ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

P. MUSTATĂ

Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire parabolique du second ordre

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 4 (1967), p. 507-526
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_507_0>

UN THÉORÈME D'UNICITÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'EQUATION LINÉAIRE PARABOLIQUE DU SECOND ORDRE

par P. MUSTAȚĂ

Dans ce travail on donne l'extension à l'équation

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

où les coefficients a, b et c satisfont aux conditions I, II, III, de la méthode de réflexion imaginée par M. Nicolescu [4] dans l'étude de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1'}$$

et on utilise cette extension pour l'étude de l'unicité du problème de Cauchy pour (1').

Dans le cas particulier de l'équation de la propagation de la chaleur (1'), M. Picone [5] et puis A. Tihonov [8] et M. Nicolescu [4] ont démontré que dans la classe des fonctions u qui admettent deux nombres positifs K et C, tels que

$$|u(x, t)| \leq C \exp(Kx^2) \text{ si } (x, t) \in \Delta_T,$$

$$\Delta_T = \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty,\ 0 < t < T\}$$

le problème de Cauchy a une solution au plus dans la couche Δ_T.

Pervenuto alla Redazione il 23 Marzo 1967.

Ce résultat a été étendu par M. Krsyzański [3] a l'équation parabolique linéaire sous l'hypothèse que les coefficients de l'équation

$$(1'') \qquad \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X)\, u''_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k(t, X)\, u'_{x_k} + c(t, X)\, u - u'_x = 0$$

satisfont aux conditions

$$|a_{ij}(t, X)| \leq A_0, \quad |b_k(t, X)| \leq A_1 |X| + B_1 \qquad (i, j, k = 1, 2, \dots, m)$$

$$C(t, X) \leq A_2 |X|^2 + B_2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < T, \quad X \in E_m$$

A_0, A_1, B_1, B_2 étant des nombres positifs et Em l'espace euclidien m-dimensionnel.

Les résultats de ce travail sont fondés sur ce théorème.

D'autre part, D. Widder [9] a démontré que toute solution de l'équation (1′) régulière et non négative dans Δ_T s'annulant pour $t = 0$, est nulle dans Δ_T. Ce résultat a été étendu à l'équation (1″) successivement par I. Serrin [7] et A. Friedman [1]., P. Besala et M. Krzyzański [2] ont démontré un théorème concernant l'unicité de la solution du problème de Cauchy de l'équation (1″) dans la classe des fonctions u qui admettent deux nombres positifs K et C tel que

$$u(t, X) \geq -C \exp(K|X|^2) \qquad 0 \leq t \leq T, \ X \in E_m$$

En outre M. Nicolescu et C. Foias [5] ont démontré l'unicité de la solution régulière de l'équation (1′), dans la classe des fonctions vérifiant une condition du type:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T u_-(x, t) \exp\cdot(Kx^2)\, dx\, dt < C$$

où

$$u_-(x, t) = \max\{-u(x, t), 0\}, \qquad 0 \leq K < \frac{1}{4T}.$$

Dans la note présente nous allons démontrer un théorème (théorème 2) concernant l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation (1) dans la classe des fonctions u qui vérifient cette dernière condition, c'est-à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T u_-(x, t) \exp(Kx^2)\, dx\, dt < C$$

où K et C sont des nombres positifs dépendant de u.

En fait on démontre (lemme 2) que la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} u_{-}(x, t) \exp(Kx^2)\, dx\, dt < C.$$

entraîne une limitation du type suivant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T'} | u(x, t) | \exp(K'x^2)\, dx\, dt < C \qquad (0 < T' < T, K' > 0)$$

L'unicité découle comme una conséquence immédiate.

1. On considère l'équation linéaire parabolique homogène

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

dont les coefficients sont functions réelles définies dans $\bar{\Delta}_T$, Δ_T étant le domaine

$$\Delta_T = \{(x, t) \mid x \in (-\infty, +\infty), 0 < t < T\}, \qquad T > 0.$$

Nous supposons que les coefficients de l'équation (1) satisfont dans Δ_T aux conditions suivants (1) :

I. $a \in \mathcal{C}^2(\Delta_T) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Delta}_T)$. $b \in \mathcal{C}^1(\Delta_T) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Delta}_T)$, $c \in \mathcal{C}^0(\bar{\Delta}_T)$,

II. il existe deux nombres $\sigma > 0$ et $A > 0$ tels que

$$\sigma \leq a(x, t) \leq A, \qquad \left| \frac{\partial a}{\partial t}(x, t) \right| \leq A,$$

$$| b(x, t) | + \left| \frac{\partial a}{\partial x}(x, t) \right| + \left| \frac{\partial b}{\partial t}(x, t) \right| + \left| \frac{\partial^2 a}{\partial x\, \partial t}(x, t) \right| \leq A(| x | + 1),$$

III. il existe deux nombres positifs α et M tels que $\alpha \leq 1$ et pour (x, t), $(y, \tau) \in \Delta_T$ on a

$$| a(x, t) - a(y, \tau) | \leq M(| x - y |^{\alpha} + | t - \tau |^{\frac{\alpha}{2}}).$$

---

(1) Où $\mathcal{C}^k(x)$ $(k = 1, 2, \dots,)$ désignera, comme d'habitude, l'espace des fonctions k-fois continûment différentiables sur le sous-ensemble X ouvert ou fermé d'un espace euclidien.

