioni sono definite, si abbia

$$(\mu_1, {}^*f_{\lambda_1,\mu_2}) \cdot (\mu_2, {}^*f_{\lambda_2,\mu_1})^{-1} = (\mu_1, f^*_{\lambda_1,\lambda_2} \cdot (f^*_{\mu_1,\mu_2})^{-1}).$$

Possiamo supporre inoltre la sezione γ' di $\Gamma_W(\mathcal{F}_1^{(f^*_{\mu_1,\mu_2})})$, $W = \bigcup_{\substack{\lambda \in K_1 \\ \mu \in K_2}} W_{\lambda,\mu}$, definita su $W_{\lambda,\mu}$ da $(\mu, (s^*_{\lambda,\mu})^{-1} \cdot {}^*f_{\lambda,\mu})$, $\lambda \in K_1$, $\mu \in K_2$, sia omotopa alla sezione identità.

Per l'ipotesi b') della definizione 8 esiste un intorno W^* di $D^2 = \bigcup_{\mu \in K_2} D_\mu$ ed un elemento γ di $\Gamma_{W^*}(\mathcal{F}_1^{(f^*_{\mu_1,\mu_2})})$ che coincide con γ' su un intorno $W(D^0)$ di $\bigcup_{\substack{\lambda \in K_1 \\ \mu \in K_2}} D_{\lambda,\mu}$.

Sia ora $\{V_j\}_{j \in K}$ un restringimento di $\{U_j\}$ rispetto a $\{D_j\}$ tale che $V_\lambda \cap V_\mu \subset W(D^0)$, $\lambda \in K_1$, $\mu \in K_2$, e su ogni V_μ, $\mu \in K_2$, risulti definita la sezione $f_\mu = \gamma_\mu^{-1} \cdot s^*_\mu$ ove γ_μ è una restrizione di γ ed s^*_μ indica, impropriamente, una restrizione opportuna di s^*_μ.

Poniamo $f_\lambda = s^*_\lambda$, per ogni $\lambda \in K_1$.

Si verifica che l'uno-cociclo $\{f_{i,j} \in \Gamma_{V_i \cap V_j}(\mathcal{F}_1)\}$ definito da: $f_{i,j} = f_i \cdot g_{i,j} \cdot f_j^{-1}$, $i, j \in K$, è a valori in $\mathcal{F}_2$.

Infatti se i, j sono K_1 l'asserto segue dal fatto che $f_{i,j} = f^*_{i,j \mid V_i \cap V_j}$; se i, j sono in K_2 si giunge alla stessa conclusione perchè γ è una sezione del fascio $\mathcal{F}_1^{(f^*_{\mu_1,\mu_2})}$.

Nel caso sia $i \in K_1$, $j \in K_2$ si verifica, sostituendo ad f_j la sua espressione che risulta $f_{i,j} = {}^*f_{i,j \mid V_i \cap V_j}$ ed il lemma è così dimostrato.

§ 2. Applicazioni ed esempi.

Sia X uno spazio topologico paracompatto, $p: \mathcal{F} \to X$ un fascio di gruppi (non necessariamente abeliani).

Indichiamo con $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ l'insieme dei ricoprimenti aperti di X con la relazione $\mathcal{U}_\lambda > \mathcal{U}_{\lambda'}$, se $\mathcal{U}_\lambda$ è un raffinamento di $\mathcal{U}_{\lambda'}$.

DEFINIZIONE 9. Una sottofamiglia $\{\mathcal{U}_l\}_{l \in L}$ di $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ si dice 1-filtrante rispetto ad $\mathcal{F}$ se:

$$\lim_{l \in L} \mathcal{H}^1(\mathcal{U}_l) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{H}^1(\mathcal{U}_\lambda)$$

ove $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}_l)$, $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}_\lambda)$, indicano il primo gruppo di coomologia, a valori in $\mathcal{F}$, del ricoprimento $\mathcal{U}_l$, $\mathcal{U}_\lambda$.

Sia $\{\{D_i^\lambda\}_{i \in K_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda'}$ una classe di famiglie di insiemi chiusi di X.

