

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LAMBERTO CATTABRIGA

## **Su un certo spazio funzionale. Un teorema di tracce**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 20, n° 4 (1966), p. 783-796*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1966\\_3\\_20\\_4\\_783\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_4_783_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SU UN CERTO SPAZIO FUNZIONALE. UN TEOREMA DI TRACCE (\*)

LAMBERTO CATTABRIGA

Oggetto di questa nota è uno spazio funzionale già considerato da P. I. Lizorkin e S. M. Nikol'skiĭ [2] ed in casi particolari da M. Pagni [3], [4] e B. Pini [5]. Come si mostra più oltre (n. 2) tale spazio è del tipo di quelli studiati da L. Hörmander [1] e da L. R. Volevic e B. P. Panejach [6].

Oltre a certe proprietà di questo spazio provo qui un teorema che completa un risultato contenuto in [1] e [6], riguardante le tracce su un iperpiano coordinato delle funzioni appartenenti a tale spazio e di certe loro derivate. Casi particolari del risultato qui provato erano stati ottenuti per altra via, ed in forma più esplicita, da B. Pini [5] e da M. Pagni [4].

Ringrazio Ennio De Giorgi per le assai utili discussioni avute con lui sull'argomento di questa ricerca. Sua è la dimostrazione del lemma 3.3.

1. Sia  $\mathcal{S}(R^{\nu})$  lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili sullo spazio euclideo  $\nu$ -dimensionale  $R^{\nu}$  ed ivi a decrescenza rapida ed  $\mathcal{S}'(R^{\nu})$  il suo duale, cioè lo spazio delle distribuzioni temperate. Per ogni  $u \in \mathcal{S}(R^{\nu})$  sia

$$\mathcal{F}u = \tilde{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx, \quad x, \xi \in R^{\nu}, \quad \langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^{\nu} x_j \xi_j$$

la sua trasformata di Fourier. È

$$(2\pi)^{-\nu} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} u(\xi) d\xi = \widehat{u}(x) = \mathcal{F}^{-1}u.$$

---

Pervenuto alla Redazione il 13 Settembre 1966.

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Come è noto se  $u \in \mathcal{S}'(R^v)$  si definiscono  $\tilde{u}$  ed  $\widehat{u}$  come le distribuzioni di  $\mathcal{S}'(R^v)$  tali che

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle \quad \text{e} \quad \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(R^v).$$

Da [1] e [6]<sup>(1)</sup> traiamo le definizioni

**DEFINIZIONE 1.1.** Una funzione positiva  $\mu(\xi)$  continua su  $R^v$  si dice una funzione peso temperata se esistono due costanti positive  $C$  e  $d$  tali che

$$\mu(\xi + \eta) \leq C(1 + |\xi|)^d \mu(\eta), \quad \forall \xi, \eta \in R^v, \quad |\xi|^2 = \sum_1^v \xi_j^2.$$

**DEFINIZIONE 1.2.** Se  $\mu(\xi)$  è una funzione peso temperata in  $R^v$ , con  $H_\mu(R^v)$  si indica l'insieme di tutte le  $u \in \mathcal{S}'(R^v)$  tali che  $\tilde{u}$  è una funzione e

$$(1.1) \quad \|u\|_{H_\mu(R^v)} = \left( (2\pi)^{-v} \int_{R^v} \mu^2(\xi) |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty.$$

È stato provato<sup>(2)</sup> il

**TEOREMA 1.1.**  $H_\mu(R^v)$  è uno spazio hilbertiano con la norma definita da (1.1) ed è

$$\mathcal{S}(R^v) \subset H_\mu(R^v) \subset \mathcal{S}'(R^v)$$

anche in senso topologico; inoltre  $\mathcal{S}(R^v)$  è denso in  $H_\mu(R^v)$ .

2. Nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale  $S^n$  siano dati i punti  $\mathbf{r}^i = (r_1^i, \dots, r_n^i)$ ,  $i = 1, \dots, M$ , tali che

a)  $\mathbf{r}^i \in S_+^n = \{\mathbf{s} \in S^n; s_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ ,  $i = 1, \dots, M$ ;

b) per ogni  $j = 1, \dots, n$  è  $r_j^i > 0$  per almeno un  $i = 1, \dots, M$ .

Nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale  $R^n$  sia

$$(2.1) \quad \varrho(\xi) = \left( \prod_1^M \prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{r_j^i} \right)^{1/2}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n.$$

Per  $\mathbf{r} \in S_+^n$  sia  $Q(\mathbf{r}) = \{\mathbf{s} \in S_+^n; 0 \leq s_j \leq r_j, j = 1, \dots, n\}$ . Indichiamo con  $\mathbb{P}$  l'involuppo convesso in  $S^n$  dei vertici dei parallelepipedi  $Q(\mathbf{r}^i)$ ,  $i = 1, \dots, M$ .