Nous disons que u est une solution régulière de léquation (1) dans Δ_T si $u \in \mathcal{C}^2(\Delta_T) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Delta}_T)$ et il satisfait à l'équation (1) dans Δ_T.

LEMME 1. *On suppose que*

(i) *u est une solution régulière dans Δ_T de l'équation* (1),

(ii) $$u(x, 0) = 0,$$

(iii) *il existe deux nombres $C \geq 0$ et $K \geq 0$ tels que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T \exp(-kx^2) \, | u(x, t) | \, dx \, dt \leq C.$$

Alors il existe deux nombres positifs K' et C' tels que

$$| u(x, t) | \leq C' \exp(K' x^2) \text{ pour } (x, t) \in \Delta_{T'} \left(T' = \frac{1}{9AK}\right).$$

Soient $x, x_1, x_2, X, t, \varepsilon$ des nombres réels tels que

$$x_1 < x_2, \quad 0 < t < T, \quad 0 < \varepsilon < t.$$

On considère la fonction

$$E(X, x, t, y, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(x, t)}} (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(X - y)^2}{4a(x, t)(t - \tau)}\right).$$

En intégrant par parties le membre gauche de l'égalité

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_0^{t-\varepsilon} E(X, x, t, y, \tau) \left[a(y, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, \tau) + b(y, \tau) \frac{\partial u}{\partial y}(y, \tau) + \right.$$

$$\left. + c(y, \tau) u(y, \tau) - \frac{\partial u}{\partial \tau}(y, \tau) \right] dy \, d\tau = 0$$

et en faisant $\varepsilon \to 0$ on obtient la relation

$$F(X, x_1, x_2, x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{si } X = x \text{ et } x \in (x_1, x_2) \\ 0 & \text{si } X \bar{\in} [x_1, x_2] \end{cases} \tag{2}$$

où

$$F(X, x_1, x_2, x, t) = A(X, x_1, x_2, x, t) + B(X, x_1, x_2, x, t) + C(X, x_1, x_2, x, t)$$

$$A(X, x_1, x_2, x, t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{(x_2 - X)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right) \cdot \tilde{a}(x_2, x, t, \tau)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t \exp\left(-\frac{(x_1 - X)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right) \cdot \tilde{a}(x_1, x, t, \tau)\, d\tau,$$

$$B(X, x_1, x_2, x, t) = \int_0^t (x_2 - X) \exp\left(-\frac{(x_2 - X)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right) \tilde{b}(x_2, x, t, \tau)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t (x_1 - X) \exp\left(\frac{(x_1 - X)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right) \tilde{b}(x_1, x, t, \tau)\, d\tau,$$

$$C(X, x, x, x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t u(y, \tau) \exp\left(-\frac{(y - X)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right) \tilde{c}(X, x, t, y, \tau)\, dy\, d\tau,$$

$$\tilde{a}(z, x, t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(x, t)(t-\tau)}} \left[a(z, \tau) \frac{\partial u}{\partial y}(z, \tau) - \frac{\partial a}{\partial y}(z, \tau)\, u(z, \tau) + b(z, \tau)\, u(z, \tau)\right],$$

$$\tilde{b}(z, x, t, \tau) = \frac{a(z, \tau)\, u(z, \tau)}{4\sqrt{\pi}\,(a(x, t)(t-\tau))^{3/2}},$$

$$\tilde{c}(X, x, t, y, \tau) = \frac{1}{4} \frac{a(y, \tau) - a(x, t)}{(a(x, t)(t-\tau))^{5/2}} (y - X)^2 + \frac{1}{2} \frac{b(y, \tau) - 2\dfrac{\partial a}{\partial y}(y, \tau)}{(a(x, t)(t-\tau))^{3/2}} (y - X) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{a(x, t) - a(y, \tau)}{(a(x, t)(t-\tau))^{3/2}} + \frac{\dfrac{\partial^2 a}{\partial y^2}(y, \tau) - \dfrac{\partial b}{\partial y}(y, \tau) + c(y, \tau)}{(a(x, t)(t-\tau))^{1/2}}.$$

Les conditions I et III assurent la convergence absolue des intégrales qui figurent dans (2).

Si G est une fonction définie sur l'espace euclidien E_5, pour chaque membre réel positif r nous désignons par $L_r G$, la fonction définie sur l'espace euclidien E_2 ainsi que

$$L_r\, G(x, t) = G(x, x-r, x+r, x, t) - G(x+2r, x-r, x+r, x, t) +$$
$$+ G(x, x-2r, x-r, x, t) - G(x-4r, x-2r, x-r, x, t) +$$
$$+ G(x, x-r, x+r, x, t) - G(x-2r, x-r, x+r, x, t) +$$
$$+ G(x, x+r, x+2r, x, t) - G(x+4r, x+r, x+2r, x, t).$$

Il résulte de (2) la relation

$$2u(x, t) = L_r\, F(x, t) = L_r\, A(x, t) + L_r\, B(x, t) + L_r\, C(x, t). \tag{3}$$

