Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

R. Gérard
G. Reeb

Le théorème de Floquet et la théorie de De Rham (pour les formes de degré 1) comme cas particulier d'un théorème d'Ehresmann sur les structures feuilletées

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 1 (1967), p. 93-98
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_1_93_0>

LE THEORÈME DE FLOQUET ET LA THEORIE DE DE RHAM (POUR LES FORMES DE DEGRÉ 1) COMME CAS PARTICULIER D'UN THEORÈME D'EHRESMANN SUR LES STRUCTURES FEUILLETÉES

Par R. GÉRARD et G. REEB

§ 1. Préliminaires.

La présente note concerne les connexions linéaires $\mathcal{L}$ définies dans les fibrés vectoriels $\mathcal{W}$ de fibre K^n (n fixe, K désignant le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes) et dont la base est une variété $\mathcal{V}_m$ connexe de dimension m et le groupe structural le groupe linéaire $GL(n, K)$ (si $K = \mathbb{R}$, on pourrait également supposer la structure fibrée orientée, le groupe structural étant alors le groupe $GL^+(n, \mathbb{R})$ conservant l'orientation de $\mathbb{R}^n$). Une connexion linéaire l dans un fibré $\mathcal{W}$ est définie par la donnée dans chaque carte $(\varphi, U \times K_n)$ compatible avec la structure de fibré vectoriel de $\mathcal{W}$ d'un système de Pfaff

$$(1) \qquad dy = \omega_{l/U}\, y \qquad \text{où} \qquad y \in K^n$$

et où $\omega_{l/U}$ est une matrice dont les éléments sont des formes de Pfaff définies sur U. Les systèmes (1) sont assujettis à vérifier des conditions de compatibilité évidentes par rapport aux changements de coordonnées locales.

Dans le cas particulier où $\mathcal{W}$ admet une structure de produit $\mathcal{W} = K^n \times \mathcal{V}_m$, subordonnée à la structure de fibré vectoriel de $\mathcal{W}$, la connexion linéaire l sera définie exactement par la donnée d'un système de Pfaff global de la forme (1).

DÉFINITION 1 : Une connexion linéaire l est dite *complètement intégrable* ou *holonome* si les systèmes (1) associés sont complètement intégrables.

Pervenuto alla redazione il 31 Maggio 1966.

REMARQUE 1 : Une connexion linéaire l sur $\mathcal{W}$ complètement intégrable définit une structure feuilletée sur $\mathcal{W}$ transverse aux fibres.

DÉFINITION 2 : Deux connexions linéaires l_1 et l_2 sur $\mathcal{W}$ sont dites équivalentes s'il existe un automorphisme $\mathcal{A}$ de $\mathcal{W}$ (conservant chaque fibre de $\mathcal{W}$) et transformant l_1 en l_2.

REMARQUE 2 : Un tel automorphisme $\mathcal{A}$ est défini par la donnée, dans chaque ouvert coordonnée U compatible avec la structure fibrée de $\mathcal{W}$, d'une matrice A_U. La transformation $y = A_U z$ transforme le système de Pfaff $dy = \omega_{l_1/U}\, y$ en le système $dz = \omega_{l_2/U}\, z$.

Le théorème ([2], [3] et [5]) mentionné dans le titre de cette note implique la

PROPOSITION 1 : Il existe une bijection Φ entre l'ensemble $\mathcal{I}$ des classes de connexions linéaires complètement intégrables équivalentes sur les fibrés vectoriels $\mathcal{W}$ et l'ensemble $\mathcal{R}$ des classes de représentations semblables du groupe de Poincaré $\pi_1(\mathcal{V}_m)$ de $\mathcal{V}_m$ dans le groupe linéaire $GL(n, K)$.

REMARQUE 3 : La bijection $\Phi : \mathcal{I} \to \mathcal{R}$ est induite par l'application qui a une connexion linéaire complètement intégrable l associe le groupe d'holonomie de la feuille passant par l'origine de la structure feuilletée associée à l.

§ 2. Conséquences de la proposition 1.

Il est commode de remplacer la notion de connexion linéaire l sur $\mathcal{W}$ par celle de système cohérent de matrices $\omega_{l/U}$ associé à l. Dans le cas particulier où $\mathcal{W}$ est muni d'une structure de produit $\mathcal{W} = K^n \times \mathcal{V}_m$, le système cohérent de matrices est remplacé par une matrice unique ω définie sur $\mathcal{V}_m$. Pour abréger le langage nous parlerons encore dans le cas général d'une matrice ω à la place de « système cohérent de matrices » ; de même nous parlerons de la matrice A associée à un automorphisme $\mathcal{A}$ de $\mathcal{W}$ à la place du « système cohérent de matrices » (cf- remarque 2). Les définitions 1 et 2 conduisent ainsi aux définitions suivantes :

DÉFINITION 3 : Une matrice ω est dite *holonome* ou *complètement intégrable* si

$$d\omega = \omega \wedge \omega. \tag{2}$$

Rappelons que cela signifie que chaque matrice du système cohérent ω vérifie cette relation.

