ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. DA PRATO

Semigruppi di crescenza n

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 4 (1966), p. 753-782

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_4_753_0>

SEMIGRUPPI DI CRESCENZA n.

G. DA PRATO (*)

Introduzione

Un semigruppo di classe c_0 è un'applicazione fortemente continua $t \longrightarrow G(t)$ della semiretta reale non negativa $\overline{\mathbb{R}}_+$ nell'algebra degli operatori lineari continui su uno spazio di Banach X tale che $G(0) = 1$, $G(t+s) = G(t)\,G(s)\ \forall\ t$, $s \in \mathbb{R}_+$; si definisce il generatore infinitesimale A di G ponendo:

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{G(h)\,x - x}{h} \tag{1}$$

per tutti gli x di X per cui tale limite esiste e si dimostra che A è chiuso [5]. Hille e Yosida [5], [6] hanno dimostrato che l'operatore lineare chiuso A con dominio denso in X è generatore infinitesimale di un semigruppo di classe c_0 se e solo se il risolvente $R(\lambda, A)$ di A, che coincide con la trasformata di Laplace di $G(t)$, è analitico in un semipiano $Re\,\lambda > \omega$ e verifica le relazioni:

$$\left\| \frac{d^k R(\lambda, A)}{d\lambda^k} \right\| \leq M \frac{k!}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^{k+1}} \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

M e ω opportuni numeri reali.

Nella deduzione del risultato suddetto è essenziale che $G(t)$ sia fortemente continuo per $t = 0$; nel presente lavoro lasceremo cadere questa condizione richiedendo però alla norma di $G(t)$ di divergere per $t \longrightarrow 0$ non più rapidamente dell'inverso di un polinomio di grado n (semigruppi di crescenza n); osserviamo che in tal modo considereremo una classe di semigruppi molto più ampia di quelli di classe c_0, contenente tra l'altro i semigruppi distribuzioni analitici, [6], [1], [2].

Pervenuto alla Redazione il 9 Maggio 1966

(*) Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca del C.N.R. n. 46 nell'anno 1965-66.

Un sommario dei risultati qui contenuti è apparso in C. R, Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 996-998 (1966).

Il primo ad abbandonare l'ipotesi di continuità nello 0 è stato Feller che ha dato però caratterizzazioni del generatore infinitesimale di difficile uso nella pratica [4]; le nostre ipotesi su $G(t)$, più restrittive di quelle di Feller, ci permettono di dare una diversa caratterizzazione del generatore infinitesimale A, che speriamo utile per le applicazioni.

Se G è un semigruppo di crescenza n, il suo generatore infinitesimale A, definito ancora da (1), è prechiuso e ha in generale come spettro tutto il piano complesso $\mathbb{C}$ cosicchè il risolvente di A non è mai definito; tuttavia la trasformata Laplace di $t^n G(t)$, $S(\lambda, A)$ è una funzione analitica su un semipiano $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ e verifica ancora le relazioni (2) e inoltre se x appartiene al dominio di A^{n+1} si ha:

$$S(\lambda, A)(\lambda - A)^{n+1} x = (\lambda - A)^{n+1} S(\lambda, A) x = x. \tag{3}$$

Questo fatto ci ha indotto a considerare operatori lineari prechiusi (operatori di tipo n) tali che esista una funzione $S(\lambda, A)$ (risolvente di ordine n di A) a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ analitica in un insieme aperto non vuoto del piano complesso $\mathbb{C}$ e verificante (3); abbiamo definito insieme risolvente di ordine n il massimo insieme di analiticità di $S(\lambda, A)$ e spettro di ordine n il suo complementare in $\mathbb{C}$; per $n = 0$ queste definizioni si riducono ai soliti concetti di risolvente, insieme risolvente e spetttro di A.

Il risultato principale del lavoro è la generalizzazione del Teorema di Hille-Yosida e cioè se A è generatore infinitesimale di un semigruppo di crescenza n allora A è di tipo n e il suo risolvente di ordine n $S(\lambda, A)$ verifica (2); viceversa se B è un operatore prechiuso di tipo n il cui risolvente di ordine n $S(\lambda, B)$ verifica (2) allora esiste un unico semigruppo di cresenza n tale che, detto A il suo generatore infinitesimale si ha $S(\lambda, A) = S(\lambda, B)$; da notare che quest'ultima condizione assicura $A = B$ per $n = 0$.

Abbiamo dimostrato il risultato suddetto seguendo l'idea della dimostrazione di Yosida [7].

I paragrafi 2, 3, 4, 5 sono dedicati allo studio dei semigruppi di crescenza n, degli operatori di tipo n e alla generalizzazione del Teorema di Hille-Yosida.

Nel paragrafo 5 abbiamo studiato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Bu \\ u(0) = u_0 \qquad u_0 \in X \end{cases} \tag{4}$$

con B operatore lineare chiuso di tipo n con risolvente di ordine n $S(\lambda, B)$ verificante (2); abbiamo dimostrato che se u appartiene al dominio di B

allora (4) ha una e una sola soluzione con $u(t)$ appartenente al dominio di B per ogni $t \in \mathbb{R}_+$.

Nel paragrafo 6 abbiamo generalizzato ai semigruppi di tipo n che ammettono un prolungamento analitico su un settore i Teoremi sui semigruppi analitici « ordinari » [5], [8].

Nel paragrafo 7, come applicazione, abbiamo dato condizioni di risolubilità per il problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale

$$\sum_{k=0}^{n} a_k U^k \frac{d^{n-k}u}{dt} = 0 \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

con $u(t)$ funzioni a valori in uno spazio di Banach Y e U generatore infinitesimale di un semigruppo analitico « ordinario ».

Abbiamo usato le seguenti notazioni:
$\mathbb{R}$ è l'nsieme dei numeri reali, $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi, $\mathbb{R}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$) l'insieme dei numeri reali positivi (non negativi).

Se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ S_θ è il settore

$$S_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0 \ | \arg \lambda | < \theta\}$$

X è uno spazio di Banach complesso, $\|x\|$ è la norma del generico elemento x di X, $\mathcal{L}(X, X)$ è l'algebra degli operatori lineari continui su X con la norma usuale; per ogni operatore lineare A in X D_A è il dominio di A, e se m è un intero positivo D_{A^m} il dominio di A^m:

$$D_{A^m} = \{x \in X, A^i x \in D_A, i = 1, \dots, m\}$$

inoltre $D_\infty(A)$ è l'insieme $\bigcap_{m=1}^{\infty} D_{A^m}$.

Infine con continuità di funzioni e convergenza di successioni in X abbiamo sempre inteso, salvo contrario avviso, continuità e convergenza nella topologia forte di X.

Ringrazio il professor J. L. Lions per stimolanti discussioni e utili consigli.

1. Semigruppi di crescenza n.

DEFINIZIONE [1.I] — *Diremo che G è un semigruppo di crescenza n su X, n intero non negativo, se*:

a) *G è un'applicazione fortemente continua di $\mathbb{R}_+$ in $\mathcal{L}(X, X)$ tale che:*

$$G(t+s) = G(t)\, G(s) \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}_+ . \tag{1.1}$$

b) *Per ogni $a > 0$ la funzione $\| t^n G(t) \|$ è limitata nell'intervallo $0 < t \leq a$.*

c) *Se $x \in X$ e si ha $G(t)\, x = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+$ allora $x = 0$.*

d) *Posto:*

$$Y = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \{ y \in X;\ y = G(t)\, x, x \in X \} \tag{1.2}$$

allora il sottospazio vettoriale generato da Y è denso in X.

Osserviamo che la condizione c) non è restrittiva; infatti se G verifica a), b) d) allora posto:

$$X_1 = \{ x \in X;\ G(t)\, x = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \}$$

e detta $\overline{X}_1$ la chiusura di X_1 in X, G induce in modo naturale su $X/\overline{X}_1$ un semigruppo di crescenza n.

Nel seguito del paragrafo G rappresenta un semigruppo di crescenza n.

Definiamo ora il generatore infinitesimale di G e riportiamo nel Lemma [1.I], senza dimostrazione, alcuni risultati noti ([5] p. 306).

DEFINIZIONE [1.II] — *Sia A l'operatore lineare in X definito da:*

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{G(h)\, x - x}{h} \qquad x \in X \tag{1.3}$$

per tutti gli x per cui tale limite esiste; A è detto il generatore infinitesimale di G.

