Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

FRANCESCO ROSATI

Un problema al contorno per un'equazione iperbolica del terzo ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 3 (1966), p. 613-623

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_3_613_0>

UN PROBLEMA AL CONTORNO PER UN'EQUAZIONE IPERBOLICA DEL TERZO ORDINE

di FRANCESCO ROSATI (*)

Numerosi sono i lavori dedicati alle equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico. La maggior parte di tali ricerche è rivolto alla studio di equazioni non lineari del secondo ordine in due variabili indipendenti (per una vasta bibliografia vedi per es. [1] (1)). Altri lavori riguardano invece la generalizzazione dei classici problemi di Cauchy, Darboux e Goursat, per equazioni di ordine $n \geq 3$. Negli studi effettuati in questa direzione, sono stati esaminati, solo in parte, i problemi che nascono, per le equazioni lineari a coefficienti costanti, quando si assegnino i dati su n curve caratteristiche appartenenti a sistemi a due a due distinti. Mentre sono noti [2], [3], i risultati relativi al caso in cui le n caratteristiche hanno uno stesso punto in comune, non altrettanto si può dire per problemi al contorno su poligoni i cui n lati siano tutti porzioni di curve caratteristiche di cui mai due parallele.

In questa prima Nota sull'argomento si esamina un problema al contorno del tipo indicato, per un'equazione lineare a coefficienti costanti, del terzo ordine (2). I risultati qui esposti, costituiscono un primo passo verso lo studio di tali questioni, per equazioni lineari a coefficienti costanti, di ordine qualunque. Viene messa in evidenza la natura delle condizioni di compatibilità e la struttura delle formule risolutive.

Pervenuto alla Redazione il 4 Marzo 1966.

(*) Lavoro eseguito, presso l'INAC, nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C. N. R.

(1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla Bibliografia posta in fine.

(2) Per tale equazione, i problemi con i dati su due rette caratteristiche sono studiati in [4].

1. Posizione del problema: risultati fondamentali.

Detto T l'aperto del piano xy individuato da

$$T = \{x, y\,;\ 0 < x,\ 0 < y,\ x + y < 1\}, \tag{1.1}$$

$\overline{T}$ la sua chiusura, si indichi con $\mathcal{R}$ la trasformazione di R^2 in R^2, definita da

$$\mathcal{R}(x, y) = (1 - x - y, x)\ (^3). \tag{1.2}$$

Per ogni f di R^2 porremo

$$\mathcal{R}_t f(x, y) = f[\mathcal{R}(x, y)]. \tag{1.3}$$

Detta τ la direzione di coseni direttori $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, sia $\Gamma(\overline{T})$ la classe delle funzioni che sono nella classe $C^2(\overline{T})$ e dotate della derivata $\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$ continua in $\overline{T}$.

Posto

$$Eu = \sqrt{2}\,\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \tag{1.4}$$

si ricercano le funzioni $u \in \Gamma(\overline{T})$ per cui risulti

$$Eu = f(x, y), \text{ per } (x, y) \in T, \tag{1.5}$$

$$u = h(x, y), \text{ per } (x, y) \in \partial T, \tag{1.6}$$

ove $f \in C(\overline{T})$ e $h(x, y)$ sono funzioni assegnate, h essendo traccia su ∂T di una funzione che sia $C^2(\overline{T})$ (4).

Si hanno al riguardo i seguenti risultati:

TEOR. I. — *Il problema omogeneo $Ew = 0$ per $(x, y) \in T$, $w = 0$ su ∂T è dotato, in $\Gamma(\overline{T})$, di infinite soluzioni della forma*

$$w(x, y) = q(x) + q(y) - q(x + y) - q(0), \tag{1.7}$$

---

(3) Si osservi che $\mathcal{R}^3$ è la trasformazione identica; inoltre $\mathcal{R}T = T$, $\mathcal{R}\overline{T} = \overline{T}$.