<sup>(1)</sup> Si veda [1] Cap. II e [6] Cap. I.

<sup>(2)</sup> l. c. in <sup>(1)</sup>.

LEMMA 2.1.  $\mathbb{P}$  è un poliedro convesso  $n$ -dimensionale e indicati con  $\mathbf{s}^l$ ,  $l = 0, \dots, N$ , ( $N \geq n$ ,  $s_j^0 = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ) i suoi vertici è

$$i) \quad \mathbb{P} = \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n; \prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{s_j} \leq \varrho^2(\xi), \forall \xi \in R^n \right\};$$

$$ii) \quad \mathbb{P} \supset Q(\mathbf{s}^l), \quad l = 1, \dots, N;$$

iii) per ogni  $h = 1, \dots, n$  esiste  $l_k$  tale che  $\mathbf{s}^{l_k} = s_k^{l_k} \mathbf{e}^k$  <sup>(3)</sup> ed è  $s_k^{l_k} = \max_{1 \leq l \leq N} s_k^l = \max_{1 \leq i \leq M} r_k^i = m_k > 0$ .

Dimostrazione. Se  $\mathbf{s} \in \mathbb{P}$  è

$$\mathbf{s} = \sum_0^N \lambda_l \mathbf{s}^l, \quad \lambda_l \geq 0, \quad \sum_0^N \lambda_l = 1.$$

Osservato che ciascuno dei vertici  $\mathbf{s}^l$  coincide con uno dei vertici dei parallelepipedi  $Q(\mathbf{r}^i)$ , avremo per ogni  $\xi \in R^n$

$$\prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{s_j} = \prod_0^N \left( \prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{s_j^{l_k}} \right)^{\lambda_l} \leq \sum_0^N \lambda_l \prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{s_j^{l_k}} \leq \varrho^2(\xi).$$

Se poi  $\mathbf{s} \in S_n^+$ ,  $\mathbf{s} \notin \mathbb{P}$ , allora per un  $t \in ]0, 1[$   $t\mathbf{s}$  sta su almeno una faccia di  $\mathbb{P}$  non situata su alcun iperpiano coordinato. Siano  $\nu_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , i coseni direttori della normale all'iperpiano su cui sta tale faccia, diretta verso l'esterno di  $\mathbb{P}$  e  $d$  la distanza di tale iperpiano dall'origine di  $S^n$ . È  $\nu_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e  $\sum_1^n \nu_j t s_j = d$ . Sia  $\lambda > 1$  e  $\xi_j = (\lambda^{\nu_j/d} - 1)^{1/2}$  se  $\nu_j > 0$ ,  $\xi_j = 0$  se  $\nu_j = 0$ . Per tale  $\xi$  è

$$\prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{s_j} = \lambda^{1/t}.$$

D'altra parte per la convessità di  $\mathbb{P}$  risulta  $0 \leq \sum_1^n \nu_j r_j \leq d$  per ogni  $i = 1, \dots, M$  e quindi

$$\prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{r_j^i} = \lambda^{\sum_1^n \nu_j r_j^i / d} \leq \lambda, \quad i = 1, \dots, M,$$

---

<sup>(3)</sup>  $\mathbf{e}^k \in S_+^n$ ,  $e_j^k = \delta_{jk}$ ,  $k, j = 1, \dots, n$  ( $\delta_{jk}$  simbolo di Kronecker).

Da queste maggiorazioni segue che  $\varrho^{-2}(\xi) \prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{s_j}$  non può restare limitato per ogni  $\xi \in R^n$ .

Le altre affermazioni del lemma sono immediate conseguenze della definizione di  $\mathbb{P}$ .

In  $R^n$  siano

$$(2.2) \quad P'(\xi) = \left( \sum_1^N \prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{s_j} \right)^{1/2}$$

e

$$(2.3) \quad P(\xi) = \left( \sum_0^N \left| \xi^{2s} \right| \right)^{1/2}, \quad \xi^{2s} = \prod_1^n \xi_j^{2s_j}.$$

LEMMA 2.2. *Per ogni  $\xi \in R^n$  valgono le*

$$(2M)^{-1} \varrho^2(\xi) \leq P'^2(\xi) \leq N \varrho^2(\xi)$$

$$2^{-1} P^2(\xi) \leq P'^2(\xi) \leq C P^2(\xi),$$

con  $C$  costante positiva.