DEFINIZIONE 10. Diremo che $\{\{D_i^\lambda\}_{i \in K_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda'}$ è 1-filtrante rispetto ad $\mathcal{L}$ se esiste una famiglia di ampliamenti $\{\{U_i^\lambda\}_{i \in K_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda'}$ di $\{\{D_i^\lambda\}_{i \in K_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda'}$ che è 1-filtrante rispetto ad $\mathcal{F}$.

Supporremo nel seguito siano assegnati sullo spazio topologico X due fasci di gruppi $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ soddisfacenti alle proprietà 1^0) e 2^0) enunciate all'inizio del paragrafo 1.

DEFINIZIONE 11. Sia $\{D_i\}_{i \in K}$ una famiglia finita di chiusi di X, diremo che la situazione $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \{D_i\}_{i \in K}\}$ è coomologicamente iniettiva se:

Dato un ampliamento $\{U_i\}_{i \in K}$ di $\{D_i\}_{i \in K}$ e due uno-cocicli $\{f_{i,j} \in \Gamma_{U_i \cap U_j}(\mathcal{F}_2)\}$, $\{g_{i,j} \in \Gamma_{U_i \cap U_j}(\mathcal{F}_2)\}$, $i, j \in K$, per cui esista una zero cocatena $\{s_i \in \Gamma_{U_i}(\mathcal{F}_1)\}_{i \in K}$ tale che su $U_i \cap U_j$ risulti: $f_{i,j} = s_i \cdot g_{i,j} \cdot s_j^{-1}$, $i, j \in K$, allora i cocicli $\{f_{i,j}\}$, $\{g_{i,j}\}$ sono coomologhi rispetto a $\{D_i\}_{i \in K}$.

DEFINIZIONE 12. Sia $\{D_i\}_{i \in K}$ una famiglia finita di chiusi di X; diremo che la situazione $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \{D_i\}_{i \in K}\}$ è coomologicamente surgettiva se:

Dato un ampliamento $\{U_i\}_{i \in K}$ di $\{D_i\}_{i \in K}$ ed un uno-cociclo $\{g_{i,j} \in \Gamma_{U_i \cap U_j}(\mathcal{F}_1)\}_{i,j \in K}$ allora esso è coomologo, relativamente a $\{D_i\}_{i \in K}$, ad un uno cociclo a valori in $\mathcal{F}_2$.

Con le definizioni ora poste i lemmi 1 e 2 si possono fondere nel seguente:

TEOREMA 1. *Sia X uno spazio topologico paracompatto, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ due fasci di gruppi (non necessariamente abeliani) aventi X come base e soddisfacenti le proprietà 1^0) e 2^0) enunciate all'inizio del paragrafo* 1.

Supponiamo esista una famiglia di ricoprimenti chiusi $\{\{D_i^\lambda\}_{i \in K_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda'}$ di X che sia 1-filtrante rispetto ad $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$.

In queste ipotesi se la situazione $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \{D_i^\lambda\}_{i \in K_\lambda}\}$ è coomologicamente iniettiva per ogni $\lambda \in \Lambda'$ allora l'applicazione $\eta : H^1(X, \mathcal{F}_2) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}_1)$, indotta dall'inclusione $\mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, è iniettiva.

Se la situazione $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \{D_i^\lambda\}_{i \in K_\lambda}\}$ è coomologicamente surgettiva per ogni $\lambda \in \Lambda'$ allora $\eta : H^1(X, \mathcal{F}_2) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}_1)$ è surgettivo.

OSSERVAZIONE 2. Sia $\mathcal{F} \xrightarrow{p} X$ un fascio di gruppi; diremo fascio localmente simile ad $\mathcal{F}$ ogni fascio del tipo $\mathcal{F}^{(f_{i,j})}$ ove $\{f_{i,j}\}$ è un uno-cociclo a valori in $\mathcal{F}$ definito su una famiglia finita di aperti di X.

Dicesi parallelepipedo o cubo di $\mathbb{R}^n$ un insieme D del tipo $D = \{\{x_i\} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n, a_i \leq b_i\}$.