(4) Perchè ciò si verifichi occorre e basta che h sia continua su ∂T e abbia continue le derivate parziali seconde su ciascuno dei segmenti che costituiscono ∂T.

ove $q(x) \in C^2[0, 1]$, *è funzione arbitraria tale che*

$$q(x) + q(1 - x) = 0, \quad per \ 0 \leq x \leq 1. \tag{1.8}$$

Per lo studio del caso $f = 0$, posto

$$g(x, y) = [1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2]\, h(x, y), \tag{1.9}$$

si ha :

TEOR. II. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè il problema* $Eu = 0$ *in* T, $u = h$ *su* ∂T, *abbia soluzione in* $\Gamma(\overline{T})$, *è che la* $h(x, y)$ *sia tale che la corrispondente* $g(x, y)$ *verifichi la condizione*

$$g(x, 0) - g(1 - x, 0) = 0, \qquad per \ 0 \leq x \leq 1. \tag{1.10}$$

Introdotta, per $(x, y) \in \overline{T}$, $(\varrho, \sigma) \in \overline{T}$, la funzione

$$G(x, y; \varrho, \sigma) = \frac{1}{4}(x + y - \varrho - |y - \sigma| - |x - \varrho - \sigma| + \\ + |x + y - \varrho - |y - \sigma| - |x - \varrho - \sigma||), \tag{1.11}$$

e rilevato che

$$G(x, 0; \varrho, \sigma) = G(0, y; \varrho, \sigma) = 0, \qquad \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \ (\varrho, \sigma) \in \overline{T}, \tag{1.12}$$

la funzione

$$\Lambda_f(x, y) = \int_T f(\varrho, \sigma)\, G(x, y; \varrho, \sigma)\, d\varrho\, d\sigma, \tag{1.13}$$

verifica l'identità $E\,\Lambda_f(x, y) = f(x, y)$ in T, avendosi inoltre, per le (1.12), $\Lambda_f(x, 0) = \Lambda_f(0, y) = 0$ per $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. È pure facile verificare che la (1.13) definisce una funzione di $\Gamma(\overline{T})$.

Dopo ciò, dal TEOR. II segue :

TEOR. III — *Perchè il problema* $Eu = f$ *in* T, $u = h$ *su* ∂T *abbia soluzione in* $\Gamma(\overline{T})$, *occorre e basta che risulti verificata la*

$$g(x, 0) - g(1 - x, 0) + \int_T f(\varrho, \sigma)[G(x, 1 - x; \varrho, \sigma) - G(1 - x, x; \varrho, \sigma)]\, d\varrho\, d\sigma = 0, \tag{1.14}$$

per ogni $0 \leq x \leq 1$.

In particolare per $h = 0$, la (1.14) diventa

$$\int_T f(\varrho, \sigma)\,[G(x, 1-x\,;\varrho, \sigma) - G(1-x, x\,;\varrho, \sigma)]\,d\varrho\, d\sigma = 0, \qquad \text{per ogni } 0 \le x \le 1. \tag{1.15}$$

Faremo vedere che la (1.15) è equivalente alla condizione di ortogonalità indicata nel seguente

TEOR. IV. — *Condizione necessaria e sufficiente. perchè il problema $Eu = f$ in T, $u = 0$ su ∂T, sia risolubile in $\Gamma(\overline{T})$ è che la f sia ortogonale in $\overline{T}$ a tutte le autosoluzioni $w \in \Gamma(\overline{T})$, date da* (1.7).

La condizione di compatibilità (1.14) può scriversi anche nella forma (3.4) o (3.6) mettendo così in maggiore evidenza il ruolo della trasformazione $\mathcal{R}$.

Per quanto riguarda le formule risolutive dei problemi posti, si osserva che [soddisfatte che siano le relative condizioni di compatibilità] ne esistono infinite, individuate a meno di autosoluzioni $w(x, y) \in \Gamma(\overline{T})$.

Accanto alle formule più semplici (2.3) e (2.4) di cui viene fatto uso per stabilire i teoremi di esistenza, segnaliamo quelle date al n. 5, che godono di particolari proprietà di simmetria [vedi (5.1), (5.4)]. È da notare che nel caso $h = 0$ la (5.1) dà la soluzione ortogonale a tutte le autosoluzioni del problema.

2. Dimostrazioni dei teoremi I-II e III del n. 1.

Poichè ogni soluzione dell'equazione $Eu = 0$, di classe $\Gamma(\overline{T})$, ha la forma

$$u = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(x + y), \tag{2.1}$$

con $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ arbitrarie funzioni di classe C^2, per $x \in [0, 1]$, tenuto conto della definizione di $\mathcal{R}_t$ data in (1.3), si ha

$$[1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2]\,(u(x, y) - u(y, x)) = 0, \qquad \text{per ogni } (x, y) \in \overline{T}. \tag{2.2}$$

Dovendo tale relazione valere anche su ∂T, ne segue che la traccia $h(x, y)$ di una soluzione u dell'equazione considerata, non può che soddisfare la condizione (2.2). Di qui, per la (1.9), si ha la (1.10) come condizione necessaria.