DÉFINITION 4 : Deux matrices ω_1 et ω_2 sont dites équivalentes s'il existe une matrice A (associée à un automorphisme $\mathscr{A}$ de ω) telle que

$$dA = \omega_1 A - A \omega_2 . \tag{3}$$

La relation (2) exprime la complète intégrabilité des systèmes (1); la relation (3) exprime que l'on passe du « système » $dy = \omega_1 y$ au « système » $dz = \omega_2 z$ par la transformation $y = Az$. On notera que si ω est équivalente à zéro alors $\omega = dAA^{-1}$, d'autre part cette relation entraîne que ω est holonome (Notez : A est une matrice fondamentale du système $dy = \omega y$).

Nous avons donc une situation analogue à celle que l'on rencontre dans l'étude de l'homologie des formes fermées ; (« holonome » correspond à fermée et « équivalent » à homologue).

On dira évidemment qu'une matrice ω est fermée si $d\omega = 0$ et que deux matrices ω_1 et ω_2 sont homologues s'il existe une matrice carrée A d'ordre n telle que :

$$dA = \omega_1 - \omega_2 .$$

Dans le cas particulier où $n = 1$, il y a identité entre « holonome » et « fermée » et entre « équivalent » et « homologue ». Si $\mathscr{H}(\mathscr{V}_m)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de matrices holonomes et $\mathscr{R}(\mathscr{V}_m)$ l'ensemble des classes de représentations du groupe de Poincaré $\pi_1(\mathscr{V}_m)$ dans $GL(n, K)$ la proposition 1 peut s'énoncer :

PROPOSITION 2 : Il existe une bijection naturelle entre $\mathscr{H}(\mathscr{V}_m)$ et $\mathscr{R}(\mathscr{V}_m)$.

§ 3. Le théorème de Floquet.

Le théorème de Floquet [4] correspond an cas particulier où $\mathscr{V}_m$ est le cercle S_1 et $K = \mathbb{C}$. Le groupe de Poincaré de S_1 étant isomorphe à $\mathbb{Z}$, une représentation de $\pi_1(S_1)$ dans $GL(n, \mathbb{C})$ est entièrement déterminée par l'image du générateur 1 de $\pi_1(S_1)$ et l'ensemble $\mathscr{R}(S_1)$ des classes de représentations de $\pi_1(S_1)$ dans $GL(n, \mathbb{C})$ s'identifie à l'ensemble des classes de matrices inversibles semblables.

Le théorème de Floquet résulte alors de la proposition 2. En effet, une représentation de $\mathscr{R}(S_1)$ est déterminée par la donnée d'une matrice inversible B et cette représentation peut être obtenue par un système $dy = \omega y$

où ω est une matrice à coefficients constants ($\omega = A\,dt$, où A est une matrice vérifiant $\exp A = B$, une telle matrice existe car B est inversible). Ce qui montre que *dans toute classe de matrices équivalentes sur S_1, il existe une matrice à coefficients constants.*

§ 4. Le théorème de De Rham pour les formes de degré 1 ($K = \mathbb{R}$).

Posons $n = 1$ et pour simplifier considérons le cas où la structure fibrée est orientée (c.f. § 1). Le groupe structural $GL^+(1, \mathbb{R})$ est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres réels positifs. Nous avons vu que dans ce cas $\mathcal{H}(\mathcal{V}_m)$ est identique à l'ensemble $H_1(\mathcal{V}_m)$ des classes de formes fermées homologues. La proposition 2 nous dit qu'il existe une bijection entre $H_1(\mathcal{V}_m)$ et l'ensemble $\mathcal{R}(\mathcal{V}_m)$ des classes d'homomorphismes de $\pi_1(\mathcal{V}_m)$ dans $\mathbb{R}^+$. Or il existe une bijection (la fonction logarithme réalise un isomorphisme entre $\mathbb{R}^+$ et le groupe additif des nombres réels) entre $\mathcal{R}(\mathcal{V}_m)$ et les classes d'homomorphismes de $\pi_1(\mathcal{V}_m)$ dans le groupe additif des nombres réels. Ce résultat nous donne le théorème de De Rham pour les formes de degré 1. (On peut trouver une forme ω fermée ayant des périodes données).

