ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

VINICIO VILLANI

Fibrati vettoriali olomorfi su una varieta' complessa q-completa

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 1 (1966), p. 15-23

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_1_15_0>

FIBRATI VETTORIALI OLOMORFI SU UNA VARIETA' COMPLESSA q-COMPLETA (*)

di VINICIO VILLANI

Introduzione.

Scopo della presente nota è la dimostrazione del

TEOREMA 1. *Ogni fibrato vettoriale olomorfo E su una varietà complessa q-completa X, è a sua volta una varietà q-completa.*

Ricordiamo che una varietà complessa X si dice *q-completa* se esiste su X una funzione $\varphi(x)$ a valori reali, differenziabile di classe C^∞, fortemente q-pseudoconvessa in ogni punto di X, e tale che gli insiemi $B_c = \{x \in X; \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X, per ogni $c \in \mathbf{R}$.

La funzione $\varphi(x)$ si dirà (*debolmente*) *q-pseudoconvessa* nel punto $x_0 \in X$ se, fissato un sistema di coordinate locali olomorfe $z_1, \dots, z_n$ su un intorno di x_0, la forma di Levi

$$\mathcal{L}(\varphi, x) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \, \partial \overline{z}_\beta} \right)_x dz_\alpha \, d\overline{z}_\beta$$

ha almeno $n - q$ autovalori ≥ 0 nel punto x_0; $\varphi(x)$ si dirà poi *fortemente q-pseudoconvessa* (1) in x_0, se tali autovalori sono tutti > 0 nel punto x_0.

Pervenuto in Redazione il 10 Agosto 1965.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) Seguendo la letteratura più recente, in questo lavoro si è usata una terminologia diversa da quella abituale; precisamente le funzioni (debolmente o fortemente) q-pseudoconvesse secondo la nostra definizione sono le funzioni che precedentemente (ad es. in [1]) venivano dette $(q+1)$-pseudoconvesse. Di conseguenza le varietà q-complete secondo la nostra definizione sono le varietà che precedentemente venivano dette $(q+1)$-complete. Questa modifica appare giustificata da una maggiore semplicità di talune formule.

Le varietà 0-complete sono le varietà di Stein (cfr. [2]). Quindi il nostro teorema 1 estende al caso di q arbitrario il teorema 7 di [2]: *Ogni fibrato vettoriale olomorfo E su una varietà di Stein X, è a sua volta una varietà di Stein* (2).

La dimostrazione del nostro teorema 1 ricalca quella del teorema 7 di [2]; tuttavia l'estensione non è del tutto banale, in quanto occorre superare delle difficoltà tecniche, derivanti dal fatto che per $q \geq 1$ la somma di due funzioni (fortemente o debolmente) q-pseudoconvesse non è in generale una funzione debolmente (e tanto meno fortemente) q-pseudoconvessa.

Accanto alle varietà q-complete, Andreotti e Grauert hanno introdotto in [1] le nozioni di *varietà fortemente q-pseudoconvessa* e di *varietà fortemente q-pseudoconcava*: la varietà complessa X si dirà fortemente q-pseudoconvessa (rispett. fortemente q-pseudoconcava) (3) se esiste su X una funzione $\varphi(x)$ a valori reali (rispett. a valori reali > 0), differenziabile di classe C^∞, fortemente q-pseudoconvessa al di fuori di un opportuno compatto K di X, e tale che: gli insiemi $B_c = \{x \in X ; \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X per ogni c reale (rispett.: gli insiemi $B_c = \{x \in X ; \varphi(x) > c\}$ sono relativamente compatti in X per ogni c reale > 0). Sotto molti aspetti le varietà fortemente q-pseudoconvesse e fortemente q-pseudoconcave sono simili alle varietà q-complete (del resto le varietà q-complete sono particolari varietà fortemente q-pseudoconvesse); ci si potrebbe quindi aspettare che un teorema analogo al teorema 1 valga anche per varietà fortemente q-pseudoconvesse e fortemente q-pseudoconcave. Con due semplici esempi (precisamente con delle fibrazioni vettoriali banali) faremo vedere che così non è.