*Dimostrazione.* La maggiorazione  $P'^2(\xi) \leq N \varrho^2(\xi)$  è immediata conseguenza del fatto che ciascuno degli  $s^l$  coincide con uno dei vertici dei  $Q(\mathbf{r}^i)$ . Alla  $\varrho^2(\xi) \leq 2MP'^2(\xi)$  si giunge osservando che i punti  $\mathbf{r}^i$  si possono esprimere come combinazione lineare dei vertici  $\mathbf{s}^l$  di  $\mathbb{P}$ :

$$\mathbf{r}^i = \sum_0^N \lambda_i^l \mathbf{s}^l, \quad \lambda_i^l \geq 0, \quad \sum_0^N \lambda_i^l = 1,$$

onde per ogni  $\mathbf{r}^i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , è

$$\prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{r_j^i} \leq \sum_0^N \lambda_i^l \prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{s_j^l} \leq P'^2(\xi) + 1 \leq 2P'^2(\xi), \quad \forall \xi \in R^n.$$

È poi evidentemente

$$P^2(\xi) = 1 + \sum_1^N \prod_1^n |\xi_j|^{2s_j^l} \leq 1 + P'^2(\xi), \quad \forall \xi \in R^n.$$

Per ogni  $\xi \in R^n$  e per ogni  $l = 1, \dots, N$  è infine

$$\prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{s_j^l} \leq C' \prod_1^n (1 + |\xi_j|^{2s_j^l}) = C' \left( 1 + \prod_1^n |\xi_j|^{2s_j^l} + R(\xi) \right)$$

ove  $C'$  dipende soltanto da  $\mathbb{P}$  ed  $R(\xi)$  è una somma di termini del tipo  $|\xi^{2\mathbf{a}}|$ , alcune coordinate di  $\mathbf{a}$  essendo eguali a quelle di  $\mathbf{s}^l$  e le rimanenti nulle. Per il lemma 2.1, ii), tutti tali punti  $\mathbf{a}$  appartengono a  $\mathbb{P}$  onde per ciascuno di essi è

$$\mathbf{a} = \sum_0^N \lambda_l \mathbf{s}^l, \quad \lambda_l \geq 0, \quad \sum_0^N \lambda_l = 1,$$

e quindi

$$|\xi^{2\mathbf{a}}| = \prod_1^n |\xi_j|^{2a_j} \leq \sum_0^N \prod_1^n |\xi_j|^{2s_j^l} = P^2(\xi), \quad \forall \xi \in R^n.$$

Dunque per una opportuna costante positiva  $C$

$$P'^2(\xi) \leq C P^2(\xi), \quad \forall \xi \in R^n.$$

LEMMA 2.3. *Esiste una costante positiva  $d$  tale che*

$$\varrho(\xi + \eta) \leq (1 + |\xi|)^d \varrho(\eta), \quad \forall \xi, \eta \in R^n.$$

*Dimostrazione.* È

$$1 + (\xi_j + \eta_j)^2 \leq 1 + \xi_j^2 + 2|\xi_j||\eta_j| + \eta_j^2 \leq (1 + |\xi_j|)^2(1 + \eta_j^2)$$

onde

$$\prod_1^n (1 + (\xi_j + \eta_j)^2)^{r_j^i} \leq \prod_1^n (1 + |\xi_j|)^{2r_j^i} \prod_1^n (1 + \eta_j^2)^{r_j^i} \leq (1 + |\xi|)^{2\sum_j r_j^i} \prod_1^n (1 + \eta_j^2)^{r_j^i}$$

e quindi

$$\varrho^2(\xi + \eta) \leq (1 + |\xi|)^{2d} \varrho^2(\eta)$$

con  $d = \max_{1 \leq i \leq M} \sum_1^n r_j^i$ .

Dai lemmi 2.2 e 2.3 segue subito

TEOREMA 2.1. *Le funzioni  $\varrho(\xi)$ ,  $P(\xi)$ ,  $P'(\xi)$  definite dalle (2.1)-(2.3) sono funzioni peso temperate in  $R^n$ . Gli spazi  $H_\varrho(R^n)$ ,  $H_P(R^n)$ ,  $H_{P'}(R^n)$  definiti mediante esse secondo la definizione 1.2 coincidono, le relative norme riuscendo equivalenti <sup>(4)</sup>.*

---

(4)  $H_\varrho(R^n)$  coincide, per  $p=2$ , con lo spazio  $S_p^A, \dots, r^M(R^n)$  definito in [2]. Ivi è provato che  $\forall \mathbf{s} \in \mathbb{P} H_\varrho(R^n) \subset H_{Q_s}(R^n)$ ,  $Q_s(\xi) = \prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{s_j/2}$ .