Nel seguito di questa osservazione supporremo sia $X \subset \mathbb{R}^n$, $p : \mathcal{F} \longrightarrow X$ un fascio di gruppi: chiederemo inoltre che sui gruppi delle sezioni di $\mathcal{F}$ sia definita una topologia compatibile.

Siano D_1, D_2 due parallelepipedi di egual dimensione aventi una faccia in comune e tali che $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \emptyset$.

Diremo che la coppia $(X, \mathcal{F})$ soddisfa al teorema delle matrici olomorfe invertibili se, comunque si fissi un intorno U di $D_1 \cap D_2 \cap X$, un fascio $\mathcal{F}'$ localmente simile ad $\mathcal{F}$ avente per base un intorno di $(D_1 \cup D_2) \cap X$, una sezione $F_0 \in \Gamma_U(\mathcal{F}')$ omotopa alla sezione identità esistono due sezioni F_1, F_2 di $\mathcal{F}'$, definite su due intorni di $D_1 \cap X$, $D_2 \cap X$ ed omotope alle sezioni identità, tali che, ove le sezioni sono definite si abbia $F_0 = F_1 \cdot F_2^{-1}$.

Dati due fasci di gruppi $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ di base X, soddisfacenti alle condizioni 1⁰) e 2⁰) riportate all'inizio del paragrafo 1, ad ogni fascio $\mathcal{F}_2' = \mathcal{F}_2^{(f_i, j)}$ localmente simile ad $\mathcal{F}_2$ faremo corrispondere il fascio $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_1^{(f_i, j)}$.

Diremo che $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$ sono omotopicamente equivalenti se per ogni parallelepipedo D di $\mathbb{R}^n$ esiste un sistema fondamentale di intorni $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ di $D \cap X$ in X tali che per ogni fascio $\mathcal{F}_2'$, localmente simile ad $\mathcal{F}_2$, e definito su un intorno di $D \cap X$ le applicazioni naturali (indotte cioè all'immersione $\mathcal{F}_2' \longrightarrow \mathcal{F}_1'$) : $\pi(\Gamma_{V_\lambda}(\mathcal{F}_2')) \longrightarrow \pi(\Gamma_{V_\lambda}(\mathcal{F}_1'))$, $\lambda \in \Lambda$, sono bigettive.

Sia $p : \mathcal{F} \longrightarrow X$ un fascio di gruppi, diremo che $\mathcal{F}$ è debolmente fine se:

dato un fascio $\mathcal{F}' \longrightarrow U$, localmente simile ad $\mathcal{F}$, ed una sezione γ di $\mathcal{F}'$ omotopa alla sezione identità e definita su un chiuso di U, allora γ è restrizione di una sezione di γ' definita su U.

Diremo suddivisione cubica di X ogni famiglia finita $\{D_i\}_{i \in K}$ di chiusi di X tale che:

i) ogni D_i è intersezione di un parallelepipedo D_i' di $\mathbb{R}^n$ con X

ii) tutti i D_i' hanno dimensione n e risulta $\mathring{D}_i' \cap \mathring{D}_j' = \emptyset$ se $i \neq j$.

iii) $D' = \bigcup_{i \in K} D_i'$ è un parallelepipedo di $\mathbb{R}^n$.

Con la terminologia ora introdotta i lemmi 1 e 2 si possono così rienunciare:

LEMMA 1'. *Sia $\{D_i\}_{i \in K}$ una suddivisione cubica di X; supponiamo:*

α) La coppia $(X, \mathcal{F}_2)$ soddisfi al teorema delle matrici olomorfe invertibili

β) $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$ siano omotopicamente equivalenti, allora la situazione $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \{D_i\}_{i \in K}\}$ è coomologicamente iniettiva.

LEMMA 2'. *Sia $\{D_i\}_{i \in K}$ una suddivisione cubica di X supponiamo valgano le ipotesi α), β) del lemma 1' ed in più:*

γ) $\mathcal{F}_1$ sia debolmente fine

allora la situazione $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \{D_i\}_{i \in K}\}$ è coomologicamente surgettiva.