ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. TOGNOLI

Errata-Corrige : « Sulla classificazione dei fibrati analitici reali »

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 1 (1968), p. 159-161

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_1_159_0>

A. TOGNOLI: « *Sulla classificazione dei fibrati analitici reali* ». « Annali della scuola Normale Superiore di Pisa » Vol. XXI fasc. IV pagg. 709-744.

ERRATA CORRIGE

Il punto 3 della dimostrazione della proposizione 2 di pag. 740 non è corretto, si sostituisca pertanto detta proposizione con la seguente (lasciando invariato tutto il resto):

PROPOSIZIONE 2'. *Sia V uno spazio analitico reale coerente ogni componente connessa del quale abbia dimensione finita ed L^* un gruppo di Lie reale, complessificabile, allora $\theta : \mathcal{B}_a^* (V, L^*) \longrightarrow \mathcal{B}_c^* (V, L^*)$ è iniettiva.*

PROVA. 1) Ripetendo gli argomenti del teorema 11 di [5] si prova che basta dimostrare che un fibrato analitico reale (F, π, V, L^*, L^*) che sia topologicamente banale è anche analiticamente banale.

Dimostriamo tale fatto nel caso in cui V sia una varietà analitica reale. Essendo F un fibrato principale basta provare che F ha una sezione analitica (vedi ad esempio H. Cartan « Espaces fibrés analityques » Symposium internacional de topologia algebraica Mexico 1958). Per ipotesi F ha una sezione continua.

Per quanto provato in [9] ogni sezione continua $\gamma : V \longrightarrow F$ si può approssimare con sezioni C^∞, possiamo dunque supporre γ sia C^∞.

Per i noti teoremi di immersione F e V si possono identificare a due sottovarietà analitiche di $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ ed in $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ esistono due intorni U_F, U_V di F, V e due retrazioni analitiche $q : U_F \longrightarrow F$, $q' : U_V \longrightarrow V$.

Si possono applicare gli argomenti della proposizione II 15.4 del libro « Analysis on real and complex manyfolds » di R. Narasimhan, e dedurre, che, per i risultati di [15], esiste un'applicazione analitica $\gamma' : V \longrightarrow F$ tale che:

Pervenuto alla Redazione il 2 Marzo 1968.

γ' è un'immersione analitica e $\Delta = p \circ \gamma' : V \to V$ è un omeomorfismo analitico insieme al suo inverso.

L'applicazione $\gamma'' = \gamma' \circ \Delta^{-1}$ è evidentemente una sezione analitica (e può essere scelta arbitrariamente vicina a γ).

2) Sia V un insieme analitico reale coerente di un aperto di $\mathbb{R}^n$. Se F è topologicamente banale e, come fibrato analitico, è restrizione di un fibrato analitico definito su un aperto U_V di $\mathbb{R}^n$, $U_V \supset V$, allora F è analiticamente banale.

Sia infatti U_V' un intorno aperto di V in U_V che sia contrattile su V; l'estensione $\widehat{F}$ di F ad U_V' è topologicamente banale (vedi [9]) perciò, per quanto provato nel punto 1) $\widehat{F}$, e quindi F, è analiticamente banale.

3) Dimostriamo che, nelle ipotesi del punto 2), se il fibrato F ammette un atlante di due sole carte allora è restrizione, come fibrato analitico, di un fibrato analitico reale definito su un intorno di V in $\mathbb{R}^n$.

Siano U_1, U_2 le due carte V e $g_{1,2} : U_1 \cap U_2 \to L^*$ un cociclo che individua F; L^* è una varietà analitica reale si può perciò ragionare come nel teorema 4 e concludere che esiste un intorno aperto $\widehat{U}_{1,2}$ di $U_1 \cap U_2$ in $\mathbb{R}^n$ ed un'estensione analitica $\widehat{g}_{1,2} : \widehat{U}_{1,2} \to L^*$ di $g_{1,2}$.

Siano $\widehat{U}_1$, $\widehat{U}_2$ due intorni di U_1, U_2 in $\mathbb{R}^n$ tali che $\widehat{U}_1 \cap \widehat{U}_2 \subset \widehat{U}_{1,2}$. È ora immediato costruire, usando il cociclo $\widehat{g}_{1,2}$, un fibrato analitico di base $\widehat{U}_1 \cup \widehat{U}_2$ che estende F.

4) Dimostriamo ora che, nelle ipotesi in cui V sia un insieme analitico reale coerente di un aperto di $\mathbb{R}^n$, F è analiticamente banale. La dimensione di V è non superiore ad n perciò ogni fibrato su V ha un atlante con non più di $n+1$ carte (le carte in generale non sono definite su dei connessi di V).