Tale condizione è banalmente verificata nel caso $h = 0$; dalla (2.1) si desume allora che ogni soluzione nulla su ∂T, ha la forma (1.7), con la condizione $q(x) + q(1 - x) = c$, c costante; di qui, potendosi supporre $c = 0$, segue il teorema I.

Per dimostrare la sufficienza della (1.10), si osservi che, supposta verificata tale condizione, la funzione [5].

$$(2.3) \qquad u(x, y) = h(x, 0) + h(0, y) - h(0, 0) + \\ + \frac{1}{2}[[h(r + s, 0) - h(r + s, 1 - r - s) + h(0, 1 - r - s)]]_{(0,0)}^{(x,y)},$$

è manifestamente soluzione, della classe voluta, della $Eu = 0$ in T, $u = h$ su ∂T.

È pure immediato che ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo, a quella sopra indicata, un'arbitraria autosoluzione (1.7).

Il TEOR. III, come condizione necessaria è immediato, non appena si ricordi che la $\Lambda_f(x, y)$ data in (1.13) verifica la $E\,\Lambda_f(x, y) = f$.

Pertanto se u è una soluzione di (1.5), (1.6) ammessa esistente, la $v = u - \Lambda_f$ è soluzione di $Ev = 0$ in T, con valori $h(x, y) - \Lambda_f(x, y)$ su ∂T. Per tali valori dovrà necessariamente valere il TEOR. II, quando nelle (1.9) si ponga $h(x, y) - \Lambda_f(x, y)$ in luogo di $h(x, y)$. Avendo scelto Λ_f in modo che $\Lambda_f(x, 0) = \Lambda_f(0, y) = 0$ (cfr. con (1.12)), dalla (1.10) segue (1.14).

Una soluzione, è data esplicitamente dalla formula risolutiva

$$(2.4) \qquad u(x, y) = h(x, 0) + h(0, y) - h(0, 0) + \\ + \frac{1}{2}[[h(r + s, 0) - h(r + s, 1 - r - s) + h(0, 1 - r - s)]]_{(0,0)}^{(x,y)} + \\ + \int_T f(\varrho, \sigma)\, H(x, y; \varrho, \sigma)\, d\varrho\, d\sigma,$$

avendo posto

$$(2.5) \qquad H(x, y; \varrho, \sigma) = G(x, y; \varrho, \sigma) + \frac{1}{2}[[G(r + s, 1 - r - s; \varrho, \sigma)]]_{(0,0)}^{(x,y)},$$

con G data da (1. 11). Trascuriamo di esporre la non difficile verifica.

In particolare la (2.4) vale per $h = 0$, sotto la condizione (1.15).

---

[5] Con $[[l(r, s)]]_{(0,0)}^{(x,y)}$ si indica l'incremento doppio dell'espressione in parentesi, cioè $l(x, y) - l(x, 0) - l(0, y) + l(0, 0)$.

3. — Ulteriore esame della condizione di compatibilità.

La condizione (1.14), può porsi in forma differenziale.
Considerate nel piano $\varrho\sigma$ le rette

$$\varrho = \frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - x\right| \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - x\right|, \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{3.1}$$

sia $T_{1,x}$ il triangolo contenuto in $\overline{T}$, limitato da esse e dalla ulteriore retta

$$\varrho + \sigma = \frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - x\right|. \tag{3.2}$$

Parimenti sia $T_{2,x}$, quello limitato dalle (3.1) e dalla retta

$$\varrho + \sigma = \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{2} - x\right|. \tag{3.3}$$

Dopo ciò, osservato che la (1.14) è banalmente verificata per $x = \frac{1}{2}$, derivandola rispetto x, può scriversi in forma equivalente, tenendo conto della continuità in $[0, 1]$ dei termini scritti :

$$\frac{d}{dx}\{[1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2][h(x, 0) - h(1 - x, 0)]\} + \\ + \int_{T_{1,x}} [1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2] f(\varrho, \sigma)\, d\varrho\, d\sigma - \int_{T_{2,x}} f(\varrho, \sigma)\, d\varrho\, d\sigma = 0, \tag{3.4}$$

per ogni $x \in [0, 1]$.