LEMMA [1.I] — *D_A è denso in X e se $x \in D_A$ la funzione $G(t)\, x$ è prolungabile a una funzione continua e derivabile in $\overline{\mathbb{R}}_+$ e si ha:*

$$\lim_{t \to 0} G(t)\, x = x \tag{1.4}$$

$$\frac{d\, G(t)\, x}{dt} = A\, G(t)\, x = G(t)\, Ax \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ . \tag{1.5}$$

LEMMA [1.II] — *Si ha:*

$$\lim_{t \to 0} t^n (G(t)\, x - x) = 0 \ \forall\, x \in X . \tag{1.6}$$

in particolare se $n = 0$ G è un semigruppo di classe c_0.

DIM. — Dato $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x \in X$ esiste (LEMMA [1.I]) un elemento $y \in D_A$ tale che $\| x - y \| < \varepsilon$ ne segue:

$$\| t^n G(t) x - t^n x \| \leq \| t^n G(t) x - t^n G(t) y \| + \| t^n G(t) y - t^n y \| + t^n \| x - y \|$$

$$\leq \varepsilon (t^n + \| t^n G(t) \|) + t^n \| G(t) y - y \|$$

allora in virtù della DEFINIZIONE [1.I] b), del LEMMA [1.I] e dell'arbitrarietà di ε si ha la tesi.

TEOREMA [1.I] — *A è prechiuso.*

DIM. — Se $x \in D_A$ si ha (LEMMA [1.II])

$$(1.7) \quad t^{n+1} G(t) x = \int_0^t \frac{d}{ds} \left(s^{n+1} G(s) x \right) ds = (n + 1) \int_0^t s^n G(s) x \, ds + \int_0^t s^{n+1} G(s) A x \, ds.$$

Sia ora $\{x_l\}$ una successione in D_A tale che:

$$\lim_{l \to \infty} x_l = 0, \quad \lim_{l \to \infty} A x = y \quad \text{con } y \in X$$

ponendo x_l al posto di x nella (1.7) e passando al limite per l tendente all'infinito si ottiene:

$$(1.8) \qquad \lim_{l \to \infty} \int_0^t s^n G(s) x_l \, ds = 0$$

$$(1.9) \qquad \lim_{l \to \infty} \int_0^t s^{n+1} G(s) A x_l \, ds = \int_0^t s^{n+1} G(s) y \, ds.$$

Infatti (DEFINIZIONE) [1.I] b) esiste un $K \in \mathbb{R}_+$ tale che:

$$\| s^n G(s) \| \leq K \quad \text{se} \quad 0 < s \leq t$$

ne segue:

$$\left\| \int_0^t s^n G(s) x_l \, ds \right\| \leq t K \| x_l \|$$

e inoltre:

$$\left\| \int_0^t s^{n+1}\, G(s)\,(Ax_l - y)\, ds \right\| \leq t^2\, K \, \| Ax_l - y \|$$

quindi si ottiene

$$\int_0^t s^{n+1}\, G(s)\, y\, ds = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+$$

cioè

$$s^{n+1}\, G(s)\, y = 0 \qquad \forall s \in \mathbb{R}_+$$

ne segue (DEFINIZIONE) [1.I] c) $y = 0$ cosicchè A è prechiuso.

2. Trasformata di Laplace.

In questo paragrafo G rappresenta un semigruppo di crescenza n in X, A il generatore infinitesimale di G, K un numero positivo tale che:

$$\| t^n\, G(t) \| \leq K \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{2.1}$$

Il seguente LEMMA riguarda l'andamento all'infinito di $\| G(t) \|$.

LEMMA [2.1] — *Esiste un numero positivo M e un numero ω tali che:*

$$\| t^n\, G(t) \| \leq M e^{\omega t} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ . \tag{2.2}$$

Inoltre se $x \in D_A$ per ogni intero non negativo k esiste un numero positivo M_k tale che:

$$\| t^n\, G(t)\, x \| \leq M_k\, e^{\omega t} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ . \tag{2.3}$$

DIM. — Poichè la funzione $\| G(t) \|$ è subadditiva nell'intervallo $1 \leq t < \infty$ esistono numeri M_1, ω_1 tali che ([3] p. 618):

$$\| G(t) \| \leq M_1\, e^{\omega_1 t} \quad \text{se} \quad t \geq 1. \tag{2.4}$$

In virtù di (2.1) e del LEMMA [1.I] segue ora facilmente la tesi.

DEFINIZIONE [2.1] — *L'estremo inferiore degli ω per i quali esiste un $M \in \mathbb{R}_+$ tale che valga* (2.2) *sarà detto il tipo di G; se $\omega < 0$ G sarà detto di tipo negativo.*

Osserviamo che si può sempre supporre G di tipo negativo: infatti se G è di tipo ω e se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ $e^{-(\omega+\varepsilon)t}\, G(t)$ è un semigruppo di crescenza n di tipo negativo.

Vogliamo ora definire sul semipiano $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ una funzione analitica $S(\lambda)$ a valori in in $\mathcal{L}(X, X)$ che avrà un ruolo analogo al risolvente nei semigruppi di classe c_0; i lemmi seguenti sono dedicati allo studio di alcune proprietà di $S(\lambda)$.

LEMMA [2.II] — *Posto*:

$$S(\lambda)\, x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^n\, G(t)\, x\, dt \qquad \forall\, x \in X \tag{2.5}$$

$S(\lambda)$ è una funzione analitica sul semipiauo $Re\,\lambda > \omega$ a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ e risulta:

$$\frac{d^k S(\lambda)\, x}{d\lambda^k} = \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{n+k}\, G(t)\, x\, dt \qquad \forall\, x \in X \tag{2.6}$$

$$\left\| \frac{d^k S(\lambda)}{d\lambda^k} \right\| \le \frac{k!\, M}{n!\, (Re\,\lambda - \omega)^{k+1}} \tag{2.7}$$

essendo k un intero non negativo e $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$.

DIM. — La (2.5) ha senso in virtù dei LEMMI [1.II] e [2.I], inoltre dagli stessi segue anche l'analiticità di $S(\lambda)$ e la (2.6); intine la (2.7) si prova facilmente tenendo conto di (2.2).

LEMMA [2.III] — *Se $x \in D_A$ allora $S(\lambda)\, x \in D_A$ e se $x \in D_{A^{n+1}}$ risulta*:

$$S(\lambda)(\lambda - A)^{n+1}\, x = (\lambda - A)^{n+1}\, S(\lambda)\, x = x. \tag{2.8}$$

DIM. — Se $x \in D_A$ e se $s \in \mathbb{R}_+$ si ha:

$$G(s)\, S(\lambda)\, x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^n\, G(t+s)\, x\, dt = \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{n!}\, e^{\lambda s} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, s^{n-k} \int_s^\infty e^{-\lambda t}\, t^k\, G(t)\, x\, dt$$

Gli integrali che figurano in (2.9) hanno senso in virtù di (2.3); da (2.3) segue anche che $G(s)\,S(\lambda)\,x$ è, come funzione di s, prolungabile a una funzione continua e derivabile in $\overline{\mathbb{R}}_+$ cosicchè $S(\lambda)\,x \in D_A$.

Si ha inoltre:

$$(2.10)\quad S(\lambda)\,A\,x = \lim_{s\to 0} S(\lambda)\,\frac{G(s)\,x - x}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{G(s)\,S(\lambda)\,x - S(\lambda)\,x}{s} = A\,S(\lambda)x.$$

Infine se $x \in D_{A^{n+1}}$ si ha:

$$(2.11)\qquad S(\lambda)(\lambda - A)^{n+1}\,x = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k\,\lambda^{n+1-k}\,I_k$$

essendo

$$(2.12)\qquad I_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,t^n\,\frac{d^k\,G(t)\,x}{dt^k}\,dt \qquad k = 0, 1, \dots, n+1\,.$$

Osserviamo che se $k < n+1$ in I_k è lecito integrare k volte per parti dato che le funzioni $\dfrac{d^k\,G(t)\,x}{dt^k}$, $k = 0, 1, \dots, n$ sono prolungabili a funzioni continue su $\overline{\mathbb{R}}_+$ (LEMMA [1.II]) e che vale la relazione (2.3).