1. Sia X una varietà complessa q-completa, di dimensione complessa n; esiste dunque su X una funzione $p(x)$ a valori reali, differenziabile di classe C^∞, fortemente q-pseudoconvessa in ogni punto di X, e tale che per ogni $c \in \mathbf{R}$ l'insieme $B_c = \{x \in X ; p(x) < c\}$ è relativamente compatto in X. Poichè $p(x)$ assume un valore minimo μ su X, modificando se necessario la funzione $p(x)$ con l'aggiunta di una opportuna costante, non è restrittivo supporre che sia $\mu \geq 0$; nel seguito supporremo tacitamente soddisfatta anche questa ulteriore condizione.

Supponiamo ora che sulla varietà X sia data una forma hermitiana $\mathcal{H}$ di classe C^∞, definita negativa in ogni punto di X.

---

(2) Sempre riguardo alle varietà di Stein sussiste anzi un risultato più generale, dovuto a Matsushima e Morimoto (Bull. Soc. Math. de France 88 (1960)): *Ogni fibrato olomorfo con gruppo strutturale connesso la cui base e la cui fibra sono varietà di Stein, è a sua volta una varietà di Stein.*

(3) Quanto alla terminologia usata in questo lavoro, si veda la nota (1).

LEMMA 1. *Si può trovare una funzione $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, differenziabile di classe C^∞, con $\lim_{\lambda \to +\infty} \psi(\lambda) = +\infty$, tale che, posto $u(x) = \psi(p(x))$, la forma hermitiana $\mathcal{L}(u, x) + \mathcal{H}(x)$ abbia almeno $n - q$ autovalori > 0 in ogni punto $x \in X$.*

DIMOSTRAZIONE: In primo luogo ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente affinchè una forma hermitiana $\mathcal{G}(x)$ (di classe C^∞) sulla varietà X abbia almeno $n - q$ autovalori > 0 (oppure ≥ 0) in un punto $x \in X$ è che esista una sottovarietà complessa $\Delta_x^{n-q} \ni x$, di dimensione $n - q$, regolarmente immersa in un opportuno intorno aperto di x, e tale che la restrizione [4] $\mathcal{G}(x)|_{\Delta_x^{n-q}}$ sia definita > 0 (oppure ≥ 0) nel punto x.

Con questa premessa, dimostriamo il lemma 1. A partire dalla funzione $p(x)$ che dà la q completezza di X, poniamo

$$F_j = \{x \in X ; j \leq p(x) \leq j + 1\} \qquad j = 0, 1, 2, \dots .$$

Si ha evidentemente $\bigcup_j F_j = X$, e ciascun F_j è compatto. Per ogni j esiste un ricoprimento finito $\{W_\alpha^{(j)}\}$ di F_j, mediante aperti di X, godente delle due proprietà seguenti:

(I) Ciascun $W_\alpha^{(j)}$ è una carta locale olomorfa;

(II) Indicato con D^{n-q} il policilindro unitario di $\mathbf{C}^{n-q}$, ossia $D^{n-q} = \{(\xi_1, \dots, \xi_{n-q}) \in \mathbf{C}^{n-q} ; |\xi_j| < 1,\ j = 1, \dots, n - q\}$, esiste un'applicazione differenziabile $\tau : W_\alpha^{(j)} \times D^{n-q} \to X$ tale che $\tau(x, \{0\}) = x$ per ogni $x \in W_\alpha^{(j)}$, e tale inoltre che per ogni fissato $x \in W_\alpha^{(j)}$ l'applicazione $\tau_x = \tau|_{x \times D^{n-q}}$ è una applicazione biolomorfa di D^{n-q} su una sottovarietà complessa Δ_x^{n-q}, regolarmente immersa in un intorno aperto di x, con la proprietà che la forma di Levi $\mathcal{L}(p)|_{\Delta_x^{n-q}}$ sia definita > 0 nel punto x.

La possibilità di scegliere un ricoprimento $\{W_\alpha^{(j)}\}$ godente di queste due proprietà, segue dalla compattezza di F_j, e dal fatto che $p(x)$ è una funzione differenziabile, fortemente q-pseudoconvessa.