Tale condizione, per $x = 0$ $(x = 1)$ si riduce a

$$\int_T f(\varrho, \sigma)\, d\varrho\, d\sigma = [h_x(0, 0) - h_y(0, 0)] + \\ + [h_x(1, 0) - \sqrt{2}\, h_\tau(1, 0)] - [h_y(0, 1) + \sqrt{2}\, h_\tau(0, 1)], \tag{3.5}$$

fornendo così una condizione solo necessaria di compatibilità.

Alla (3.5) può pervenirsi in modo diretto applicando alle (1.5) e (1.6), supposte verificate, i risultati relativi ai funzionali puntuali ottenuti in

[5] (6), per funzioni di classe $C^3(\overline{T})$, ma facilmente conseguibili anche per quelli di classe $\Gamma(\overline{T})$. Parimenti, in modo meno ovvio si possono conseguire le (3.4).

La condizione necessaria e sufficiente (3.4) è pure equivalente alle

$$\frac{d^2}{dx^2}\{[1+\mathcal{R}_t+\mathcal{R}_t^2][h(x,0)-h(1-x,0)]\}- \tag{3.6}$$

$$-\left\{\int_0^x(1+\mathcal{R}_t+\mathcal{R}_t^2)f(1-x,\sigma)\,d\sigma-\int_0^{1-x}(1+\mathcal{R}_t+\mathcal{R}_t^2)f(x,\sigma)\,d\sigma\right\}=0,$$

per $x\in(0,1)$, con l'ulteriore condizione (3.5); basta osservare che si perviene ad essa per derivazione. Per continuità la (3.6) vale pure per $x=0$ e $x=1$.

4. — **Condizioni di ortogonalità** (dim. TEOR. IV).

Siano U e V arbitrarie funzioni di classe $\Gamma(\overline{T})$; potendosi per esse invertire l'ordine delle derivazioni che figurano in (1.4), risulta

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(U\cdot EV+V\cdot EU)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial y}\cdot V\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(U\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right). \tag{4.1}$$

Introdotti i coseni direttori (α,β) della normale interna a ∂T, e l'ascissa curvilinea s su ∂T (orientata nel modo consueto), si ottiene

$$\int_T(U\cdot EV+V\cdot EU)\,dT=-\int_{+\partial T}\left(\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial y}V-\beta\frac{\partial U}{\partial\tau}\frac{\partial V}{\partial x}+\right. \tag{4.2}$$

$$\left.+\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}U\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)ds.$$

Vale allora il seguente:

---

(6) Tali risultati permettono di stabilire un legame immediato tra $\int_{T^*} Eu\,dT$ ed i valori delle derivate di u nei punti angolosi di ∂T^*, quando si supponga T^* un triangolo limitato dalle rette caratteristiche di Eu. Qualora si voglia ottenere la (3.4) tali risultati vanno estesi ad insiemi T^* [non necessariamente triangoli] limitati da poligonali, in generale intrecciate, formate con segmenti di caratteristica. Per ulteriori notizie sui detti funzionali vedi pure [6].

LEMMA I. — *Se* $w(x, y) \in \Gamma(\overline{T})$ *è un'arbitraria autosoluzione* [*data da* (1.7)], *per ogni funzione* $f(x, y)$ *continua in* $\overline{T}$, *vale la seguente identità*:

$$(4.3)\qquad \int_T f(x, y)\, w(x, y)\, dx\, dy = -\int_0^{1/2} w_{x,y}(x, 0)\, dx \int_T f(\varrho, \sigma)\cdot$$
$$\cdot[G(x, 1-x; \varrho, \sigma) - G(1-x, x; \varrho, \sigma)]\, d\varrho\, d\sigma,$$

ove G *è data da* (1.11) *e* $w_{xy}(x, 0) = -q''(x)$, *con* $q''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, *è continua in* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *e arbitraria con* w (vedi (1.8)).

DIM. Posto nella (4.2) $U = w$, $V = \Lambda_f(x, y)$ (vedi (1.13)), poichè $w_\tau(x, 1-x) = 0$ e $w_{\tau y}(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2}} q''(y) = -w_{\tau y}(x, 1-y)$, si perviene immediatamente alla (4.3), osservando che $q''(x) + q''(1-x) = 0$ e che $G(0, 1) = G(1, 0) = 0$, c. d. d.