Si ha inoltre se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}\,t^n\,\frac{d^{n+1}\,G(t)\,x}{dt^{n+1}}\,dt = e^{-\lambda\varepsilon}\,\varepsilon^n\left(\frac{d^n\,G(t)\,x}{dt^n}\right)_{t=\varepsilon} - \int_\varepsilon^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\,t^n\right)\frac{d^n\,G(t)\,x}{dt^n}\,dt.$$

e, passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene

$$(2.13)\qquad I_{n+1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,t^n\,\frac{d^{n+1}\,G(t)\,x}{dt^{n+1}}\,dt = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\,t^n\right)\frac{d^n\,G(t)\,x}{dt^n}\,dt$$

Integrando ora k volte per parti in I_k e n volte per parti in (2.13) si trova:

$$(2.14)\qquad S(\lambda)(\lambda - A)^{n+1}\,x = x$$

e quindi, in virtù di (2.10), la tesi

LEMMA [2.IV] — *Posto*:

$$(2.15)\qquad H_\lambda(t)\,x = G(t)\,S(\lambda)\,x \qquad \forall\, x \in X,\ \operatorname{Re}\lambda > \omega$$

allora $H_\lambda(t)$ *è prolungabile a una funzione continua su* $\widetilde{\mathbb{R}}_+$ *e si ha:*

$$\lim_{t\to 0} H_\lambda(t)\, x = S(\lambda)\, x \tag{2.16}$$

e se è $\omega < 0$ *si ha infine:*

$$\frac{d^{n+1}H_0(t)\, x}{dt^{n+1}} = G(t)x \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \tag{2.17}$$

DIM. — Si procede come per la dimostrazione del LEMMA [2.III].

3. Spettro di ordine n.

In questo paragrafo B rappresenta un operatore lineare prechiuso con $D_\infty(B)$ denso in X.

DEFINIZIONE [3.I] — *Diremo che* B *è di tipo* n *se esiste una funzione analitica* $S(\lambda, B)$ *a valori in* $\mathcal{L}(X, X)$ *definita su un insieme aperto non vuoto* $\varrho_n(B)$ *di* $\mathbb{C}$ *tale che:*

a) *Se* $x \in D_B$ *allora* $S(\lambda, B)\, x \in D_B$ $\quad \forall\, \lambda \in \varrho_n(B)$ *e si ha:*

$$BS(\lambda, B)\, x = S(\lambda, B)\, Bx. \tag{3.1}$$

b) *Se* $x \in D_{B^{n+1}}$ *si ha, per ogni* $\lambda \in \varrho_n(B)$

$$S(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1}\, x = (\lambda - B)^{n+1}\, S(\lambda, B)\, x = x. \tag{3.2}$$

c) *Sia* $\lambda \in \varrho_n(B)$, *se* $S(\lambda, B)\, x = 0$ *si ha allora* $x = 0$.

Supporremo sempre $S(\lambda, B)$ *massimale cioè che non esista un'estensione propria di* $S(\lambda, B)$ *verificante* a), b), c), *; diremo allora che* $S(\lambda, B)$ *è il risolvente di ordine* n *di* B, *che* $\varrho_n(B)$ *è l'insieme risolvente di ordine* n *di* B *e che* $\sigma_n(B) = \mathbb{C} - \varrho_n(B)$ *è lo spettro di ordine* n *di* B.

Se B è chiuso e di tipo 0 $S(\lambda, B)$ si riduce al risolvente $R(\lambda, B)$ di B e $\varrho_0(B)$ e $\sigma_0(B)$ rispettivamente all'insieme risolvente e allo spettro di B.

Osserviamo che, mentre il risolvente di un operatore chiuso è automaticamente analitico laddove esiste, per $n > 0$ l'analiticità di $S(\lambda, B)$ deve essere esplicitamente richiesta.

È noto ([3] p. 602) che se l'insieme risolvente di un operatore chiuso B su X non è vuoto allora ogni polinomio in B è chiuso; se B è di tipo n

allora lo spettro di B può coincidere con $\mathbb{C}$, ma sussiste il seguente risultato più debole:

Lemma [3.I] — *Se B è di tipo n in X e se $\lambda \in \varrho_n(B)$ allora $(\lambda - B)^{n+1}$ è prechiuso e, detta $\overline{(\lambda - B)^{n+1}}$ la minima estensione chiusa di $(\lambda - B)^{n+1}$, si ha:*

$$\overline{(\lambda - B)^{n+1}}\, S(\lambda, B)\, x = x \qquad \forall\, x \in X. \tag{3.3}$$

Dim. — Sia $\lambda \in \varrho_n(B)$ e sia $\{x_l\}$ una soccessione in $D_{B^{n+1}}$ tale che:

$$\lim_{l\to\infty} x_l = 0 \qquad\qquad \lim_{l\to\infty} (\lambda - B)^{n+1} x_l = y \qquad\qquad \text{con } y \in X$$

si ha allora:

$$S(\lambda, B)\, y = \lim_{l\to\infty} S(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1} x = 0$$

cosicchè (Definizione [3.I] c) si ha $y = 0$ e $(\lambda - B)^{n+1}$ è prechiuso.

Sia ora $x \in X$ e $\{z_l\}$ una successione in $D_{B^{n+1}}$ convergente a x, si ha:

$$\lim_{l\to\infty} S(\lambda, B)\, z_l = S(\lambda, B)\, x, \qquad \lim_{l\to\infty} (\lambda - B)^{n+1} S(\lambda, B)\, z_l = x$$

quindi $S(\lambda, B)\, x$ appartiene al dominio di $\overline{(\lambda - B)^{n+1}}$ e vale la (3.3).

Osserviamo che per $n > 0$, se $x \in D_{\overline{(\lambda-B)}^{n+1}}$ non è detto che $x \in D_B$; infatti se $y \in X$ $S(\lambda, B)\, y$ non appartiene in generale a D_B, se ciò accadesse per tutti gli y di X allora $(\lambda - B)\, S(\lambda, B)$ sarebbe un operatore continuo e quindi B sarebbe di tipo $n - 1$.

Nel seguito di questo paragrafo B rappresenta un operatore prechiuso su X di tipo n con $D_\infty(B)$ denso in X; porremo inoltre:

$$S^{(m)}(\lambda, B) = \frac{d^m S(\lambda, B)}{d\lambda^m} \qquad \lambda \in \varrho_n(B)$$

per ogni intero non negativo m.

Lemma [3.II] — *Se l e m sono interi non negativi si ha:*

$$S^{(l)}(\lambda, B)\, S^{(m)}(\lambda, B) = S^{(m)}(\lambda, B)\, S^{(l)}(\lambda, B)\ \forall\, \lambda \in \varrho_n(B). \tag{3.4}$$

Dim. — Ovvia.

LEMMA [3.III] — *Se $x \in D_\infty(B)$ allora $S^{(l)}(\lambda, B)\,x \in D_\infty(B)$ per ogni intero non negativo l e per ogni $\lambda \in \varrho_n(B)$.*

DIM. — Per $l = 0$ la tesi è evidente (DEFINIZIONE [3.I] a); basta allora provare il LEMMA per $l = 1$.

Si ha, se $x \in D_\infty(B)$ e $\lambda \in \varrho_n(B)$, $S(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1} x = X$ da cui, derivando rispetto a λ:

$$S^{(1)}(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1} x = -(n+1)(\lambda - B)^n S(\lambda, B)\,x \tag{3.5}$$

applicando ad ambo i membri $S(\lambda, B)$ e usando il LEMMA [3.II] si ottiene:

$$S^{(1)}(\lambda, B)\,x = -(n+1)\,S^2(\lambda, B)(\lambda - B)^n x \tag{3.6}$$

e quindi la tesi.

LEMMA [3.IV] — *Risulta, per ogni $\lambda \in \varrho_n(B)$ e per ogni intero non negativo k*

$$S^k(\lambda, B)\,x = \frac{n\,!}{(n\,k + k - 1)!}\,(-1)^{(nk-n+k-1)}\,S^{(nk+k-n-1)}(\lambda, B)\,x, \qquad \forall\, x \in X. \tag{3.7}$$

DIM. — Sia dapprima $x \in D_\infty(B)$, applicando ad ambo i membri di (3.5) $(\lambda - B)\,S(\lambda, B)$ si ottiene:

$$S^{(1)}(\lambda, B)(\lambda - B)\,x = -(n+1)\,S(\lambda, B)\,x. \tag{3.8}$$

Derivando ancora rispetto a λ si ottiene:

$$S^{(2)}(\lambda, B)(\lambda - B)\,x = -(n+2)\,S^{(1)}(\lambda, B)\,x$$

applicando $\lambda - B$ e sostituendo (3.8) si ottiene:

$$S^{(2)}(\lambda, B)\,(\lambda - B)^2 x = (-1)^2 (n+1)(n+2)\,S(\lambda, B)\,x.$$

Procedendo in modo analogo si perviene alla relazione:

$$S^{(nk+k-n-1)}(\lambda, B)\,(\lambda - B)^{nk+k-n-1} x = (-1)^{(nk+k-n-1)}\,\frac{(nk + k - 1)\,!}{n\,!}\,S(\lambda, B)\,x.$$

Moltiplicando per $S^{k-1}(\lambda, B)$ e tenendo conto del LEMMA [3.III] si ha la (3.7) per $x \in D_\infty(B)$ ma dato che $D_\infty(B)$ è denso in X si ha la tesi.