On obtient sans difficulté les relations

$$L_r\, A(x, t) = 0 \tag{4}$$

$$L_r\, B(x, t) = \int_0^t E_1(r, x, t, \tau)\,[\tilde{b}(x-r, x, t, \tau) + \tilde{b}(x+r, x, t, \tau)]\, d\tau + \tag{4'}$$
$$+ \int_0^t E_2(r, x, t, \tau)\,[\tilde{b}(x-2r, x, t, \tau) + \tilde{b}(x+2r, x, t, \tau)]\, d\tau$$

$$E_1(r, x, t, \tau) = 2r\left[\exp\left(-\frac{r^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right) - 3\exp\left(-\frac{9r^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right)\right],$$

$$E_2(r, x, t, \tau) = 4r\exp\left(-\frac{4r^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right),$$

$$L_r\,(C(x, t) = \sum_{j=1}^{8} I_j(r, x, t) \tag{4''}$$

où

$$I_1(x, t) = I_5(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x-r}^{x+r}\int_0^t u(y, \tau)\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right)\tilde{c}(x, x, t, y, \tau)\, dy\, d\tau,$$

$$I_2(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x-r}^{x+r}\int_0^t u(y, \tau)\exp\left(-\frac{(y-x-2\pi)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right)\cdot\tilde{c}(x+2r, x, t, y, \tau)\, dy\, d\tau,$$

$$I_3(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x-2r}^{x-r}\int_0^t u(y, \tau)\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right)\cdot\tilde{c}(x, x, t, y, \tau)\, dy\, d\tau,$$

$$I_4(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x-2r}^{x-r}\int_0^t u(y, \tau)\exp\left(\frac{(y-x+4r)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right)\tilde{c}(x-4r, x, t, y, \tau)\, dy\, d\tau,$$

$$I_6(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x-r}^{x+r} \int_0^t u(y, \tau) \exp\left(-\frac{(y-x+2r)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right) \tilde{c}(x-2r, x, t, y, \tau)\, dy\, d\tau,$$

$$I_7(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x+r}^{x+2r} \int_0^t u(y, \tau) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right) \tilde{c}(x, x, t, y, \tau)\, dy\, d\tau,$$

$$I_8(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x+r}^{x+2r} \int_0^t u(y, \tau) \exp\left(-\frac{(y-x-4r)^2}{4a(x, t)(t-\tau)}\right) \tilde{c}(x+4r, t, y, \tau)\, dy\, d\tau.$$

Pour $r > AT$ et $t < T'$, $T' = \dfrac{1}{9\,AK}$ on a

$$0 < E_1(r, x, t, \tau) < 2r \exp\left(-\frac{r^2}{4A(t-\tau)}\right)$$

$$|L_r B(x,t)| \leq \frac{A}{4\sqrt{\pi}\,\sigma^{3/2}} \int_0^t \frac{2r}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4A(t-\tau)}\right) [|u(x-r,\tau)| + |u(x+r,\tau)|]\, d\tau +$$

$$+ \frac{A}{4\sqrt{\pi}\,\sigma^{3/2}} \int_0^t \frac{4r}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{4r^2}{4A(t-\tau)}\right) [\,|u(x-2r,\tau)| + |u(x+2r,\tau)|\,]\, d\tau,$$

$$\int_1^\infty |L_r B(x, t)|\, dr \leq \frac{A}{\sqrt{\pi}\,\sigma^{3/2}} \int_0^t \int_{|y-x|>1} \frac{|y-x|}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4A(t-\tau)}\right) |u(y, \tau)|\, d\tau\, dy \leq$$

$$\leq \frac{A}{\sqrt{\pi}\,\sigma^{3/2}} \int_0^t \int_{|y-x|>1} |u(y, \tau)| \exp(-Ky^2) \cdot \exp\left(Ky^2 - \frac{(y-x)^2}{4A(t-\tau)}\right) \cdot \frac{|y-x|}{(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau\, dy \leq$$

$$\leq \frac{8A^2\, CC_1}{\sqrt{\pi}\,\sigma^{3/2}} \exp(9kx^2)$$

où C_1 est une constante telle que

$$|x|^3 \exp(-x^2) < C_1.$$

On déduit qu'il existe une suite $\{r_n\}_{n=1, \ldots}$ telle que

(5) $$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} L_{r_n} B(x, t) = 0 .$$

Comme d'autre part, pour $0 < t < T'$ on a

$$\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4a(x,t)(t-\tau)}\right)|\tilde{c}(x, x, t, y, \tau)| \leq$$
$$\leq C(x^2+1)\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{8A(t-\tau)}\right) \text{ pour } |y-x| \geq 1$$

et

$$\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4a(x,t)(t-\tau)}\right)|\tilde{c}(x, x, t, y, \tau)| \leq C_2(x^2+1)(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}} \cdot$$
$$\cdot \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{8A(t-\tau)}\right)$$

pour $|y-x|<1$, où C_2 est une constante qui dépend seulement de σ, A, M et K, il s'ensuit de (iii) que pour $t < T'$ l'intégrale

$$I(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t u(y,\tau)\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4a(x,t)(t-\tau)}\right)\tilde{c}(x, x, t, y, \tau)\, dy\, d\tau$$

est absolument convergente.