Dimostriamo la proposizione per induzione sul numero delle carte necessarie per avere un atlante di F.

Sia dunque provata la proposizione per tutti i fibrati aventi atlanti di l carte (analitiche) e sia $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato topologicamente banale munito di un atlante di $l+1$ carte (analitiche) definite sugli aperti $U_1, \dots, U_l, U_{l+1}$ di V. Il fibrato ottenuto restringendo F alla base $U = \bigcup_{i=1}^{l} U_i$ è topologicamente banale e, per l'ipotesi di induzione, è analiticamente banale. Ne segue che F ha un atlante avente due sole carte e quindi per quanto provato in 3) è analiticamente banale.

5) Dimostriamo ora il caso generale, possiamo supporre V connesso esiste quindi (vedi [12]) un'applicazione analitica, iniettiva, propria $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(V)$ è un insieme analitico reale coerente di $\mathbb{R}^n$ e φ, ristretta all'insieme $V - S$ dei punti regolari di V è un isomorfismo.

Se esiste un atlante del fibrato F le cui carte si intersecano solo nei punti regolari di V, allora, essendo φ_{V-S} un isomorfismo, esiste un fibrato analitico $F' \xrightarrow{\pi'} \varphi(V)$ tale che $F = \varphi^*(F')$ ed F' è topologicamente banale. Per il punto 4) F', e quindi F, è allora analiticamente banale.

In [10], lemma 9, si è provato che l'insieme S dei punti singolari di V è un insieme analitico reale di V di codimensione almemo uno. Ricordiamo il seguente criterio (dello Jacobiano): sia $x \in S$, U_x' una realizzazione di un intorno U_x di x in V in un aperto U di $\mathbb{R}^t$ ed $f_1, \dots, f_s$ delle funzioni analitiche su U che generino il fascio dei germi delle funzioni nulle su U_x' in ogni $z \in U$.

Allora $y \in U_x'$ è singolare se, e solo se, il rango della matrice jacobiana delle $f_1, \dots f_s$ non è costante in nessun intorno di y.

Dal criterio ora esposto è immediato che S è coerente.

Da quanto detto si deduce che, se dal fatto che il fibrato $\pi^{-1}(S)$ è analiticamente banale segue che esiste un intorno U_S di S in V tale che $\pi^{-1}(U_S)$ sia analiticamente banale allora, prendendo l'atlante $S - V$, U_S, si prova che F è analiticamente banale. In questa ipotesi si può ragionare per induzione sulla dimensione di V e provare la proposizione.

Per quanto visto nel punto 1) basta perciò dimostrare che data una sezione analitica $\gamma : S \longrightarrow F$ esiste un'estensione analitica γ' ad un intorno di S in V.

Sia $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, L^*, L^*)$ una complessificazione di F, $\widetilde{S}, \widetilde{S} \subset \widetilde{V}$, una complessificazione di S e $\widetilde{\gamma} : \widetilde{S} \longrightarrow \widetilde{F}$ un'estensione di γ. (*)

Per il teorema 1 bis del citato lavoro di H. Cartan esiste un'estensione olomorfa $\widetilde{\gamma}'$ di $\widetilde{\gamma}$ ad un intorno $\widetilde{U}$ di $\widetilde{S}$ in $\widetilde{V}$.

Su $\widetilde{F}$ esiste una metrica che ristretta alle fibre è analitica reale (si immerga analiticamente $\widetilde{F}$ in $\mathbb{R}^S$ e si rimonti la metrica euclidea di $\mathbb{R}^S$), quindi per ogni $x \in V$ esiste un intorno W_x di $\pi^{-1}(x) = \widetilde{\pi}^{-1}(x) \cap F$ in $\widetilde{\pi}^{-1}(x)$ ed una retrazione analitica $q_x : W_x \longrightarrow \pi^{-1}(x)$.

La metrica può essere scelta in modo che esista un intorno U_F di F in $\widetilde{F}$ ed una retrazione analitica $q : U_F \longrightarrow F$ tale che $q|_{\widetilde{\pi}^{-1}(x)} = q_x$.

La sezione $\gamma' = q \cdot \widetilde{\gamma}'$ è un'estensione analitica di γ e la proposizione è così completamente dimostrata.

L'autore ringrazia il prof. R. Narasimhan che gli ha comunicato il teorema di approssimazione delle sezioni di un fibrato analitico reale usato nel punto 1) della proposizione 2'.

(*) Per i punti 1) e 2) della proposizione 2 $\widetilde{F}$ si può supporre olomorficamente banale.