Proviamo ora un'identità che generalizza l'identità del risolvente:

Lemma [3.V] — *Siano $\lambda, \mu \in \varrho_n(B)$, $\lambda \neq \mu$, posto:*

$$B_{\lambda,\mu} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (\mu^k - \lambda^k)(-1)^{n-k} B^{n-k} S(\lambda, B) S(\mu, B) \tag{3.9}$$

allora $B_{\lambda,\mu} \in \mathcal{L}(X, X)$ e risulta:

$$S(\lambda, B) - S(\mu, B) = (\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}) S(\lambda, B) S(\mu, B) + B_{\lambda,\mu}. \tag{3.10}$$

Dim. — Sia $x \in D_\infty(B)$, si ha allora:

$$(\mu - B)^{n+1} x - (\lambda - B)^{n+1} x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (\mu^k - \lambda^k)(-1)^{n-k} B^{n-k} x =$$

$$\mu^{n+1} - \lambda^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (\mu^k - \lambda^k)(-1)^{n-k} B^{n-k} x.$$

Ne segue, applicando $S(\lambda, B) S(\mu, B)$:

$$S(\lambda, B) x - S(\mu, B) x = (\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}) S(\lambda, B) S(\mu, B) x + B_{\lambda,\mu} x$$

cosicchè, dato che $D_\infty(B)$ è denso in X si ha la tesi.

Concludiamo questo paragrafo con il seguente Teorema che dà una condizione necessaria sul generatore infinitesimale di un semigruppo di crescenza n.

Teorema [3.I] — *Se G è un semigruppo di crescenza n su X, il suo generatore infinitesimale A è di tipo n e lo spettro di ordine n di A è contenuto in un semipiano* $\mathrm{Re}\, \lambda > \omega$, *$\omega$ opportuno numero reale.*

Inoltre il risolvente di ordine n di A $S(\lambda, A)$ e dato da:

$$S(\lambda, A) x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n G(t) x \, dt, \quad \forall x \in X, \quad \mathrm{Re}\, \lambda > \omega \tag{3.11}$$

e valgono le relazioni:

$$\| S^{(k)}(\lambda, A) \| \leq \frac{k!\, M}{n!\, (\mathrm{Re}\, \lambda - \omega)^{k+1}}, \quad \forall\, \mathrm{Re}\, \lambda > \omega, k = 0, 1, \ldots \tag{3.12}$$

con M opportuno numero positivo.

DIM. Che $D_\infty(A)$ sia denso in X segue da ([5] p. 308), le altre affermazioni seguono dal LEMMA [2.II].

4. Generazione del semigruppo.

In questo paragrafo B rappresenta un operatore lineare prechiuso di tipo n con $D_\infty(B)$ denso in X. Supporremo che il risolvente di ordine n $S(\lambda, B)$ di B sia analitico in un aperto contenente il semipiano $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ e che verifichi le relazioni:

$$(4.1) \qquad \| S^{(k)}(\lambda, B) \| \leq \frac{M\,k\,!}{n\,!\,\operatorname{Re}\lambda^{n+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0$$

dove M è un opportuno numero positivo e $S^{(k)}(\lambda, B)$ la derivata k^{ma} di $S(\lambda, B)$.

Seguendo l'idea della dimostrazione di Yosida ([7]) daremo un'inversione del TEOREMA [3.II] provando che esiste un semigruppo di crescenza n su X, $G(t)$ il cui generatore infinitesimale A è di tipo n e ha lo stesso risolvente di ordine n di B.

Osserviamo che se $S(\lambda, B)$ verifica, in luogo di (4.1) le condizioni (3.12) allora $S(\lambda, B - \omega - \varepsilon) = S(\lambda + \omega + \varepsilon, B)$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, verifica le (4.1) cosicchè queste non sono più restrittive delle (3.12) dato che evidentemente $B - \omega - \varepsilon$ è ancora di tipo n.

LEMMA [4.I] — *Sia i un intero positivo, posto*:

$$(4.2) \qquad B_i = \frac{1}{n+1}\left[i^{n+2} S(i, B) - i\right]$$

$$(4.3) \qquad G(t) = e^{Bit}$$

risulta:

$$4.4) \qquad \| G_i(t) \| \leq 1 + \frac{N}{t^n}$$

essendo $N = 2M(n+1)$

DIM. — Si ha:

$$G_i(t) = e^{-\frac{it}{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{nk+2k}\, t^k}{k\,!\,(n+1)^k} S^k(i, B)$$

ne segue:

$$\| G_i(t) \| \leq e^{-\frac{it}{n+1}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \, i^{nk+2k}}{k!\,(n+1)^k} \| S^k(i, B) \| \right]$$

e, in virtù del LEMMA [3.IV] e delle (4.1) si ottiene:

$$\| G_i(t) \| \leq e^{-\frac{it}{n+1}} \left\{ 1 + M \left(\frac{n+1}{t} \right)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k+n)!} \left(\frac{it}{n+1} \right)^{k+n} \right\}$$

avendo posto

$$a_k = \frac{(k+n)!}{k!} \, \frac{(nk+k-n-1)!}{(nk+k-1)!} \, .$$

Essendo $a_k \leq 2(1+n)$ si trova:

$$\| G_i(t) \| \leq e^{-\frac{it}{n+1}} \left\{ 1 + M \left(\frac{n+1}{t} \right)^n 2(1+n) \, e^{\frac{it}{n+1}} \right\} \leq 1 + \frac{2M(n+1)^{n+1}}{t^n} \, .$$

LEMMA [4.II] — *Sia $x \in D_\infty(B)$ e k un intero positivo, si ha*:

$$\lim_{i \to \infty} B_i^k x = B^k x. \tag{4.5}$$

DIM. — Risulta, se $x \in D_\infty(B)$:

$$(i - B)^{n+1} B_i x = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k} \, i^{k+1} B^{n-k-1} x$$

Poniamo $B_i - B = \Delta_i$, si ha:

$$(i - B)^{n+1} \Delta_i x = \sum_{k=0}^{n} d_k \, i^k B^{n-k+2} x$$

essendo

$$d_k \begin{cases} = (-1)^n \quad \text{se} \quad k = 0 \\ = \left[\dfrac{1}{n+1} \dbinom{n+1}{k-1} - \dbinom{n+1}{k} \right] (-1)^{n-k+1} \quad \text{se} \quad k > 0 \end{cases}$$

ne segue

$$\Delta_i x = \sum_{k=0}^{n} d_k \, i^k S(i, B) x_k \, , \quad \text{avendo posto} \quad x_k = B^{n+2-k} x.$$

Vogliamo ora provare che risulta $\lim\limits_{i \to \infty} \Delta_i x = 0$; dimostriamo ad esempio che si ha:

$$\lim_{i \to \infty} i^n S(i, B) x_n = 0.$$

Osserviamo che l'andamento di $\| i^n S(i, B) x_n \|$ per $i \longrightarrow \infty$ è il seguente:

$$\| i^n S(i, B) x_n \| \sim i^{n-1}$$

posto $x_n = S(\lambda, B) y$ con $\lambda \in \varrho_n(B), y \in D_\infty(B)$ si ha, usando la (3.10):

$$i^n S(i, B) S(\lambda, B) y = \frac{i^n}{(\lambda^{n+1} - i^{n+1})} (S(i, B) y - S(\lambda, B) y) +$$

$$\frac{i^n}{\lambda^{n+1} - i^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot (\lambda^k - i^k)(-1)^{n-k+1} B^{n-k} S(i, B) x_n .$$

Osserviamo che l'andamento della norma del secondo membro di questa relazione per $i \longrightarrow \infty$ è $n-2$; procedendo allora in modo analogo si ha la tesi per $k = 1$, per $k > 1$ si procede per ricorrenza.

Lemma [4.III] — *Posto*:

$$F(\alpha, \beta) = \frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

sussiste l'identità:

$$(4.6) \qquad F(\alpha, \beta) = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1 + (-1)^{k-1})}{k!} \frac{(\alpha - \beta)^k}{2^k} +$$

$$\frac{(\alpha - \beta)^n}{n!} \int_0^{1/2} s^n \left[(-1)^n e^{\alpha s} e^{\beta(1-s)} + e^{\beta s} e^{\alpha(1-s)}\right] ds.$$

Dim. — Si prova per verifica diretta.