Ciò premesso si può dimostrare il TEOR. IV del n. 1.
La (1.14) con $h = 0$ si riduce alla (1.15); ne segue che, se il problema $Eu = f$ in T, $u = 0$ su ∂T, ha soluzione, per il TEOR. III dimostrato al n. 2, vale la (1.15), e quindi per la (4.3) risulta $\int_T fw\, dT = 0$, per ogni $w \in \Gamma(\overline{T})$, onde l'ortogonalità di cui al TEOR. IV.

Viceversa se risulta $\int_T fw\, dT = 0$ per ogni $w \in \Gamma(\overline{T})$, dalla (4.3), per l'arbitrarietà di w, indi di $q''(x)$ in $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, deve risultare ivi nullo l'integrale doppio che figura a secondo membro di (4.3). Poichè esso è continuo e nullo per $x = \frac{1}{2}$, mutando x in $1 - x$, si ha subito la (1.15) in $[0, 1]$ e per il TEOR. III, con $h = 0$, la compatibilità del problema, c. d. d.

Per quanto detto al n. 3, la condizione di ortogonalità espressa da (1.15) può porsi (vedi 3.4) nella forma

$$(4.4)\quad \int_{T_{1,x}} [1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2] f(\varrho, \sigma)\, d\varrho\, d\sigma - \int_{T_{2,x}} f(\varrho, \sigma)\, d\varrho\, d\sigma = 0\ (^7), \qquad \text{per } x \in [0, 1],$$

(7) Che può scriversi anche $\int_0^x d\varrho \int_{x-\varrho}^{1-x} f(\varrho, \sigma)\, d\sigma + \int_0^{1-x} d\varrho \int_{1-x-\varrho}^{x} f(\varrho, \sigma)\, d\sigma = 0$, per $x \in [0, 1]$.

o più semplicemente in quella equivalente

$$(4.5)\quad \int_0^x [1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2]\, f(1-x, \sigma)\, d\sigma - \int_0^{1-x} [1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2]\, f(x, \sigma)\, d\sigma = 0,$$

per $x \in [0, 1]$, [8]

con la condizione

$$(4.6)\quad \int_T f(\varrho, \sigma)\, d\varrho\, d\sigma = 0.$$

5. — Formule risolutive.

Si ricercano, se esistono, soluzioni dei problemi posti, che siano in T ortogonali a tutte le autosoluzioni $w(x, y) \in \Gamma(\overline{T})$, date da (1.7).

Si ha al riguardo:

TEOR. I. — *Per il problema $Eu = f$ in T, $u = h$ su ∂T, non esiste in generale alcuna soluzione di classe $\Gamma(\overline{T})$ ortogonale in T, alle dette autosoluzioni.*

L'affermazione è conseguenza del fatto che, per l'eventuale soluzione, non può in generale risultare verificata la (4.5) con $x = 0$, cioè

$$\int_0^1 [1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2]\, h(0, \sigma)\, d\sigma = 0.$$

Nel caso particolare $h(x, y) = 0$, si ha:

TEOR. II. — *Se f è un'assegnata funzione, continua in $\overline{T}$, ivi ortogonale a tutte le autosoluzioni $w \in \Gamma(\overline{T})$, esiste una sola soluzione $u(x, y)$ tale che $Eu = f$ in T, $u = 0$ su ∂T, che sia in $\overline{T}$ pure ortogonale alle dette autosoluzioni; essa è data da*

$$(5.1)\quad u(x, y) = \int_T f(\varrho, \sigma)\, K(x, y; \varrho, \sigma)\, d\varrho\, d\sigma,$$

avendo posto [9].

$$(5.2)\quad K(x, y; \varrho, \sigma) = H(x, y; \varrho, \sigma) + [[G(r+s, 1-r-s; \varrho, \sigma)\, G^*(r+s; \varrho, \sigma) - G(1-r-s, r+s; \varrho, \sigma)\, G^*(1-r-s; \varrho, \sigma)]]_{(0,0)}^{(x,y)},$$

[8] Per $x = 0$ e $x = 1$, vale per continuità.