Il découle d'ici que

$$\lim_{r\to\infty} I_j(r, x, t) = I(x, t) \quad \text{pour } j = 1,5$$

et

$$\lim_{r\to\infty} I_j(r, x, t) = 0 \qquad \text{pour } j = 3,7.$$

Puisque pour $t < T'$ on a

$$\left|\exp\left(-\frac{(y-X)^2}{4a(x,t)(t-\tau)}\right)\tilde{c}(X, x, t, y, \tau)\right| \leq$$
$$\leq \frac{C_3}{|X-y|^3}\exp\left(-\frac{(y-X)^2}{8A(t-\tau)}\right)\cdot\left[1+\frac{|y|+1}{|X-y|}+\frac{y^2+1}{|X-y|^2}\right]$$

où C_3 est une constante qui dépend seulement de σ, A et K, on en déduit aisément que

$$\lim_{n\to\infty} I_j(r, x, t) = 0 \qquad (j = 2, 4, 6, 8).$$

En faisant parcourir r les éléments d'une suite qui satisfait à la condition (5) et en tenant compte de (4) on déduit que pour $t < T'$, on a

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t u(y,\tau)\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4a(x,t)(t-\tau)}\right)\tilde{c}(x,x,t,y,\tau)\,dy\,d\tau . \tag{6}$$

Donc, en utilisant II et III, on peut écrire pour $t < T'$, l'inégalité

$$|u(x,t)| \leq C_4\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t |u(y,\tau)|\,(y^2+1)\,(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda(t-\tau)}\right)dy\,d\tau \tag{7}$$

où $4A < \lambda < 8A$ et C_4 est une constante qui dépend seulement de σ, A, M, T et K.

On peut vérifier sans peine, en faisant la substitution

$$y' = \frac{(t-\theta)\,y-(\tau-\theta)\,x-(t-\tau)\,z}{\sqrt{\lambda\,(t-\theta)\,(t-\tau)\,(\tau-\theta)}}$$

que pour $p > -\frac{3}{2}$, $q > -\frac{3}{2}$, $\theta < t < T'$, $\lambda > 0$ et n un nombre naturel on a

$$\int_\theta^t\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{\lambda(t-\tau)}\right)\cdot\exp\left(-\frac{(y-z)^2}{\lambda(\tau-\theta)}\right)(t-\tau)^p\,(\tau-\theta)^q\,|y|^n\,dy\,d\tau \leq$$

$$p_n(|x|+|y|)\exp\cdot\left(-\frac{(x-z)^2}{\lambda(t-\theta)}\right)(t-\theta)^{p+q+\frac{3}{2}}$$

où $p_n(\xi)$ est un polynôme de grade n.

En majorant $|u(y,\tau)|$ par l'expression correspondante donnée par (7) dans le membre droit de (7) on obtient

$$|u(x,t)| \leq C_3^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda(t-\tau)}\right)\cdot(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}\cdot(1+y^2)\cdot H(y,\tau)\,dy\,d\tau$$

où

$$H(y,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\tau |u(z,\theta)|\exp\left(-\frac{(y-z)^2}{\lambda(\tau-\theta)}\right)(\tau-\theta)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}(1+z^2)\,dz\,d\theta.$$

Puisque l'intégrale

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} |u(z,\theta)|(1+z^2)\left(\int_\theta^t \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda(t-\tau)}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \exp\left(-\frac{(y-z)^2}{\lambda(\tau-\theta)}\right)(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}(\tau-\theta)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}(1+y^2)\,dy\,d\tau\right)d\theta\,dz$$

$$\leq \int_0^t \int_{-\infty}^{-\infty} |u(z,\theta)| \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{\lambda(t-\theta)}\right)(t-\theta)^{2\alpha-\frac{3}{2}}(1+z^2)\,p_2(|x|+|z|)\,dz\,d\theta$$

où $p_2(\xi)$ est un polynôme de grade 2 d'une seule variable.

L'intégrale du membre droit de cette inégalité étant convergente il résulte que

$$|u(x,t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t |u(z,\theta)| \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{\lambda(t-\theta)}\right)(t-\theta)^{2\alpha-\frac{3}{2}}(x^2+1)\,p_4(z)\,dz\,d\theta$$

où $p_4(z)$ est un polinôme de grade 4.

En répétant le même procédé on obtiendra après un nombre fini de pas que

$$|u(x,t)| \leq C_5 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t |u(y,\tau)| \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda(t-\tau)}\right)(|x|+1)^m(|y|+1)^m\,dy\,d\tau \tag{8}$$

où m est un nombre natural suffisamment grand et C_4 est une constante qui ne dépend que de α, σ, A, M et K.

On déduit de (8) et de (iii) que

$$|u(x,t)| \leq C_5 \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} |u(y,\tau)| \exp(-ky^2)\,P(x,y)\,dy\,d\tau$$

où

$$P(x,y) = (1+x)^m \exp\left(Ky^2 - \frac{(y-x)^2}{8AT'}\right)\exp\left(\left(-\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{8A}\right)\frac{(y-x)^2}{T'}\right) \leq$$

$$\leq C_6(1+|x|)^{2m}\exp(9Kx^2) \leq C_7 \exp(10\,Kx^2).$$

Il en résulte que

$$|u(x, t)| \leq C' \exp(10\, Kx^2), \qquad 0 < t < T'$$

ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 1. *Nous supposons que les conditions du lemme précédent sont remplies. Alors* $u(x, t) = 0$.