Lemma [4.IV] — *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *e per ogni* $x \in D_\infty(B)$ *esiste un intero positivo* $i_\varepsilon(x)$ *tale che se* i *e* j *superano* $i_\varepsilon(x)$ *risulta*:

$$(4.7) \qquad \| G_i(t) x - G_j(t) x \| \leq \varepsilon f(t)$$

con $f(t)$ *funzione reale e continua su* $\mathbb{R}_+$

In particolare esiste il $\lim_{i \to \infty} G_i(t)\, x$.

Dim. — Dalla (4.6) con $\alpha = B_i t$, $\beta = B_j t$ si ha:

$$G_i(t) = - G_j(t) = G_i\left(\frac{t}{2}\right) G_j\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} \frac{(1 + (-1)^{k-1})}{k!} \frac{(B_i - B_j)^{k+1}}{2^k} t^{k+1} +$$

$$\frac{(B_i - B_j)^{n+1}}{n!} t^{n+1} \cdot \int_0^{1/2} s^k \left[(-1)^n G_i(ts)\, G_j(t - ts) + G_j(ts)\, G_i(t - ts)\right] ds.$$

In virtù del Lemma [4.II] dato x in $D_\infty(B)$ e $\varepsilon > 0$ esiste un intero $i_\varepsilon(x)$ tale che se i e j superano $i_\varepsilon(x)$ risulta:

$$\| (B_i - B_j)^k x \| < \varepsilon \qquad k = 1, \dots n + 1$$

ne segue dalla (4.4)

$$\| G_i(t)\, x - G_j(t)\, x \| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2^n N}{t^n}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k+1}}{k!\, 2^k} +$$

$$\varepsilon \frac{t^{n+1}}{n!} 2 \int_0^{1/2} s^n \left(1 + \frac{N}{t^n s^n}\right)\left(1 + \frac{N}{t^n (1 - s)^n}\right) ds$$

e quindi la (4.7) con:

$$f(t) = t \left(1 + \frac{N\, 2^n}{t^n}\right)^2 e^{\frac{t}{2}} + \frac{2t}{n!} \int_0^{1/2} (t^n s^n + N) \left(1 + \frac{N}{t^n (1 - s)^n}\right) ds.$$

Lemma [4.V] — *Posto*:

(4.8) $$G(t)\, x = \lim_{i \to \infty} G_i(t)\, x \qquad \forall\, x \in X,\ t \in \mathbb{R}_+$$

allora $G(t)$ *è un operatore lineare continuo su* X *e risulta*:

(4.9) $$\| G(t) \| \leq 1 + \frac{N}{t^n}$$

(4.10) $$S(\lambda, B)\, x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n G(t)\, x dt \qquad \mathrm{Re}\, \lambda > 0.$$

DIM. — Se $x \in D_\infty(B)$ il limite (4.8) esiste per il LEMMA [4.IV], quindi in virtù della (4.4) esiste per ogni x di X e vale (4.9).

Proviamo la (4.10); osserviamo intanto che se $x \in X$ e $\operatorname{Re}\lambda > 0$ vale l'identità:

$$(4.11) \qquad (\lambda - B_i)^{-n-1}\, x = \frac{1}{n\,!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^n\, G_i(t)\, x\, dt$$

come si verifica direttamente usando (4.9).

Sia $\operatorname{Re}\lambda > 0$, poniamo

$$(4.12) \qquad \Gamma x = \lim_{i\to\infty} (\lambda - B_i)^{-n-1}\, x \qquad \forall\, x \in X$$

dalla (4.11) segue che tale definizione ha senso e dalla (4.8) segue la relazione:

$$(4.13) \qquad \Gamma x = \frac{1}{n\,!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^n\, G(t)\, x\, dt.$$

Sia ora $x \in D_\infty(B)$, poniamo:

$$(4.14) \qquad y = S(\lambda, B)\, x, \quad x_i = (\lambda - B_i)^{n+1}\, y$$

risulta allora successivamente:

$$(4.15) \qquad x = (\lambda - B)^{n+1}\, y = \lim_{i\to\infty} x_i$$

$$(4.16) \qquad y = \lim_{i\to\infty} (\lambda - B_i)^{-n-1}\, (\lambda - B_i)^{n+1}\, y = \lim_{i\to\infty} (\lambda - B_i)^{-n-1}\, x_i = \Gamma x$$

dato che nella topologia forte il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti.

Da (4.15) segue allora $x = (\lambda - B)^{n+1} y = (\lambda - B)^{n+1}\Gamma x$ cioè $S(\lambda, B)x = \Gamma x$; poichè $D_\infty(B)$ è denso in X si ha $\Gamma = S(\lambda, B)$ e quindi la tesi.

TEOREMA [4.I] — *Sia B un operatore lineare prechiuso con $D_\infty(B)$ denso in X e di tipo n verificante le relazioni* (4.1), *allora esiste un unico semigruppo G di crescenza n su X tale che, detto A il suo generatore infinitesimale si ha:*

$$(4.17) \qquad S(\lambda, A) = S(\lambda, B) \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

DIM. — Proviamo che $G(t)x$ è continua in $\mathbb{R}_+$ per ogni fissato x in X; sia dapprima $x \in D_\infty(B)$, si ha allora:

$$\| G(t)x - G(s)x \| = \lim_{i\to\infty} \| G_i(t)x - G_i(s)x \| \leq \lim_{i\to\infty} \| G_i(t) - G_j(t)x \| + \| G_j(t)x - G_j(s)x \| + \lim_{i\to\infty} \| G_j(s)x - G_i(s)x \| .$$

Dato $\varepsilon > 0$ sia $i_\varepsilon(x)$ come nel LEMMA [4.IV], si ha allora se i e j sono maggiori di $i_\varepsilon(x)$:

$$\| G(t)x - G(s)x \| \leq 2\varepsilon + \| G_j(t)x - G_j(s)x \| ;$$

poichè $G_j(t)$ è continuo si ha la tesi. Sia ora x arbitrario $\varepsilon > 0$ e $y \in D_\infty(B)$ tale che $\| x - y \| < \varepsilon$, si ha allora:

$$\| G(t)x - G(s)x \| \leq \| G(t)x - G(t)y \| + \| G(t)y - G(s)y \| + \| G(s)y - G(s)x \| \leq \varepsilon\left(2 + \frac{N}{t^n} + \frac{N}{s^n}\right) + \| G(t)y - G(s)y \| ,$$

quindi la continuità di $G(t)x \; \forall\, x \in X$ è provata.

Osserviamo ora che si ha

$$G(t+s)x = \lim_{i\to\infty} G_i(t+s)x = \lim_{i\to\infty} G_i(t)\,G_i(s)x = G(t)\,G(s)x \;\; \forall\, x \in X \;\; t, s \in \mathbb{R}_+ .$$

Inoltre dal LEMMA [4.V] segue che G è di crescenza n e che vale (4.17); resta allora da verificare le condizioni c) e d) della DEFINIZIONE [1.I].

Sia $G(t)x = 0 \; \forall\, t \in \mathbb{R}_+$ con $x \in X$, si ha allora dalla (4.10) $S(\lambda, B)x = 0$ con $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$; ne segue $\overline{(\lambda - B)}^{n+1} S(\lambda, B)x = x = 0$.

Sia infine $Y = \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \{ y \in X, y = G(t)x, x \in X \}$ e supponiamo per assurdo che il sottospazio vettoriale generato da Y non sia denso in X; esiste allora un funzionale lineare continuo non nullo f su X tale che $f(G(t)x) = 0 \; \forall\, t \in \mathbb{R}_+, x \in X$ cosicchè da (4.10) segue $f(S(\lambda, B)x) = 0$ con $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ e $x \in X$ e, in particolare, $f(x) = 0 \; \forall\, x \in D_\infty(B)$ dato che se $x \in D_\infty(B)$ si ha $x = S(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1} x$; ma ciò è assurdo poichè $D_\infty(B)$ è denso in X.

Infine osserviamo che $S(\lambda, A) = S(\lambda, B)$ è la trasformata di Laplace di $t^n G(t)$ cosicchè dalla unicità della trasformata di Laplace segue l'unicità di G.

5. Problema di Cauchy.

In questo paragrafo B rappresenta un operatore lineare chiuso in X verificante le ipotesi del TEOREMA [4.I], G il semigruppo di crescenza n associato a B secondo la (4.8), A il generatore infinitesimale di G.