---

[4] La restrizione di una forma hermitiana $\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} \gamma_{\alpha\beta}\, dz_\alpha\, d\bar{z}_\beta$ ad una sottovarietà Δ^{n-q} regolarmente immersa in X, è la forma hermitiana su Δ^{n-q} che si ottiene dalla forma data, imponendo al vettore $(dz_1, \dots, dz_n)$ di appartenere allo spazio $(n-q)$-dimensionale dei vettori tangenti a Δ^{n-q}. Senza ledere la generalità, possiamo supporre che in un conveniente intorno U_0 di x siano state scelte coordinate locali olomorfe $z_1, \dots, z_n$ tali che $\Delta^{n-q} = \{(z_1, \dots, z_n) \in U_0 ; z_{n-q+1} = \dots = z_n = 0\}$. La restrizione della forma $\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} \gamma_{\alpha\beta}\, dz_\alpha\, d\bar{z}_\beta$ è allora la forma in $n - q$ variabili: $\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n-q} \gamma_{\alpha\beta}\, dz_\alpha\, d\bar{z}_\beta$.

Sia ora $\{Z_\alpha^{(j)}\}$ un nuovo ricoprimento di F_j, tale che $Z_\alpha^{(j)} \subset\subset W_\alpha^{(j)}$ (per ciascun α). Esiste una costante positiva opportunamente grande $c_\alpha^{(j)}$, tale che per ogni $x \in Z_\alpha^{(j)}$ la forma $c_\alpha^{(j)} \mathcal{L}(p)|_{\Delta_x^{n-q}} + \mathcal{H}|_{\Delta_x^{n-q}}$ sia definita > 0 su Δ_x^{n-q} nel punto x (si sfrutti la continuità degli autovalori di $\mathcal{L}(p)|_{\Delta_x^{n-q}}$ al variare di x in $\overline{Z_\alpha^{(j)}}$, tenuto conto anche delle proprietà (I) e (II) imposte al ricoprimento $\{W_\alpha^{(j)}\}$).

Posto $c_j = \max_\alpha c_\alpha^{(j)}$, ne segue che per ogni $h \geq c_j$ la forma $(h\mathcal{L}(p) + \mathcal{H})|_{\Delta_x^{n-q}}$ è definita > 0 su Δ_x^{n-q} nel punto x, qualunque sia $x \in F_j$.

Sia ora $h(t)$ una funzione a valori reali, di classe C^∞, definita per $-\infty < t < +\infty$, tale che:

$$\begin{array}{lll} h(t) = 0 & \text{per} & t \leq -1 \\ h(t) > c_j & \text{per} & j \leq t \leq j+1 \qquad (j = 0, 1, 2, \dots) \\ h'(t) > 0 & \text{per} & t > -1. \end{array}$$

Definiamo la funzione $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ponendo

$$\psi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} h(t)\, dt,$$

e sia $u(x) = \psi(p(x))$ $(x \in X)$. Si calcola (per ogni punto $x_0 \in X$, e per $dz_1, \dots, dz_n$ arbitrari):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, x_0) &= \psi'(p)\, \mathcal{L}(p, x_0) + \psi''(p)\, |(dp)_{x_0}|^2 = \\ &= h(p(x_0))\, \mathcal{L}(p, x_0) + (h'(p))_{x_0} |(dp)_{x_0}|^2 \geq \\ &\geq h(p(x_0))\, \mathcal{L}(p, x_0); \end{aligned}$$

considerando ora soltanto i vettori $(dz_1, \dots, dz_n)$ tangenti a $\Delta_{x_0}^{n-q}$, e ricordando che $\mathcal{L}(p, x_0)|_{\Delta_{x_0}^{n-q}}$ è una forma definita > 0, ne segue che anche $\mathcal{L}(u, x_0)|_{\Delta_{x_0}^{n-q}}$ è definita > 0 in x_0. Inoltre la scelta della funzione h prova che è definita > 0 in x_0 altresì la forma $(\mathcal{L}(u) + \mathcal{H})|_{\Delta_{x_0}^{n-q}}$; ciò prova il lemma 1.