§ 5. Autres consequences.

a) *Le théorème de Floquet pour une variéte $\mathcal{V}_m$ dont le groupe fondamental est abélien libre de type fini.*

Théorème 1 : *Soit $\mathcal{V}_m$ une variété dont le groupe fondamental est abélien libre de type fini. Dans chaque classe de matrices holonomes équivalentes il existe une matrice fermée à « coefficients constants ».*

Il suffit de montrer que toute représentation $\pi_1(\mathcal{V}_m)$ dans $GL(n, \mathbb{C})$ peut être obtenue par une matrice fermée à « coefficients constants ». Une représentation de $\pi_1(\mathcal{V})_m$ dans $GL(n, \mathbb{C})$ est déterminée par la donnée de p matrices constantes inversibles deux à deux permutables $B_1, B_2, \dots, B_p$ qui sont les images respectives des générateurs $g_1, g_2, \dots, g_p$ de $\pi_1(\mathcal{V}_m)$ par la représentation considérée. Dans le cas particulier où $\mathcal{V}_m$ est le tore T_m ($p = m$), la représentation considérée est obtenue par un système $dy = \omega y$ où ω est la forme à coefficients constants $\sum_{i=1}^{n} A_i\,dt_i$. Les matrices A_i étant deux à deux permutables et vérifient $\exp A_i = B_i$. (Ces matrices existent car les matrices B_i sont inversibles et deux à deux permutables, pour une démonstration voir [1]). Dans le cas général la représentation considérée est obtenue par un système $dy = \omega y$ où ω est la forme à « coefficients constants» $\sum_{i=1}^{p} A_i \, \omega_i$; le système de formes fermées $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_p$ désignant le système des formes duales du système des cycles $g_1, g_2, \dots g_p$.

REMARQUE 1 : Sous les hypothèses du théorème 1 il résulte : toute représentation associée à une connexion linéaire sur $\mathcal{V}_m$ peut être obtenue par une équation globale (c. f. § 2 ler alinéa).

REMARQUE 2 : Le résultat ci-dessus est encore vrai si on suppose seulement que la représentation est abélienne libre de type fini.

b) *Une autre généralisation du théorème de Floquet.*

Soit $\mathcal{H}(\mathcal{V}_m)$ l'ensemble des classes d'équivalence de matrices holonomes sur une variété $\mathcal{V}_m$.

THÉORÈME 2 : *Pour que dans une classe* $\widehat{\omega} \in \mathcal{H}(\mathcal{V}_m)$ *il existe une matrice holonome fermée il faut et il suffit qu'il existe une matrice* $\omega_1 \in \widehat{\omega}$ *et une matrice* ψ *telle que :*

1) *la transposée de* ψ *soit holonome et équivalente à zéro.*
2) $(\omega_1 + \psi) \wedge (\omega_1 + \psi) = 0$.

Ce théorème résulte des égalités suivantes :

$$\text{si } \omega_2 = (A\omega_1 + dA)\, A^{-1}$$

alors

$$\omega_2 \wedge \omega_2 = A\, [(\omega_1 + \psi) \wedge (\omega_1 + \psi)]\, A^{-1}$$

$$d\omega_2 \quad = A\, [(\omega_1 + \psi) \wedge (\omega_1 + \psi)]\, A^{-1}$$

avec

$$\psi = A^{-1}\, dA \quad \text{donc} \quad {}^t\psi = d\,({}^tA)\,({}^tA)^{-1}.$$

c) *Résumé du* § 5

Soient :

— $\mathcal{V}_m$ une variété connexe.
— $\mathcal{H}(\mathcal{V}_m)$ l'ensemble des classes de matrices holonomes sur $\mathcal{V}_m$.
— $\mathcal{R}(\mathcal{V}_m)$ l'ensemble des classes de représentations de $\pi_1(\mathcal{V}_m)$ dans $GL(n, \mathbb{C})$.
— φ la bijection de $\mathcal{H}(\mathcal{V}_m)$ sur $\mathcal{R}(\mathcal{V}_m)$.
— $\widehat{\omega}$ un élément de $\mathcal{H}(\mathcal{V}_m)$.

Considérons les quatre propriétés suivantes :

P_1 $\begin{cases} \text{Il existe } \omega_1 \in \widehat{\omega} \text{ et une matrice holonome } \psi \text{ équivalente} \\ \text{à zéro telle que } (\omega_1 + \psi) \wedge (\omega_1 + \psi) = 0. \end{cases}$

P_2 $\{$ Il existe $\omega \in \widehat{\omega}$ avec $d\omega = 0$.

P_3 $\{$ La représentation $\varphi(\widehat{\omega})$ est abélienne de type fini.

P_4 $\{$ Il existe $\omega \in \widehat{\omega}$ fermée et à « coefficients constants ».

Le § 5 se résume en les implications suivantes :

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, Leftrightarrow] & P_2 \\ P_3 \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & P_4 \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GÉRARD R. *Le théorème de Floquet pour les systèmes de la forme*

$$dx = \Big(\sum_{i=1}^{n} P_i(t_1, t_2, \dots, t_n)\, dt^i\Big)\, x$$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Série III Vol. XX, fasc. III (1966).

[2] EHRESMANN Ch. *Colloque de Topologie.* Bruxelles 1950.

[3] MILNOR JOHN. *On the existence of a connection with curvature zéro.* Commentarii Mathematici Helvetici vol. 32, fasc. 4 1958.

[4] ROSEAU MAURICE. *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité.* Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 8.

[5] HAEFLIGER A. *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes.* Commentarii Mathematici Helvetici. Vol. 32, fasc. 4, 1958, p. 303.

Université de Strasbourg