Le théorème résulte immédiatement du lemme précédent et du théorème de M. Krzyzansky [3] qui assure l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations qui satisferont les conditions I et II dans la classe de fonctions qui vérifient l'inégalité

$$|u(x, t)| < C \exp(Kx^2)$$

où C et K des constantes positives, en appliquant successivement aux bandes $-\infty < x < +\infty$, $jT < t < (j+1)\, T'$ où $j = 0, 1, 2, \dots, k$, k étant un nombre tel que

$$kT' \geq T.$$

LEMME 2. *On suppose que*

(i) $b(x, t) - 2\dfrac{\partial a(x, t)}{\partial x} = 0$

(ii) $u(x, t)$ *est une solution régulière dans* Δ_T *de l'équation* (1)

(iii) *il existe deux nombres* $C \geq 0$ *et* $K \geq 0$ *tels que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T \exp(-Kx^2)\, u_-(x, t)\, dx\, dt\; C$$

où

$$u_-(x, t) = \max\{-u(x, t), 0\}.$$

Alors pour tout nombre réel ε, $0 < \varepsilon < T$, *il existe un nombre* $K' > 0$ *tel que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{T-\varepsilon} \exp(-K' x^2)\, |u(x, t)|\, dx\, dt < \infty.$$

Soient x, x_1, x_2, h et λ des nombres reéls tels que

$$x_1 < x_2, \qquad 0 < h < T,$$

$$0 < \lambda \leq \min\left\{\sigma, \frac{\sigma}{AT(1+\sigma T)}, \frac{1}{2kT}\right\}.$$

On a évidemment l'égalité

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{h}^{T} E(x,y,\tau)\left[a(y,\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y,\tau)+b(y,\tau)\frac{\partial u}{\partial y}(y,\tau)+\right.$$
$$\left.+C(y,\tau)\,u(y,\tau)-\frac{\partial u}{\partial \tau}(y,\tau)\right]dy\,d\tau=0$$

où

$$E(x,y,\tau)=(T-\tau)\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda(T-\tau)}\right).$$

En tenant compte de la condition (ii) on obtient par intégration par parties la relation

$$H_u(x,x_1,x_2)=A_u(x,x_1,x_2)+B_u(x,x_1,x_2)+C_u(x,x_1,x_2)+ \tag{9}$$
$$+D_u(x,x_1\,x_2)=0$$

où

$$A_u(x,x_1,x_2)=\int_{h}^{T} E(x,x_2,\tau)\left[\frac{\partial a}{\partial y}(x_2,\tau)\,u(x_2,\tau)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_2,\tau)\,a(x_2,\tau)\right]d\tau-$$
$$-\int_{h}^{T} E(x,x_1,\tau)\left[\frac{\partial a}{\partial y}(x_1,\tau)\,u(x_1,\tau)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_1,\tau)\,a(x_1,\tau)\right]d\tau,$$

$$B_u(x,x_1,x_2)=\frac{2}{\lambda}\int_{h}^{T}\frac{x_2-x}{T-\tau}E(x,x_2,\tau)\,a(x_2,\tau)\,u(x_2,\tau)\,d\tau-$$
$$-\frac{2}{\lambda}\int_{h}^{T}\frac{x_1-x}{T-\tau}E(x,x_1,\tau)\,a(x_1,\tau)\,u(x_1,\tau)\,d\tau,$$

$$C_u(x,x_1,x_2)=\int_{x_1}^{x_2}E(x,y,h)\,u(y,h)\,dy,$$

$$D_u(x,x_1,x_2,u)=\frac{1}{\lambda}\int_{h}^{T}\int_{x_1}^{x_2}u(y,\tau)\,S(x,y,\tau)\,dy\,d\tau$$

$$S(x,y,\tau)=(4a(y,\tau)-\lambda)\exp\left(\frac{(y-x)^2}{\lambda(T-\tau)}\right)\left[\frac{(y-x)^2}{\lambda(T-\tau)}+p(y,\tau)\right]$$

$$p(y,\tau)=\frac{\lambda(T-\tau)\left[c(y,\tau)-\dfrac{\partial^2 a}{\partial y^2}(y,\tau)\right]-2a(y,\tau)-\lambda}{4a(y,\tau)-\lambda}.$$

Si F est une fonction definie sur l'espace euclidien E_3, nous désignons par LF la fonction définie sur E_1 d'après la loi

$$LF(r) = F(0, -r, r) - F(2r, -r, r) + F(0, -2r, -r) -$$
$$- F(-4r, -2r, -r) + F(0, -r, r) - F(-2r, -r, r) +$$
$$+ F(0, r, 2r) - F(4r, r, 2r).$$