Segnaliamo due conseguenze del lemma 1:

(1). Oltre alla funzione $p(x)$, anche la funzione $u(x)$ è atta a definire la q-completezza di X; infatti in ogni punto $x \in X$ la forma di Levi

$\mathcal{L}(u)|_{\Delta_x^{n-q}}$ è definita > 0; quindi $\mathcal{L}(u)$ ha almeno $n - q$ autovalori > 0 in ogni punto di X, ossia u è fortemente q-pseudoconvessa. Inoltre dall'ipotesi $\lim_{\lambda \to +\infty} \psi(\lambda) = +\infty$, segue che gli insiemi $\widetilde{B}_c = \{x \in X;\, u(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X, per ogni c reale.

(2). Sulla varietà X sia dato un ricoprimento localmente finito $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ con carte locali olomorfe; sia poi $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ un nuovo ricoprimento di X, tale che ciascun V_i sia relativamente compatto in U_i. Per ogni i, sia $\mathcal{H}_i = \sum_{\mu, \nu = 1}^{n} h_{\mu\nu}^{(i)}\, dz_\mu\, d\bar{z}_\nu$ una forma hermitiana di classe C^∞ su U_i (sulla cui segnatura non facciamo alcuna ipotesi). Su X esiste chiaramente una forma hermitiana globale $\mathcal{H}$ definita < 0, con la proprietà che su ciascun V_i si abbia $\mathcal{H} < \mathcal{H}_i$. Sia $u(x)$ la funzione costruita nel lemma 1 in corrispondenza della forma $\mathcal{H}$; da quanto precede risulta che su ciascun V_i la forma hermitiana $\mathcal{L}(u, x) + \mathcal{H}_i(x)$ ha almeno $n - q$ autovalori > 0, e precisamente in ciascun punto $x \in V_i$ la forma $(\mathcal{L}(u, x) + \mathcal{H}_i(x))|_{\Delta_x^{n-q}}$ è definita > 0.

Se poi su ciascun U_i, in luogo di una sola forma $\mathcal{H}_i$ si considera una totalità di forme $\mathcal{H}_i(\xi)$, dipendenti con continuità da un numero finito di parametri ξ, varianti su un compatto, si può trovare ancora una forma globale $\mathcal{H}$ definita < 0 su X, la quale su ciascun V_i minora tutte le forme $\mathcal{H}_i(\xi)$, onde ragionando come sopra si vede che tutte le forme hermitiane $\mathcal{L}(u, x) + \mathcal{H}_i(\xi)(x)$ hanno almeno $n - q$ autovalori > 0 in ogni punto di V_i.

2. Sia ora $\pi : E \to X$ un fibrato vettoriale olomorfo, con fibra $\mathbf{C}^r$, sulla varietà X. Su un opportuno ricoprimento $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ di X, E può essere rappresentato mediante un $\mathfrak{V}$-cociclo (olomorfo):

$$g_{ij} : V_i \cap V_j \to Gl(r, \mathbf{C}).$$

Per il seguito sarà utile supporre che esista un ricoprimento localmente finito $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ di X, mediante carte locali olomorfe, in modo tale che ciascun V_i sia contenuto come insieme relativamente compatto in U_i, e che il cociclo $\{g_{ij}\}$ sia l'immagine di un cociclo $g_{ij}^0 :\ U_i \cap U_j \to Gl(r, \mathbf{C})$ nell'omomorfismo naturale di restrizione, relativo al passaggio da $\{U_i\}$ a $\{V_i\}$. Queste ipotesi chiaramente non sono restrittive.

Siano

$$\xi^{(i)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_r^{(i)} \end{pmatrix}$$

le coordinate sulle fibre, nella carta V_i. Su $V_i \cap V_j$ si ha dunque

$$\xi^{(i)} = g_{ij}\, \xi^{(j)}.$$

Fissiamo poi una metrica hermitiana (definita > 0) sulle fibre di E; in termini del ricoprimento $\mathfrak{V}$ si tratta di assegnare in corrispondenza ad ogni i, un'applicazione h_i, differenziabile di classe C^∞, dei punti di V_i nello spazio delle matrici hermitiane definite positive di ordine r, con la proprietà che su $V_i \cap V_j$ si abbia $h_j = {}^t\overline{g_{ij}}\, h_i\, g_{ij}$.