3. Supponiamo ora che

$$c) \max_{1 \leq i \leq M} r_n^i = m_n > 1/2.$$

Indichiamo con  $\mathcal{L}_{m_n}^2(\mathbb{R})$  lo spazio lineare rispetto al corpo complesso delle (classi delle) funzioni  $\varphi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  tali che

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + t^2)^{m_n} |\varphi(t)|^2 dt < +\infty.$$

Per ogni  $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  consideriamo la forma hermitiana

$$\Phi(\varphi, \psi; \xi') = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}} \varrho^2(\xi', t) \varphi(t) \overline{\psi(t)} dt$$

quale prodotto scalare in  $\mathcal{L}_{m_n}^2(\mathbb{R})$  e indichiamo con

$$\mathcal{J}(\xi'; \varphi) = \left[ (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}} \varrho^2(\xi', t) |\varphi(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

la relativa norma in tale spazio.

Con  $\{\alpha\}$ ,  $\alpha > 0$ , denoteremo il più grande intero non negativo inferiore ad  $\alpha$ .

LEMMA 3.1. *I funzionali lineari*

$$\mathcal{J}_h(\varphi) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} (it)^h \varphi(t) dt, \quad h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\},$$

sono continui in  $\mathcal{L}_{m_n}^2(\mathbb{R})$  per ogni  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

*Dimostrazione.* Riuscendo  $2h - 2m_n < -1$  è infatti per  $\varphi \in \mathcal{L}_{m_n}^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (3.1) \quad |\mathcal{J}_h(\varphi)| &\leq (2\pi)^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}} t^{2h} \varrho^{-2}(\xi', t) dt \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} \varrho^2(\xi', t) |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} \left( \int_{\mathbb{R}} t^{2h} \varrho^{-2}(\xi', t) dt \right)^{1/2} \mathcal{J}(\xi'; \varphi). \end{aligned}$$

Per  $\xi' \in R^{n-1}$  sia

$$\Sigma(\xi') = \{\varphi \in \mathcal{L}_{m_n}^2(R); \mathcal{I}(\xi'; \varphi) = 1\},$$

$$\mathcal{M}_h(\xi') = \{\varphi \in \Sigma(\xi'); \mathcal{I}_k(\varphi) = 0, \forall k \neq h, k = 0, \dots, \{m_n - 1/2\},$$

$$h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}.$$

**TEOREMA 3.1.** *Le funzioni*

$$v_h(\xi', t) = (2\pi)^{n/2} (-it)^h \varrho^{-2}(\xi', t) \left( \int_{\mathbb{R}} t^{2h} \varrho^{-2}(\xi', t) dt \right)^{-1/2}, \quad (\xi', t) \in R^n,$$

$h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}$ , appartengono a  $\Sigma(\xi')$  per ogni  $\xi' \in R^{n-1}$  ed inoltre

$$\mathcal{I}_h(v_h(\xi', \cdot)) = \max_{\varphi \in \Sigma(\xi')} |\mathcal{I}_h(\varphi)|, \quad \forall \xi' \in R^{n-1}.$$

*Dimostrazione.* La prima affermazione è di immediata verifica; la seconda si prova osservando che dalla (3.1) segue

$$|\mathcal{I}_h(\varphi)| \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} \left( \int_{\mathbb{R}} t^{2h} \varrho^{-2}(\xi', t) dt \right)^{1/2}, \quad \forall \varphi \in \Sigma(\xi'),$$

mentre è

$$\mathcal{I}_h(v_h(\xi', \cdot)) = (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} \left( \int_{\mathbb{R}} t^{2h} \varrho^{-2}(\xi', t) dt \right)^{1/2}, \quad \forall \xi' \in R^{n-1}.$$

Sia

$$\mathcal{A}_h = \{\varphi \in \mathcal{L}_{m_n}^2(R); \mathcal{I}_k(\varphi) = \delta_{kh}, k = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}\};$$

$$h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}.$$

**LEMMA 3.2.** *Per ogni  $\xi' \in R^{n-1}$  esiste un elemento (ed uno solo)  $\chi_h(\xi', \cdot) \in \mathcal{A}_h$  tale che*

$$\mathcal{I}(\xi'; \chi_h(\xi', \cdot)) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_h} \mathcal{I}(\xi'; \varphi)$$

ed è

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{A}_h} \mathcal{I}(\xi'; \varphi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}+1} \left( \inf_{\alpha_k} \int_{\mathbb{R}} |t^h + \sum_{k \neq h}^{\{m_n-1/2\}} \alpha_k t^k|^2 \varrho^{-2}(\xi', t) dt \right)^{-1/2}$$

dove l'ultimo estremo inferiore è relativo al variare di tutti i coefficienti  $\alpha_k$ ,  $k \neq h$ ,  $k = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}$ , sul corpo complesso.