[9] Vedi (1.11) e (2.5).

con

$$(5.3) \qquad G^*(t\,;\varrho,\sigma) = -\frac{1}{12}[2\sigma + \varrho - 3\,|\,t - \varrho - \sigma\,| + 3\,|\,1 - t - \sigma\,|].$$

DIM. Che la (5.1), sotto l'ipotesi (1.15) dia una soluzione è evidente, differendo dalla (2.4), con $h = 0$, per l'incremento doppio indicato, che è manifestamente un'autosoluzione (cfr. con (1.7)).

L'ortogonalità della (5.1) a tutte le autosoluzioni, si mostra con calcoli non troppo semplici, (10) facendo vedere che risulta

$$\int_0^x [1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2]\, u\,(1 - x, \sigma)\, d\sigma - \int_0^{1-x} [1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2]\, u\,(x, \sigma)\, d\sigma = 0,$$

per $x \in [0, 1]$

ed inoltre

$$\int_T u\,(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

L'unicità è immediata. Nel caso $f = 0$, segnaliamo ancora una particolare formula risolutiva del problema $E\,u = 0$, in T, $u = h$ su ∂T, data da

$$(5.4) \quad u\,(x, y) = -\frac{Sh\,(0, 0)}{6} + \frac{1}{2}(1 + \mathcal{R}_t - \mathcal{R}_t^2)\, Sh\,(x, y) + \frac{1}{3}(1 - \mathcal{R}_t)\, Ah\,(x, y),$$

ove si è indicato con S la *componente simmetrica* di h relativa al punto (x, y) definita da

$$Sh\,(x,y) = \frac{1}{2}[h\,(x,0) + h(1-x,0) + h(1-y,y) + h(y,1-y) + h(0,x+y) + h(0,1-x-y)],$$

con A quella *antisimmetrica*

$$Ah\,(x, y) = \frac{1}{2}[h\,(x, 0) - h\,(1 - x, 0) + h\,(1 - y, y) - h\,(y, 1 - y) + h\,(0, x + y) - h\,(0, 1 - x - y)]$$ (11).

La (5.4), verificata che sia la condizione di compatibilità (3.4) cioè nel caso attuale

$$(5.5) \qquad \frac{d}{dx}\{[1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2]\,[h\,(x, 0) - h\,(1 - x, 0)]\} = 0,$$

---

(10) Si tenga conto che $\int_T w\, dT = -\frac{q\,(0)}{2} + 3\int_0^1 q\,(t)\,(1/2 - t)\, dt$; relazione analoga vale per [[ ]] di (5.2).

(11) Si osservi che $(x, 0)$, $(1 - y, y)$, $(0, x + y)$ indicano le intersezioni di ∂T con le caratteristiche uscenti da (x, y) nel senso di $+\,\partial T$.

è l'*unica* soluzione che verifica l'ulteriore condizione, per $x \in [0, 1]$,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} [1 + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_t^2] [u(x, y) + u(1 - x, y)] \right\}_{y=0} = 0. \tag{5.6}$$

Quanto detto è di immediata dimostrazione, che per brevità si omette. Per la (5.4) valgono allora proprietà del tipo (5.5) e (5.6) quando si considerino nei punti $(x, 0)$, $(1 - x, 0)$, derivate secondo direzioni arbitrarie.

Università di Roma

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Cinquini Cibrario e S. Cinquini — *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico.* Cremonese Roma — 1964.

[2] B. Colombo — *Studio di problemi ai limiti....* Rend. Acc. Lincei vol. 33-1924, pp. 156-160.
— *Sopra un'equazione a derivate parziali del quarto ordine.* Rend. Acc. Lincei vol. 16 1932, pp. 291-296.
— *Ancora sopra un'equazione....* Rend. Acc. Lincei — vol. 21-1935, pp. 475-480.

[3] O. Sjöstrand — *Sur un problème aux limites....* Arkiv för Math, vol. 24-1934.

[4] M. Winants — *Equation hyperbolique du troisieme ordre....* Acc. Roy, Belg. Bull. vol. 21 — 1935, pp. 238-293 e p. 495-503.

[5] A. Ghizzetti — *Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali.* Rend. Acc. Lincei — vol. XXII — 1957.

[6] F. Rosati — *Alcune osservazioni sui funzionali puntuali.* Le Matematiche — Catania — vol. XXII — 1962.