L'opération définie ci-dessus étant linéaire, on a

$$LH_u(r) = LA_u(r) + LB_u(r) + LC_u(r) + LD_u(r). \tag{9'}$$

Il est facile de vérifier les relations

$$LA_u(r) = 0 \tag{10}$$

$$LB_u(r) = \frac{8}{\lambda}\int_h^T r \exp\left(-\frac{4r^2}{\lambda(T-\tau)}\right)\cdot[a(-2r,\tau)u(-2r,\tau) + \tag{10'}$$
$$+ a(2r,\tau)u(2r,\tau)]\,d\tau + \frac{4}{\lambda}\int_h^T r\left[\exp\left(-\frac{r^2}{\lambda(T-\tau)}\right) -\right.$$
$$\left.- 3\exp\left(-\frac{9r^2}{\lambda(T-\tau)}\right)\right][a(-r,\tau)u(-r,\tau) + a(r,\tau)u(r,\tau)]\,d\tau,$$

$$LC_u(r) = (T-h)\int_{-r}^{r}\left[\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-h)}\right) - \exp\left(-\frac{(2r-y)^2}{\lambda(T-h)}\right)\right]u(y,h)dy + \tag{10''}$$
$$+ (T-h)\int_{-2r}^{-r}\left[\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-h)}\right) - \exp\left(-\frac{(4r+y)^2}{\lambda(T-h)}\right)\right]u(y,h)dy +$$
$$+ (T-h)\int_{-r}^{r}\left[\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-h)}\right) - \exp\left(-\frac{(2r+y)^2}{\lambda(T-h)}\right)\right]u(y,h)dy +$$
$$+ (T-h)\int_{r}^{2r}\left[\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-h)}\right) - \exp\left(-\frac{(4r-y)^2}{\lambda(T-h)}\right)\right]u(y,h)\,dy,$$

$$LD_u(r) = D_u^1(r) + D_u^2(r) + D_u^3(r) + D_u^4(r) \tag{10'''}$$

où

$$D_u^1(r) = \frac{1}{\lambda} \int_{-r}^{r} \int_{h}^{T} u(y, \tau) [S(0, y, \tau) - S(2r, y, \tau)] \, dy \, d\tau$$

$$D_u^2(r) = \frac{1}{\lambda} \int_{-2r}^{-r} \int_{h}^{T} u(y, \tau) [S(0, y, \tau) - S(-4r, y, \tau)] \, dy \, d\tau$$

$$D_u^3(r) = \frac{1}{\lambda} \int_{-r}^{r} \int_{h}^{T} u(y, \tau) [S(0, y, \tau) - S(-2r, y, \tau)] \, dy \, d\tau$$

$$D_u^4(r) = \frac{1}{\lambda} \int_{r}^{2r} \int_{h}^{T} u(y, \tau) [S(0, y, \tau) - S(4r, y, \tau)] \, dy \, d\tau.$$

Puisque B_u, C_u et D_u sont des formes linéaires de u si nous introduisons les notations habituelles

$$u_+(x, t) = \max(u(x, t), 0),$$

$$u_-(x, t) = \max(-u(x, t), 0),$$

en utilisant les relations (9′) et (10), on aura

(11) $$LB_{u_+}(r) + LC_{u_+}(r) + LD_{u_+}(r) = LB_{u_-}(r) + LC_{u_-}(r) + LD_{u_-}(r).$$

Pour $r > \sqrt{\lambda T}$ on a

(12) $$LB_{u_+}(r) \geq 0.$$

Puisque $\lambda < \frac{1}{2KT}$ on déduit que

(13) $$LB_{u_-}(r) \leq I(r)$$

où

$$I(r) = \frac{4A}{\lambda} \int_{0}^{T} 2r \exp(-8K r^2) [u_-(-2r, \tau) + u_-(2r, \tau)] \, d\tau +$$

$$+ \frac{4A}{\lambda} \int_{0}^{T} r \exp(-2K r^2) [u_-(-r, \tau) + u_-(r, \tau)] \, d\tau.$$

On a évidemment

$$(14) \qquad LC_{u_+}(r) \geq$$

$$\geq (T-h)\int_{-r}^{r}\left[\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-h)}\right)-\exp\left(-\frac{(2r-y)^2}{\lambda(T-h)}\right)\right]u_+(y,h)\,dy \geq$$

$$\geq (T-h)\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\left[\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-h)}\right)-\exp\left(-\frac{(2r-y)^2}{\lambda(T-h)}\right)\right]u_+(y,h)\,dy \geq$$

$$\geq (T-h)\left[1-\exp\left(-\frac{2r^2}{\lambda(T-h)}\right)\right]\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-h)}\right)u_+(y,h)\,dy$$

et

$$(15) \qquad LC_{u_-}(r) \leq 4(T-h)\int_{-2r}^{2r}\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-h)}\right)u_-(y,h)\,dy \leq$$

$$\leq 4T\int_{-2r}^{+2r}\exp(-Ky^2)\,u_-(y,h)\,dy.$$

Puisque la fonction

$$f(z) = \exp(-z)(z + p(y,\tau))$$

a la dérivée négative pour $z > |p(y,\tau)| + 1$, on déduit que pour $|p(y,\tau)| + 1 \leq z_1 \leq z_2$ on a

$$f(z_1) - f(z_2) > 0.$$

On a évidemment

$$|p(y,\tau)| \leq C_1(y^2+1), \qquad C_1 = \frac{A(T\sigma+1)}{\sigma}.$$

Il résulte que pour

$$|y'| \geq |y| \geq r_0 = \sqrt{\frac{\lambda T(1+C_1)}{1-\lambda T C_1}}$$

on a

$$\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-\tau)}\right)\left[\frac{y^2}{\lambda(T-\tau)}+p(y,\tau)\right]\geq$$

$$\exp\left(-\frac{y'^2}{\lambda(T-\tau)}\right)\left[\frac{y'^2}{\lambda(T-\tau)}+p(y,\tau)\right].$$