Daremo condizioni di risolubilità per il seguente problena di Cauchy :

$$(5.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Bu(t) & t \in \mathbb{R}_+ \\ \lim\limits_{t\to 0} u(t) = u_0 & u_0 \in X \end{cases}$$

LEMMA [5.I] — *Se $x \in D_B$ allora $G(t)x \in D_B$ e si ha:*

$$(5.2)\qquad BG(t)x = G(t)Bx \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+.$$

DIM. — Se $x \in D_B$, $B_i^k x$ appartiene a D_B per ogni coppia di interi i e k, quindi posto $B_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{B_i^k t^k}{k!}$, $t \in \mathbb{R}_+$, si ha: $\lim\limits_{m\to\infty} BP_m x = \lim\limits_{m\to\infty} P_m Bx = G_i(t)x$.

Ne segue $G_i(t)x \in D_B$ e $BG_i(t)x = G_i(t)Bx$ dato che B è chiuso.

Si ha inoltre $\lim\limits_{i\to\infty} BG_i(t)x = \lim\limits_{i\to\infty} G_i(t)Bx = G(t)Bx$, ne segue $G(t)x \in D_B$ e $BG(t)x = G(t)Bx$.

LEMMA [5.II] — *Se $x \in D_{B^{n+1}}$ allora per ogni $t \in \mathbb{R}_+$ $G(t)x$ appartiene a $D_{A^{n+1}} \cap D_{B^{n+1}}$ e si ha:*

$$(5.3)\qquad A^k G(t)x = B^k G(t)x \qquad x \in X \qquad k = 1, 2, \dots n+1.$$

DIM. — Se $x \in D_{B^{n+1}}$ e $\operatorname{Re}\lambda > 0$ si ha $S(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1}x = x$; posto $y = (\lambda - B)^{n+1}x$ si ha, in virtù del TEOREMA [4.I], $x = S(\lambda, B)y = S(\lambda, A)y$.

Ne segue $G(t)x = S(\lambda, A)G(t)y$ cosicchè, in virtù del LEMMA [2.IV] si ha $G(t)x \in D_{A^{n+1}}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$. Posto inoltre $z = G(t)x$ si ha $z \in D_{B^{n+1}}$ per il LEMMA [5.I] ne segue $S(\lambda, B)\overline{(\lambda - B)}^{n+1}z = z$ cioè $S(\lambda, A)(\lambda - B)^{n+1}z = z$; applicando a sinistra $\overline{(\lambda - A)}^{n+1}$ ne segue $(\lambda - B)^{n+1}z = (\lambda - A)^{n+1}z$ e, data l'arbitrarietà di λ si ha la tesi.

TEOREMA [5.I] — *Sia B un operatore lineare chiuso su X verificante le condizioni del* TEOREMA [4.I]. *Allora se $u_0 \in D_{B^{n+1}}$ il problema di Cauchy* (5.1) *ammette una sola soluzione u $n+1$ volte derivabile con:*

$$(5.4)\quad u(t) \in D_{B^{n+1}}\ \forall\, t \in \overline{\mathbb{R}}_+,\ \frac{d^k u(t)}{dt^k} = B^k u(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad k = 1, 2, \dots n+1.$$

DIM. — Se $u_0 \in D_{B^{n+1}}$ poniamo $u(t) = G(t)u_0$ $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$; u verifica (5.1) e (5.4) in virtù del LEMMA [5.II] e del LEMMA [2.IV].

Sia viceversa v una soluzione di (5.1) verificante (5.4) e sia $0 < s < t$; dato che $v(s)$ appartiene a $D_{B^{n+1}}$ la funzione $G(t-s)\, v(s)$ è derivabile in s in virtù del LEMMA [5.II] e si ha:

$$\frac{d}{ds}\left(G(t-s)\, v(s)\right) = A\, G(t-s)\, v(s) - G(t-s)\frac{dv(s)}{ds} =$$
$$A\, G(t-s)\, v(s) - B\, G(t-s)\, v(s) = 0.$$

Poniamo allora $c(t) = G(t-s)\, v(s)\; t \in \mathbb{R}^+$; se $t > 0$ si ha $\lim\limits_{s \to 0} G(t-s)\, v(s) = G(t)\, u_0 = u(t)$. Ne segue $u(t) = c(t) = G(t-s)\, v(s)$ e passando al limite per $t \to s$ e tenendo conto che $v(s) \in D_{B^{n+1}}$ si ottiene $u(s) = v(s)$.

6. Semigruppi analitici di crescenza n.

In questo paragrafo G rappresenta un semigruppo di crescenza n tale che:

$$\| t^n\, G(t) \| \leq M, \qquad M \in \mathbb{R}_+ . \tag{6.1}$$

Daremo le condizioni affinchè $G(t)$ sia prolungabile a una funzione analitica $G(z)$ su un settore S_θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; seguiremo sostanzialmente la dimostrazione di Yosida ([8]).

DEFINIZIONE [6.I] — *Diremo che un semigruppo di crescenza n G è prolungabile in un settore S_θ se esiste una funzione analitica $G(z)$ su S_θ a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ tale che:*

a) $$G(z_1 + z_2) = G(z_1)\, G(z_2) \qquad \forall\, z_1, z_2 \in S_\theta .$$

b) *Esiste un numero positivo K e un numero reale ω tali che*,

$$\| z^n\, G(z) \| \leq K\, e^{\omega \operatorname{Re} z} \qquad \forall\, z \in S_\theta . \tag{6.2}$$

TEOREMA [6.I] — *Sia G un semigruppo di crescenza n verificante* (6.1); *supponiamo inoltre che posto $L(t) = t^n\, G(t)$ risulti*:

$$\| L^{(k)}(t) \| \leq \frac{N^k\, k^k}{t^k}\; k = 0, 1, \ldots,\; t \in \mathbb{R}_+,\; N \in \mathbb{R}_+ \tag{6.3}$$

essendo $L^{(k)}(t)$ la derivata k^{ma} di $L(t)$.

Allora G è prolungabile analiticamente su S_θ con $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{eN}\right)$ *e risulta inoltre, detto $G(z)$ il prolungamento analitico di $G(t)$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ con $\varepsilon < \theta$*

$$\|G(z)\| \leq \frac{K_\varepsilon}{|z|^n} \qquad \forall\, z \in S_{\theta-\varepsilon} \quad con \qquad K_\varepsilon = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(\theta-\varepsilon)}. \tag{6.4}$$

DIM. — Sia $t \in \mathbb{R}_+$ poniamo:

$$L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^k}{k!} L^{(k)}(t) \tag{6.5}$$

e cerchiamo il raggio di convergenza della serie (6.5), si ha

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^k}{k!} L^{(k)}(t) \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{eM\,|z-t|}{t} \right)^k$$

cosicchè la serie (6.5) converge se $|z-t| < t/eM$, quindi al variare di t in $\mathbb{R}_+$ si trova che $L(z)$ ha senso e è analitica nel settore S_θ con θ dato da $\theta = \operatorname{arc\,sen}(1/eN)$.

È chiaro che $L(z)$ è il prolungamento analitico di $L(t)$ e che $G(z) = \frac{1}{z^n} L(z)$ è il prolungamento analitico di $G(z)$.

Si ha inoltre $\|L(z)\| \leq \dfrac{1}{1 - eM\dfrac{|z-t|}{t}}$ cosicchè segue (6.4).

LEMMA [6. II] — *Sia G un semigruppo analitico di crescenza n su S_θ tale*

$$\|z^n G(z)\| \leq M \qquad \forall\, z \in S_\theta \tag{6.6}$$

e sia ε un numero tale che $0 < \varepsilon < \theta$.

Allora, detto A il generatore infinitesimale di G e $S(\lambda, A)$ il risolvente di ordine n di A, $S(\lambda, A)$ è prolungabile analiticamente sul settore $S_{\frac{\pi}{2}+\theta-\varepsilon}$ e risulta:

$$\|S(\lambda, A)\| \leq M'/|\lambda| \qquad \forall\, \lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\theta-\varepsilon} \qquad con\ M' \in \mathbb{R}^+. \tag{6.7}$$

DIM. — Poniamo $L(z) = z^n G(z)$ e sia $0 < \psi < \theta$, si verifica allora facilmente che si ha:

$$S(\lambda, A) = \frac{1}{n\,!} \int_{\Gamma_+} e^{-\lambda z} L(z)\, dz = \frac{1}{n\,!} \int_{\Gamma_-} e^{-\lambda z} L(z)\, dz \tag{6.8}$$

essendo $\Gamma_\pm = \{ z \in \mathbb{C} ; z = e^{\pm i\psi} t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \}$.