*Dimostrazione.* La prima affermazione è conseguenza del fatto che  $\mathcal{A}_h$  è un insieme convesso di  $\mathcal{L}_{m_n}^2(\mathbb{R})$ , chiuso rispetto alla norma  $\mathcal{J}(\xi'; \varphi)$  per ogni  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

Sia poi

$N(\xi')$  il sottospazio di  $\mathcal{L}_{m_n}^2(\mathbb{R})$  generato dalle

$$\psi_k = (2\pi)^{n-1} (-it)^k e^{-2}(\xi', t), \quad k = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}.$$

È

$$\Phi(\varphi, \psi_k; \xi') = \mathcal{J}_k(\varphi), \quad k = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}.$$

Dunque

$$N^\perp = \{\varphi \in \mathcal{L}_{m_n}^2(\mathbb{R}); \mathcal{J}_k(\varphi) = 0, k = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}\}$$

è il sottospazio chiuso di  $\mathcal{L}_{m_n}^2(\mathbb{R})$  ortogonale ad  $N(\xi')$ , per ogni  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

Sia  $f \in \mathcal{A}_h$ . È allora  $f - \varphi \in N^\perp$  se e soltanto se  $\varphi \in \mathcal{A}_h$  e

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{A}_h} \mathcal{J}(\xi'; \varphi) = \inf_{g \in N^\perp} \mathcal{J}(\xi'; f - g).$$

D'altra parte per noti teoremi è

$$\begin{aligned} \inf_{g \in N^\perp} \mathcal{J}(\xi'; f - g) &= \sup_{\psi \in N(\xi')} \frac{|\Phi(\psi, f; \xi')|}{\mathcal{J}(\xi'; \psi)} = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}+1} \sup_{\lambda_k} \left\{ |\lambda_h| \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_0^{\{m_n-1/2\}} \lambda_k (-it)^k \right|^2 e^{-2}(\xi', t) dt \right)^{-1/2} \right\}, \end{aligned}$$

ove i coefficienti  $\lambda_k$  possono assumere qualunque valore complesso.

LEMMA 3.3. *Siano  $m$  ed  $h$  interi non negativi,  $h$  non superiore ad  $m$ . Esiste una costante positiva  $C_1$ , dipendente soltanto da  $m$  ed  $h$  tale che*

$$\int_0^{+\infty} \left| t^h + \sum_0^m a_k t^k \right|^2 p(t) dt \geq C_1 \int_0^{+\infty} t^{2h} p(t) dt,$$

qualunque siano i numeri complessi  $a_k$ ,  $k \neq h$ ,  $k = 0, \dots, m$ , e qualunque sia la funzione positiva  $p(t)$  decrescente in  $\mathbb{R}^+ = \{0 \leq t < +\infty\}$  e tale che

$$\int_0^{+\infty} t^{2m} p(t) dt < +\infty.$$

*Dimostrazione* <sup>(5)</sup>. Basterà provare il lemma nell'ipotesi che i coefficienti  $\alpha_k$  siano tutti reali. Sia  $\varepsilon \in ]0, 1[$  e

$$E(\varepsilon) = \left\{ t \in R^+ ; \left| t^h + \sum_{k \neq h}^m \alpha_k t^k \right| < \varepsilon t^h \right\}.$$

$E(\varepsilon)$  è riunione di al più  $m$  intervalli aperti disgiunti di  $R$ . Sia  $T = \{\alpha < t < \beta\}$  uno qualunque di tali intervalli e  $T' = \{0 < t < \beta\}$ . Il cambiamento di variabile  $\tau = t/\beta$  trasforma l'intervallo  $T$  nell'intervallo  $\mathcal{C} = \{\alpha/\beta < \tau < 1\}$  e l'intervallo  $T'$  nell'intervallo  $\mathcal{C}' = \{0 < \tau < 1\}$ .