Il découle d'ici que pour $r\geq r_0$ on aura

$$D^2_{u_+}(r)\geq 0,\quad D^4_u(r)\geq 0$$

$$D^1_{u_+}(r)\geq\frac{1}{\lambda}\int_{-r_0}^{r_0}\int_0^T u_+(y,\tau)\,[S(0,y,\tau)-S(2r,y,\tau)]\,dy\,d\tau$$

$$D^3_{u_+}(r)\geq\frac{1}{\lambda}\int_{-r_0}^{r_0}\int_0^T u_+(y,\tau)\,[S(0,y,\tau)-S(-2r,y,\tau)]\,dy\,d\tau$$

donc, si nous désignons par U la borne supérieure de la fonction $|u|$ sur l'ensemble $|x|\leq r_0$, $0\leq t\leq T$ on déduit que

$$D_{u_+}(r)\geq-\frac{U_0}{\lambda}\int_{-r_0}^{r_0}\int_0^T(|S(0,y,\tau)|+|S(2r,y,\tau)|+|S(-2r,y,\tau)|)\,dy\,d\tau \tag{16}$$

$$\geq-\frac{U_0}{\lambda}C_2$$

où C_2 est une constante convenablement choisie.

Pour $r\geq r_0$ on déduit que

$$LD_{u_-}(r)\leq\frac{16\,A}{\lambda}\int_{-2r}^{2r}\int_0^T u_-(y,\tau)\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-\tau)}\right)\left[\frac{y^2}{\lambda(T-\tau)}+\right. \tag{17}$$

$$\left.+\,C_1(y^2+1)\right]dy\,d\tau\leq\frac{16\,A}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T u_-(y,\tau)\exp(-Ky^2)\,\cdot$$

$$\cdot\exp\left(Ky^2-\frac{y^2}{\lambda(T-\tau)}\right)\left[\frac{y^2}{\lambda(T-\tau)}+C_1(y^2+1)\right]dy\,d\tau\leq\frac{16\,A}{\lambda}CC_3$$

où C_3 est une constante telle que pour touts y, τ, $y \in (-\infty, +\infty)$ et $\tau \in [0, T]$ on a

$$\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-r)}+Ky^2\right)\left[\frac{y^2}{\lambda(T-\tau)}+C_1(y^2+1)\right]<C_3 .$$

Puisque

$$\int_0^\infty I(r)\,dr=\frac{4A}{\lambda}\int_0^\infty\int_0^T 2r\exp(-8Kr^2)\,[u_-(-2r,\tau)+u_-(2r,\tau)]\,dr\,d\tau+$$

$$+\frac{4A}{\lambda}\int_0^\infty\int_0^T r\exp(-2Kr^2)\cdot[u_-(-r,\tau)+u_-(r,\tau)]\,drd\tau\leq$$

$$\leq\frac{8A}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T|y|\exp(-2Ky^2)\,u_-(y,\tau)\,dyd\tau\leq\frac{8A}{\lambda}\,CC_4$$

(où C_4 est une constante telle que $|y|\,e^{-Ky^2}<C_4$), on déduit l'existence d'une suite $\{r_n\}_{n=1,2,\ldots}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} I(r_n)=0. \tag{18}$$

En tenant compte de la relation (11) et des inégalités (12), (13), (14), (15), on déduit

$$T-h)\left[1-\exp\left(-\frac{2r^2}{\lambda(T-h)}\right)\right]\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda(T-h)}\right)u_+(y,h)\,dy\leq$$

$$\leq C_5+I(r)+4T\int_{-2r}^{2r}\exp(-Ky^2)\,u_-(y,h)\,dy$$

$$\left(C_5=\frac{16\,A}{\lambda}\,CC_3+\frac{U_0}{\lambda}\,C_2\right).$$

Pour $0<h<T-\varepsilon$, il est valable l'inégalité

$$\varepsilon\left[1-\exp\left(-\frac{2r^2}{\lambda T}\right)\right]\int_0^{T-\varepsilon}\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\exp\left(-\frac{y^2}{\lambda\varepsilon}\right)u_+(y,h)\,dy\,dh\leq \tag{19}$$

$$\leq C_5\,T+TI(r)+\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-Ky^2)\,u_-(y,h)\,dy\,dh\leq C_5\,T+TI(r)+C.$$

En faisant r parcourir une suite qui satisfait à (18) on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{T-\varepsilon}\exp\left(-K'\, y^2\right) u_{+}(y,t)\, dy\, dt < \infty \left(K' = \frac{1}{\lambda\varepsilon}\right)$$

et en conséquence

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{T-\varepsilon}\exp\left(-K'\, y^2\right) |\, u(y,t)\,|\, dy\, dt < \infty .$$