La prima delle (6.8) ci permette di prolungare analiticamente $S(\lambda, A)$ nel semipiano $\mathrm{Re}(\lambda e^{i\psi}) > 0$ e la seconda nel semipiano $\mathrm{Re}(\lambda e^{-i\psi}) > 0$; sempre da (6.8) segue inoltre:

$$\| S(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{n\,!\, \mathrm{Re}(\lambda e^{\pm i\psi})} \qquad \mathrm{Re}(\lambda e^{\pm i\psi}) > 0 . \tag{6.9}$$

In particolare se $0 < \theta - \varepsilon < \psi$ si ha:

$$\| S(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{n!\, |\lambda|} F(\lambda) \qquad \text{se} \qquad -\frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon \leq \arg \lambda \leq 0$$

avendo posto $F(\lambda) = \dfrac{|\lambda|}{\mathrm{Re}(\lambda e^{\pm i\psi})}$; si trova

$$\mathrm{Sup}\, \{ F(\lambda) ; -\frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon \leq \arg \lambda \leq 0 \} = \frac{1}{\mathrm{sen}(\psi - \theta + \varepsilon)}$$

cosicchè si ha:

$$\| S(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{n\,!\, \mathrm{sen}(\psi - \theta + \varepsilon)\, |\lambda|} \qquad \text{se} \qquad -\frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon \leq \arg \lambda \leq 0$$

in modo analogo si prova:

$$\| S(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{n\,!\, \mathrm{sen}(\psi - \theta + \varepsilon)\, |\lambda|} \qquad \text{se} \qquad 0 \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{2} + \theta - \varepsilon$$

cosicchè ponendo $M' = M/(n\,!\, \mathrm{sen}(\psi - \theta + \varepsilon))$, si ha la tesi.

LEMMA [6.III] — *Sia $F(\lambda)$ una funzione a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ analitica su un settore $S_\theta + \frac{\pi}{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ tale che:*

$$\| F(\lambda) \| \leq M / |\lambda| . \tag{6.10}$$

Allora $F(\lambda)$ è la trasformata di Laplace di una funzione continua $\psi(t)$ su $\mathbb{R}_+$ verificante la relazione:

$$\|\psi(t)\| \leq N \text{ con } N \in \mathbb{R}_+ . \tag{6.11}$$

DIM. Sia $\varepsilon > 0$ poniamo

$$\Gamma_\pm \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda = \varepsilon - \tau e^{\mp i\theta'}, \quad 0 \leq \tau < +\infty\} \qquad \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\psi_\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pm} e^{\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda$$

$$\psi(t) = \psi_+(t) + \psi_-(t)$$

gli integrali considerati hanno senso in virtù della (6.10).

Posto $\xi = \lambda t$ si ha:

$$\psi_\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pm(t)} e^{\xi} \cdot F\left(\frac{\xi}{t}\right) \frac{d\xi}{t}$$

essendo

$$\Gamma_\pm(t) = \{\xi \in \mathbb{C}; \quad \xi = \varepsilon t - \tau e^{\mp i\theta'} \qquad 0 \leq \tau < +\infty\}$$

ne segue

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} e^{\xi} F\left(\frac{\xi}{t}\right) \frac{d\xi}{t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} e^{\xi} F\left(\frac{\xi}{t}\right) \frac{d\xi}{t} = x_+(t) + x_-(t)$$

avendo posto

$$x_\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pm} e^{\xi} F\left(\frac{\xi}{t}\right) \frac{d\xi}{t} .$$

Si ha

$$\|x_\pm(t)\| \leq \frac{M}{2\pi} e^{\varepsilon} \int_0^\infty e^{-\tau\cos\theta'} \frac{d\tau}{\sqrt{(\varepsilon - \tau\cos\theta')^2 + \tau^2 \operatorname{sen}^2\theta'}}$$

cioè $\|\psi(t)\| \leq N$ avendo posto

$$N = \frac{M}{\pi} e^{\varepsilon} \int_0^\infty e^{-\tau\cos\theta'} \frac{d\tau}{\sqrt{(\varepsilon - \tau\cos\theta')^2 + \tau^2 \operatorname{sen}^2\theta'}} .$$

È chiaro allora che risulta

$$F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \psi(t)\, dt.$$

Teorema [6.II] — *Sia B un operatore lineare chiuso in X di tipo n e tale che $D_\infty(B)$ sia denso in X e che sia:*

$$\| S(\lambda, B) \| \leq M/|\lambda| \qquad \forall\, \lambda \in S_\theta + \frac{\pi}{2} \tag{6.12}$$

essendo $S(\lambda, B)$ il risolvente di ordine n di B, M un opportuno numero positivo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Allora esiste un unico semigruppo di crescenza n, $G(t)$ analitico su S_θ tale che, detto A il suo generatore infinitesimale, sia $S(\lambda, A) = S(\lambda, B)$

Dim. Poniamo:

$$\psi_\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pm} e^{\lambda t} S(\lambda, B)\, d\lambda$$

$$\psi(t) = \psi_+(t) + \psi_-(t)$$

essendo $\Gamma_\pm$ definiti come nella dimostrazione del Lemma [6.III]; da questo segue allora $\| \psi(t) \| \leq N$ con $N \in \mathbb{R}_+$ e inoltre $S(\lambda, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \psi(t)\, dt$ da cui

$$S^{(k)}(\lambda, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (-t)^k \psi(t)\, dt$$

$$\| S^{(k)}(\lambda, B) \| \leq N \frac{(k-1)!}{(\mathrm{Re}\,\lambda)^k} \ \mathrm{Re}\,\lambda > 0.$$

Quindi, per il Teorema [4.I] esiste un semigruppo di crescenza n, $G(t)$ tale che, detto A il suo generatore infinitesimale, risulti $S(\lambda, A) = S(\lambda, B)$; ne segue allora $\psi(t) = t^n G(t)$ data l'unicità della Trasformata di Laplace.

Derivando $\psi_{\pm}(t)$ k volte si trova:

$$\psi_{\pm}^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}} e^{\lambda t} t^k S(\lambda, A) \, d\lambda$$

$$\| \psi_{\pm}^{(k)}(t) \| \leq \frac{1}{2\pi} e^{\varepsilon t} N \int_0^{\infty} e^{-\tau t \cos\theta'} \, | \varepsilon - \tau e^{\mp i\theta'} |^{k-1} \, d\tau \quad \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\leq \frac{N}{2\pi} \frac{e^{\varepsilon(1+\cos\theta')t}}{\cos^k \theta' \, t^k} (k-1)!$$

Si prova allora facilmente che $e^{-\varepsilon(1+\cos\theta')t} \, G(t)$ verifica le ipotesi del TEOREMA [6.I] cosicchè segue la tesi.

7. Esempio.

In questo paragrafo Y rappresenta uno spazio di Banach complesso (con norma $\| \ \|$) U un operatore lineare chiuso con dominio denso in Y generatore infinitesimale di un semigruppo di classe $H(-\varphi, \varphi)$ ([5]) con $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; inoltre $R(\lambda, U)$ è il risolvente di U e supporremo che $R(\lambda, U)$ verifichi la relazione:

(7.1) $$\| R(\lambda, U) \| \leq M / |\lambda| \qquad \forall \lambda \in S\varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Consideriamo l'equazione differenziale:

(7.2) $$\sum_{k=0}^{n} a_k U^k \frac{d^{n-k} u}{dt^{n-k}} = 0 \quad a_0 \neq 0 \quad a_n \neq 0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

e con $u(t)$ funzione su $\mathbb{R}_+$ a valori in Y.

La (7.2) è equivalente al sistema:

(7.3) $$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = v_1 \\ \dfrac{dv_1}{dt} = v_2 \\ \cdots \\ \dfrac{dv_{n-1}}{dt} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_0} U^k v_{n-k} - \frac{a_n}{a_0} U^n_u . \end{cases}$$

Indichiamo ora con X il prodotto di n copie di Y, X è uno spazio di Banach con la norma: $\| x \| = \sum_{k=1}^{n} \| x_n \|$ essendo $x = (x_1, \dots x_n) \in X$.

Il sistema (7.3) è equivalente alla seguente equazione:

$$\frac{dZ}{dt} = BZ \tag{7.4}$$

essendo $Z = (u, v_1, \dots v_{n-1})$ e B l'operatore su X così definito:

$$B(x_1, \dots, x_n) = \left(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} U^k x_{n-k+1} \right) \tag{7.5}$$

che si può rappresentare mediante la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_n}{a_0} U^n & -\frac{a_{n-1}}{a_0} U^{n-1} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} U \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Operando formalmente si trova:

$$R(\lambda, B) = (\lambda - B)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \varrho_i R(\lambda \varrho_i, U) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

essendo $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ le radici dell'equazione:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \varrho^i = 0 \tag{7.8}$$

ed essendo A_{ik} il complemento algebrico del termine sulla riga k^{ma} e sulla colonna i^{ma} nella matrice rappresentativa di $\lambda - B$.