Per  $\tau \in \mathcal{C}$  è

$$(3.2) \quad \left| \tau^h + \sum_{k \neq h}^m \alpha_k \beta^{k-h} \tau^k \right| < \varepsilon \tau^h < \varepsilon.$$

Fissato  $\gamma > 1$  siano  $\tau_0, \dots, \tau_m \in \mathcal{C}$  e tali che  $|\tau_i - \tau_j| \geq (\text{mis } \mathcal{C})/\gamma m, \forall i \neq j$ . Utilizzando la formula interpolatoria di Lagrange, si ottengono per i coefficienti  $b_j, j = 0, \dots, m$ , di  $\tau^j$  nel polinomio a primo membro di (3.2) le maggiorazioni

$$|b_j| \leq C(j) \varepsilon (\text{mis } \mathcal{C})^{-m},$$

con  $C(j)$  costanti positive dipendenti soltanto da  $j$ , oltre che da  $m$  e  $\gamma$ . Per  $j = h$  si ottiene allora

$$\frac{\text{mis } T}{\text{mis } T'} = \text{mis } \mathcal{C} \leq [C(h) \varepsilon]^{1/m} = \sigma(\varepsilon).$$

È poi

$$\frac{\int_{\bar{T}} t^{2h} p(t) dt}{\int_0^{+\infty} t^{2h} p(t) dt} \leq \frac{\int_{\bar{T}} t^{2h} p(t) dt}{\int_{\bar{T}'} t^{2h} p(t) dt} \leq \frac{\int_{\bar{T}} t^{2h} dt}{\int_{\bar{T}'} t^{2h} dt} \leq (2h+1)(1-\alpha/\beta) \leq (2h+1)\sigma(\varepsilon),$$

per ognuno degli intervalli  $T$  di cui  $E(\varepsilon)$  è riunione. Pertanto è

$$\frac{\int_{E(\varepsilon)} t^{2h} p(t) dt}{\int_0^{+\infty} t^{2h} p(t) dt} \leq m(2h+1)\sigma(\varepsilon),$$

<sup>(5)</sup> Questa dimostrazione mi è stata indicata da Ennio De Giorgi.

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \left| t^h + \sum_0^m_{k \neq h} a_k t^k \right|^2 p(t) dt \geq \varepsilon^2 \int_{R^+ \setminus B(\varepsilon)} t^{2h} p(t) dt \geq \\ \geq \varepsilon^2 [1 - m(2h+1)\sigma(\varepsilon)] \int_0^{+\infty} t^{2h} p(t) dt$$

qualunque siano gli  $a_k$  e la funzione  $p(t)$  soddisfacente alle ipotesi indicate. Da questa maggiorazione segue subito l'affermazione del lemma.

**TEOREMA 3.2.** *Per ogni  $h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}$  ed ogni  $\xi' \in R^{n-1}$  esiste un elemento  $w_h(\xi', \cdot) \in \mathcal{M}_h(\xi')$  tale che*

$$\mathcal{J}_h(w_h(\xi', \cdot)) = \max_{\varphi \in \mathcal{M}_h(\xi')} |\mathcal{J}_h(\varphi)| \geq C_2 \max_{\varphi \in \Sigma(\xi')} |\mathcal{J}_h(\varphi)|,$$

con  $C_2$  costante positiva dipendente soltanto da  $h$ .

*Dimostrazione.* Anzitutto per ogni  $\xi' \in R^{n-1}$  è

$$|\mathcal{J}_h(\varphi)| \leq [\inf_{\varphi \in \mathcal{A}_h} \mathcal{J}(\xi'; \varphi)]^{-1}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}_h(\xi').$$

Dal lemma 3.2 posto

$$w_h(\xi', \cdot) = \chi_h(\xi', \cdot) [\mathcal{J}(\xi'; \chi_h(\xi', \cdot))]^{-1}, \quad \forall \xi' \in R^{n-1}$$

segue poi

$$w_h(\xi', \cdot) \in \mathcal{M}_h(\xi'), \quad \forall \xi' \in R^{n-1}$$

e

$$\mathcal{J}_h(w_h(\xi', \cdot)) = [\mathcal{J}(\xi'; \chi_h(\xi', \cdot))]^{-1} = [\inf_{\varphi \in \mathcal{A}_h} \mathcal{J}(\xi', \varphi)]^{-1}, \quad \forall \xi' \in R^{n-1}.$$

Dunque ancora per il lemma 3.2 e per il lemma 3.3 con  $p(t) = \varrho^{-2}(\xi', t)$

$$\mathcal{J}_h(w_h(\xi', \cdot)) = \max_{\varphi \in \mathcal{M}_h(\xi')} |\mathcal{J}_h(\varphi)| \geq C_1^{1/2} (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} \left( \int_R t^{2h} \varrho^{-2}(\xi', t) dt \right)^{1/2} = \\ = C_1^{1/2} \max_{\varphi \in \Sigma(\xi')} |\mathcal{J}_h(\varphi)|, \quad \forall \xi' \in R^{n-1}.$$