COROLLAIRE. *La conclusion du lemme reste valable sans supposer que la condition* (i) *est satisfaite.*

On considère la fonction

$$v(x,t) = u(x,t)\exp\left(\varphi(x,t)\right);\ \varphi(x,t) = \int_0^x \frac{b(y,t) - 2\,\dfrac{\partial a}{\partial y}(y,t)}{2a(y,t)}\, dy\, .$$

La fonction $v(x,t)$ vérifie l'équation

$$A(x,t)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + B(x,t)\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) + C(x,t)\, v(x,t) - \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = 0$$

où

$$A(x,t) = a(x,t)$$

$$B(x,t) = b(x,t) - 2a(x,t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = 2\,\frac{\partial a}{\partial x}(x,t)$$

$$C(x,t) = c(x,t) - b(x,t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) - a\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) + a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t).$$

On peut vérifier immédiatement l'inégalités

$$|\,\varphi(x,t)\,| \leq \frac{3A}{\sigma}\left(|\,x\,|^2 + 1\right);\ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| < \frac{3A}{2\sigma}\left(|\,x\,| + 1\right);\ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\right| < \frac{6A^2}{\sigma^2}\left(x^2 + 1\right)$$

$$\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| < \frac{3A^2}{\sigma^2}\left(|\,x\,|^2 + 1\right)$$

et le fait que les coefficients A, B et C satisfont aux conditions I et II.

Puisque

$$v_{-}(x,t) = u_{-}(x,t)\ \exp\ \left(\varphi(x,t)\right),$$

pour $K' = K + \dfrac{3A}{\sigma}$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T v_-(x, t) \exp(-K' x^2)\, dx\, dt \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T \exp\left[-\left(K + \frac{3A}{\sigma}\right) x^2\right] \cdot \exp\left[\frac{3A}{\sigma}(x^2+1)\right] u_-(x, t)\, dx\, dt \leq$$

$$\leq \exp\frac{3A}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T \exp(-Kx^2) \cdot u_-(x, t)\, dx\, dt \leq C \exp\left(\frac{3A}{\sigma}\right),$$

on déduit du lemme précedent que pour un nombre donné T', $0 < T' < T$, il existe deux nombres positifs K_1 et C_1 tels que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{T'} |v(x, t)| \exp(-K_1 x^2)\, dx\, dt \leq C_1 .$$

Pour $K_2 = K_1 + \dfrac{3A}{\sigma}$ on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{T'} \exp(-K_2 x^2) |u(x, t)|\, dx\, dt \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{T'} \exp\left(-\left(K_1 + \frac{3A}{\sigma}\right) x^2\right) \exp\left(\frac{3A}{\sigma}(x^2+1)\right) |v(x, t)|\, dx\, dt \leq$$

$$\leq \exp\left(\frac{3A}{\sigma}\right) \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{T'} \exp(-K_1 x^2) |v(x, t)|\, dx\, dt < C_1 \exp\left(\frac{3A}{\sigma}\right).$$

THÉORÈME 2. *L'unicité des solutions du problème de Cauchy pour l'équation* (1) *dans Δ_T a lieu dans la classe des fonctions verifiant l'inégalité*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{T'} \exp(-Kx^2) u_-(x, t)\, dx\, dt < C$$

où K et C sont constantes positives dépendant de u.

Le théorème est une conséquence du corollaire du lemme 2 et du théorème 1.

Bucarest, Institut de Mathématiques

LITTÉRATURE

[1] A. FRIEDMAN : *Partial differential equations of parabolic type* (Prentice - Hall, 1964).

[2] P. BESALA - M. KRZYŻAŃSKI : *Un théorème d'unicité de la solution du probléme de Cauchy pour l'équation linéaire normale parabolique du second ordre,* Rend. Acad. Naz. Dei Lincei, **33**, fasc. 5, 231-236 (1962).

[3] M. KRZYŻAŃSKI : *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale,* Bull. de l'Acad. Polon. des Sciences, Ser. math., astr. et. phys., **7**, nr. 3, 131-135 (1959).

[4] M. NICOLESCU : *Sur l'équation de la chaleur,* Comentarii Math. Helv, **10**, 3-17 (1937).

[5] M. NICOLESCU et C. FOIAS : *Représentation de Poisson et problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur,* Rend. Acad. Naz. Dei Lincei, **38**, fasc. 4, 465-476 (1965), **38**, fasc. 5, 621-626 (1965) ; **40**, fasc. 5, 785-791 (1966).

[6] M. PICONE : *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera, conduttore, isotropo e omogeneo,* Math. Annalen, **10**, 701-712 (1929).

[7] J. B. SERRIN : *A uniqueness Theorem for the parabolic equation* $u'_t = a(x)\, u''_{x^2} + b(x)\, u'_x + c(x)\, u$ Rull. of the American Math. Soc., **60**, 344 (1954).

[8] A. TIHONOV : *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur,* Math. Sbornik, **42,** 199-216 (1935).

[9] D. WIDDER : *Positive temperatures in an infinite* rod, Trans. American Math. Soc. **55**, 85-95 (1944).