Poniamo ora:

$$\theta = \inf \{ \varphi - |\arg \varrho_i|, i = 1, \dots, n \} \tag{7.9}$$

allora se $\theta > 0$ per ogni $\lambda \in \varrho_{\frac{\pi}{2}+\theta}$ si ha $\varrho_i \lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\varphi}$, $i = 1, \dots, n$ cosicchè ha senso (7.7) e rappresenta un operatore continuo su X dato che A_{ik}

contiene potenze di U con grado non superiore a n e che $UR(\lambda\varrho_i, U) = \lambda\varrho_i R(\lambda\varrho_i, U) - 1$ è, per ogni $1 \leq i \leq n$, un operatore continuo in Y.

Poniamo ora:

$$C_{ik} = A_{ik} \prod_{i=1}^{n} \varrho_i R(\lambda\varrho_i, U) \qquad i, k = 1, \dots, n \tag{7.10}$$

e osserviamo che, in virtù di (7.1), esiste un numero positivo K tale che:

$$\| UR(\lambda, U) \| \leq K. \tag{7.11}$$

Si prova facilmente per ricorrenza che il comportamento di C_{ik} per $|\lambda| \to \infty$ nel settore $S_{\frac{\pi}{2}+\theta}$ è il seguente:

$$\| C_{ik} \| \overset{|\lambda|\to\infty}{\sim} |\lambda|^{i-k-1} \qquad i, k = 1, \dots, n. \tag{7.12}$$

Poniamo allora

$$S(\lambda, B) = R^n(\lambda, B) = \begin{pmatrix} S_{11}, & \dots & , S_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{n1}, & \dots & S_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7.13}$$

Sempre per ricorrenza si prova che il comportamento di S_{ik} per $|\lambda| \to \infty$ nel settore $S_{\frac{\pi}{2}+\theta}$ è il seguente:

$$\| S_{ik} \| \overset{|\lambda|\to\infty}{\sim} |\lambda|^{i-k-n-1} \qquad i, k = 1, \dots, n. \tag{7.14}$$

Allora è chiaro che l'andamento di $S(\lambda, B)$ in $S_{\frac{\pi}{2}+\theta}$ è il seguente:

$$\| S(\lambda, B) \| \overset{|\lambda|\to\infty}{\sim} 1/|\lambda|. \tag{7.15}$$

Quindi, applicando il TEOREMA [6.II] si trova che esiste su X un semigruppo G di crescenza $n-1$ e analitico su S_θ tale che, detto A il suo generatore infinitesimale, risulti $S(\lambda, A) = S(\lambda, B)$.

Il dominio di B è dato da:

$$D^B = \{(x_1, \dots, x_n) \in X; \qquad x_i \in D_{U^{n-i+1}}, \quad i = 1, \dots, n\} \tag{7.16}$$

e, procedendo per ricorrenza, si trova:

$$D_{B^n} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X; \quad x_i \in D_{U^{2n-1}}, \quad i = 1, \dots, n\}. \tag{7.17}$$

Applicando il TEOREMA [5.I] si ottiene ora il seguente risultato:

TEOREMA [7.I] — *Consideriamo il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k U^k \dfrac{d^{n-k} u}{dt^{n-k}} = 0 \\ \lim_{t \to 0} \dfrac{d^k u(t)}{dt^k} = u_0^{(k)} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_0^{(k)} \in D_{U^{2n-k-1}} \end{cases} \tag{7.18}$$

dove U è un operatore lineare chiuso con dominio denso nello spazio di Banach Y, generatore infinitesimale di un semigruppo di classe $H(-\varphi, \varphi)$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Se risulta:

$$\inf \{ \varphi - |\arg \varrho_i|, i = 1, \dots, n\} > 0$$

essendo $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ le radici di (7.18), *allora il problema* (7.18) *ammette una unica soluzione u n volte derivabile e tale che*

$$u^{(k)}(t) \in D_{U^{2n-k-1}} \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Vogliamo ora mostrare che, in generale, l'operatore B in (7.6) non è generatore infinitesimale di un semigruppo di classe c_0.

Considereremo per questo una particolarizzazione dell'equazione (7.2).

Sia $Y = L^2(\mathbb{R}^m)$, spazio di Hilbert delle funzioni di quadrato sommabile su $\mathbb{R}^m$, m intero positivo, U un operatore uniformemente ellittico a coefficienti $C^\infty(\mathbb{R}^m)$; U è generatore infinitesimale di un semigruppo analitico ([9], pag. 417) e si può supporre che $R(\lambda, U)$ verifichi (7.1).

Consideriamo l'equazione:

$$2 \cdot \frac{d^3 u}{dt^3} - 5\, U \frac{d^2 u}{dt^2} + 4\, U^2 \frac{du}{dt} - U^3 u = 0 \tag{7.19}$$

l'equazione (7.8) diviene:

$$2 - 5\varrho + 4\varrho^2 - \varrho^3 = 0 \tag{7.20}$$

che ha per radici 1 (doppia) e 2, cosicchè le condizioni del TEOREMA [7.I] sono soddisfatte.

Inoltre l'operatore B in (7.6) è rappresentato della matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{U^3}{2} & -2\,U^2 & \frac{5}{2}\,U \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

e si trova:

$$R(\lambda, B) = 2\,R^2(\lambda, U)\,R(2\lambda, U) \begin{pmatrix} \lambda\left(\lambda - \frac{5}{2}\,U\right) + 2\,U^2 & \lambda - \frac{5}{2}\,U & 1 \\ \frac{U^3}{2} & \lambda\,(\lambda - \frac{5}{2}\,U) & \lambda \\ \frac{\lambda\,U^3}{2} & -2\,\lambda\,U^2 + \frac{U^3}{2} & \lambda^2 \end{pmatrix} = \tag{7.22}$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

In particolare si ha:

$$C_{31} = \lambda\,(UR\,(\lambda, U))^2\,UR\,(2\lambda, U). \tag{7.23}$$

Poniamo:

$$C_{31} = \lambda T, \quad T = (UR\,(\lambda, U))^2\,(UR\,(2\lambda, U)) \tag{7.24}$$

allora si ha:

$$1 + T = \frac{1}{2}\,\lambda\,(\lambda_1 - U)\,R\,(2\lambda, U)\,(\lambda_2 - U)\,R^2\,(\lambda, U) \tag{7.25}$$

con

$$\lambda_1 = \frac{1}{8}\,(5 - i\sqrt{7}) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{8}\,(5 + i\sqrt{7}).$$

Dimostriamo ora che $\| T \| \geq 1$; infatti se fosse per assurdo $\| T \| < 1$ si avrebbe che $1 + T$ è invertibile e risulterebbe:

$$(1 + T)^{-1} = 1 - \frac{2}{\lambda} U^3 R(\lambda_1, U) R(\lambda, U) \tag{7.26}$$

ma ciò è assurdo poichè implicherebbe che U è continuo il che è falso in generale.

Quindi si ha $\| C_{31} \| \geq | \lambda |$.

Sia allora $y \in Y$ e poniamo $u = (y, 0, 0)$, si ha $\| u \| = \| y \|$ e inoltre $R(\lambda, B) u = (C_{11} y, C_{21} y, C_{31} y)$, ne segue:

$$\| R(\lambda, B) \| \geq \frac{\| R(\lambda, B) u \|}{\| u \|} \geq \frac{\| C_{31} y \|}{\| y \|} \qquad \forall y \in Y \tag{7.27}$$

da cui

$$\| R(\lambda, B) \| \geq \| C_{34} \| \geq | \lambda |$$

cosicchè B non è generatore infinitesimale di un semigruppo di classe c_0.

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Da Prato - U. Mosco, *Semigruppi Distribuzioni Analitici*, Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, XIX (1965), 367-396.

[2] G. Da Prato - U. Mosco, *Regolarizzazione dei semigruppi Distribuzione Analitici*, Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, XIX (1965) 563-576.

[3] N. Dunford - J. T Schwartz, *Linear Operators I* — Interscience-1958.

[4] W. Feller, *On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators*, Annals of Math. (2) 58 (1953) 166-174.

[5] E. Hille - R. S. Phillips — *Functional Analysis and Semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. Vol. XXXI.

[6] J. L. Lions - *Les semi-groupes distributions*, Portugaliae Math. **19** (1960), 141-164.

[7] K. Yosida, *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators*, J., Math. Soc. Japan I (1948) 15-21.

[8] K. Yosida, *On the differentiability of semi-groups of linear operators* Proc. Japan Acad. **34** (1958), 337-340.

[9] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag (1965).