4. Sia

$$(4.1) \quad \varrho_h(\xi') = (2\pi)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} t^{2h} \varrho^{-2}(\xi', t) dt \right)^{-1/2}, \quad h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\},$$

$$\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

È immediato che

LEMMA 4.1. *Le funzioni  $\varrho_h(\xi')$ ,  $h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}$ , definite da (4.1) sono funzioni peso temperate su  $\mathbb{R}^{n-1}$ .*

Mediante la definizione 1.2 restano quindi definiti gli spazi  $H_{\varrho_h}(\mathbb{R}^{n-1})$ ,  $h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}$ . Sia  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

TEOREMA 4.1 *Se  $u \in H_{\varrho}(\mathbb{R}^n)$  e  $g_h(x') = \mathcal{J}_h(\widetilde{u}(\xi', \cdot))$ ,  $h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}$ , si ha*

$$g_h \in H_{\varrho_h}(\mathbb{R}^{n-1})$$

e

$$\|g_h\|_{H_{\varrho_h}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|u\|_{H_{\varrho}(\mathbb{R}^n)}.$$

*Dimostrazione.* La  $\widetilde{u}$  è funzione di  $\xi'$  in  $\mathbb{R}^{n-1}$  a valori  $\widetilde{u}(\xi', \cdot) \in \mathcal{L}_{m_n}^2(\mathbb{R})$  per quasi tutti gli  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Per tali  $\xi'$  poniamo

$$v(\xi) = \widetilde{u}(\xi) [\mathcal{J}(\xi'; \widetilde{u}(\xi', \cdot))]^{-1}, \quad \xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

onde è  $v(\xi', \cdot) \in \Sigma(\xi')$  per quasi tutti gli  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

Dal teorema 3.1 segue poi

$$|\mathcal{J}_h(v(\xi', \cdot))| \leq |\mathcal{J}_h(v_h(\xi', \cdot))| = (2\pi)^{(n-2)/2} \left( \int_{\mathbb{R}} t^{2h} \varrho^{-2}(\xi', t) dt \right)^{1/2}$$

e quindi

$$\varrho_h^2(\xi') |\mathcal{J}_h(\widetilde{u}(\xi', \cdot))|^2 \leq (2\pi)^{n-1} [\mathcal{J}(\xi'; \widetilde{u}(\xi', \cdot))]^2$$

quasi ovunque in  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Pertanto

$$\|g_h\|_{H_{\varrho_h}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 = (2\pi)^{-(n-1)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varrho_h^2(\xi') |\mathcal{J}_h(\widetilde{u}(\xi', \cdot))|^2 d\xi' \leq \|u\|_{H_{\varrho}(\mathbb{R}^n)}^2.$$

TEOREMA 4.2. *Per ogni assegnata  $g_h \in H_{\varrho_h}(\mathbb{R}^{n-1})$ ,  $h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}$ , esiste una  $u_h \in H_{\varrho}(\mathbb{R}^n)$  tale che*

$$\mathcal{J}_k(\widetilde{u}_h(\xi', \cdot)) = \delta_{kh} g_h(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad k = 0, \dots, \{m_n - 1/2\},$$

e

$$\|u_h\|_{H_\rho(\mathbb{R}^n)} \leq C_2^{-1/2} \|g_h\|_{H_{\rho_h}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

ove  $C_2$  è la costante che figura nel teorema 3.2.

*Dimostrazione.* Poniamo

$$z_h(\xi') = \tilde{g}_h(\xi') [\mathcal{J}_h(w_h(\xi', \cdot))]^{-1}, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

ove  $w_h(\xi', t)$  è la funzione indicata nel teorema 3.2. Per ogni  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$  è quindi

$$|z_h(\xi')| \leq C_2^{-1} |\tilde{g}_h(\xi')| [\mathcal{J}_h(w_h(\xi', \cdot))]^{-1} = C_2^{-1} (2\pi)^{-(n-1)/2} \rho_h(\xi') |\tilde{g}_h(\xi')|.$$

Posto

$$u_h(x) = \overbrace{z_h(\xi') w_h(\xi', \xi_n)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

risulta pertanto, per ogni  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\mathcal{J}_k(\tilde{u}_h(\xi', \cdot)) = z_h(\xi') \mathcal{J}_k(w_h(\xi', \cdot)) = \delta_{kh} \tilde{g}_h(\xi'), \quad k = 0, \dots, \{m_n - 1/2\},$$

e

$$\|u_h\|_{H_\rho(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |z_h(\xi')|^2 d\xi' \leq C_2^{-1} \|g_h\|_{H_{\rho_h}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

**COROLLARIO. 4.1.** *Qualunque siano le distribuzioni  $g_0, \dots, g_{\{m_n-1/2\}}$ , con  $g_h \in H_{\rho_h}(\mathbb{R}^{n-1})$ ,  $h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}$ , esiste una  $u \in H_\rho(\mathbb{R}^n)$  tale che*

$$\mathcal{J}_h(\tilde{u}(\xi', \cdot)) = g_h(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\},$$

e

$$\|u\|_{H_\rho(\mathbb{R}^n)} \leq C_3 \sum_0^{\{m_n-1/2\}} \|g_h\|_{H_{\rho_h}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

con  $C_3$  costante positiva.

Il corollario è immediata conseguenza del teorema 4.2. Basta prendere

$$u(x) = \sum_0^{\{m_n-1/2\}} u_h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ove le  $u_h$  sono le funzioni indicate in tale teorema.

Sia ora  $X = \{x \in R^n; x_n = 0\}$ . Con  $\gamma_h u$ ,  $h=0, \dots, \{m_n - 1/2\}$ , indichiamo la restrizione ad  $X$  di  $\partial^h u / \partial x_n^h$ ,  $u \in \mathcal{D}(R^n)$ . È

$$\gamma_h u = \overbrace{\mathcal{F}_h(\tilde{u}(\xi', \cdot))}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(R^n).$$

Prolunghiamo le applicazioni  $\gamma_h u$  su tutto  $H_e(R^n)$  ponendo

$$\left. \frac{\partial^h u}{\partial x_n^h} \right|_X = \gamma_h u = \overbrace{\mathcal{F}_h(\tilde{u}(\xi', \cdot))}, \quad h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\} \text{ (6)}.$$

Dal teorema 4.1 e dal corollario 4.1 segue allora

**TEOREMA 4.3.** *Nelle ipotesi a), b), c), l'applicazione  $u \rightarrow (\gamma_0 u, \dots, \gamma_{\{m_n-1/2\}} u)$  è lineare e continua da  $H_e(R^n)$  su  $H_{e_0}(X) \times \dots \times H_{e_{\{m_n-1/2\}}}(X)$ , con  $\varrho(\xi)$  e  $\varrho_h(\xi')$ ,  $h = 0, \dots, \{m_n - 1/2\}$ , definite dalle (2.1) e (4.1) (7).*

*Nota (9-12-'66).* Come appare dalla dimostrazione, nel teorema 4.3 alle ipotesi a), b), c) si possono sostituire le

- a') la funzione  $\varrho(\xi)$  è una funzione peso temperata su  $R^n$ ;
- b')  $\varrho(\xi', t)$  è crescente rispetto a  $|t|$  su  $R$  per ogni  $\xi' \in R^{n-1}$ ;
- c')  $m_n = \sup \{h \in R^+; \sup_{t \in R} (|t|^{h/\varrho}(\xi', t)) < \infty, \forall \xi' \in R^{n-1}\} > 1/2$ .

Ferrara, Università

---

(6) Per la densità di  $\mathcal{D}(R^n)$  in  $H_e(R^n)$  ed il teorema 4.1 l'applicazione  $u \rightarrow \gamma_h u$  è il prolungamento per continuità ad  $H_e(R^n)$  dell'applicazione  $u \rightarrow \left. \frac{\partial^h u}{\partial x_n^h} \right|_X$  definita su  $\mathcal{D}(R^n)$ .

(7) Il fatto che l'applicazione indicata, definita in  $H_e(R^n)$ , abbia i valori in  $H_{e_0}(X) \times \dots \times H_{e_{\{m_n-1/2\}}}(X)$  segue anche dai risultati contenuti in [6]. In [1] e [6] è anche provato che l'applicazione  $u \rightarrow \gamma_0 u$  è lineare e continua da  $H_e(R^n)$  su  $H_{e_0}(X)$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer, 1963.
- [2] P. I. LIZORKIN - S. M. NIKOL'SKII, *Classificazione delle funzioni differenziabili in base a spazi con derivate miste dominanti*, Trudy Mat. Inst. im. V. A. Steklov, 77, 1965.
- [3] M. PAGNI, *Sulle tracce di una certa classe di funzioni*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 11, 1962.
- [4] M. PAGNI, *Un teorema di tracce*, Rend. Accad. Naz. Lincei, (8), 38, 1965.
- [5] B. PINI, *Sulle tracce di un certo spazio funzionale*: I, Rend. Accad. Naz. Lincei, (8), 37 1964; II, ibidem, 38, 1965.
- [6] L. R. VOLEVIC - B. P. PANEJACH, *Certi spazi di funzioni generalizzate e teoremi di immersione*, Uspechi Mat. Nauk SSSR, 20, 1965.