A partire da questa metrica h, introduciamo la funzione globale Φ_h su E, definita localmente su $\pi^{-1}(V_i)$ da

$$\Phi_h(x, \xi^{(i)}) = {}^t\overline{\xi^{(i)}}\, h_i(x)\, \xi^{(i)}.$$

Su ciascun V_i consideriamo poi la matrice di ordine r, $\Theta_i = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\, \overline{\partial}\,(h_i^{-1}\, \partial h_i)$, i cui elementi sono forme alternanti nelle variabili $dz_1, \dots, dz_n$. Consideriamo infine su $\pi^{-1}(V_i)$ la forma alternante ${}^t\overline{\xi^{(i)}}\, h_i\, \Theta_i\, \xi^{(i)}$, e sia F_{h_i} la corrispondente forma hermitiana su $\pi^{-1}(V_i)$, nelle variabili $dz_1, \dots, dz_n$. Si verifica subito che al variare dell'indice i, le forme F_{h_i} danno luogo ad una forma hermitiana globale F_h su tutta la varietà E.

LEMMA 2. *In ogni punto $p_0 = (x_0, \xi^{(i)}) \in E$ si ha:*

$$\mathcal{L}(\Phi_h, p_0) = F_h(x_0, \xi^{(i)}) + S_h(x_0, \xi^{(i)}),$$

ove $S_h(x_0, \xi^{(i)})$ è una forma hermitiana ≥ 0 su E, la quale inoltre è definita > 0 nelle direzioni tangenti alle fibre di E.

DIMOSTRAZIONE: Basta evidentemente provare la tesi in un sistema di coordinate convenientemente scelto in corrispondenza a ciascun punto $p_0 \in E$. Seguendo il ragionamento di [1], pag. 257, possiamo fissare le coordinate $\xi^{(i)}$ sulle fibre, in modo tale che si abbia $(\partial h)_{x_0} = 0$; risulta allora:

$$S_h(x_0, \xi^{(i)}) = {}^t(d\, \overline{\xi^{(i)}})\, h_i(x_0)\, d\, \xi^{(i)};$$

ciò prova il lemma 2.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1: Osserviamo preliminarmente che, data una metrica hermitiana $\{h_i\}$ sulle fibre di E, e indicata con u una funzione su X, a valori reali, differenziabile di classe C^∞, anche il sistema $\{k_i\} = \{e^u\, h_i\}$ è una metrica hermitiana sulle fibre di E.

Sfruttando l'arbitrarietà di questa funzione u su X, e conseguentemente della metrica hermitiana $k = \{k_i\}$ sulle fibre di E, proveremo ora che per una scelta conveniente di u la varietà E è q-completa relativamente alla funzione

$$\varphi = u \circ \pi + \Phi_k .$$

Calcoliamo in primo luogo:

$$F_k(x, \xi^{(i)}) = e^u \{\mathcal{L}(u)\, {}^t\overline{\xi}^{(i)} h_i \xi^{(i)} + F_h(x, \xi^{(i)})\}.$$

Detta E_0 la sezione nulla del fibrato E (E_0 definita localmente su V_i da $\xi^{(i)} = 0$), facciamo vedere ora che è possibile scegliere la funzione u in modo che la forma hermitiana F_k abbia almeno $n - q$ autovalori > 0 in ogni punto di $E - E_0$ (ed almeno $n - q$ autovalori ≥ 0 in ogni punto di E, inclusi i punti di E_0). In virtù dell'espressione calcolata per F_k, basterà provare a tal fine che è possibile scegliere la funzione u in modo che su ciascun V_i la forma hermitiana $\mathcal{L}(u)\, {}^t\overline{\xi}^{(i)} h_i \xi^{(i)} + F_h(x, \xi^{(i)})$ abbia almeno $n - q$ autovalori > 0 quando il vettore $\xi^{(i)}$ descrive l'insieme compatto ${}^t\overline{\xi}^{(i)} \xi^{(i)} = 1$. Con tale limitazione per $\xi^{(i)}$, la funzione ${}^t\overline{\xi}^{(i)} h_i \xi^{(i)}$ è su V_i maggiore di una opportuna costante > 0; si può quindi applicare il lemma 1 (e più precisamente la sua conseguenza (2)) alle forme hermitiane $\mathcal{H}_i(\xi) = ({}^t\overline{\xi}^{(i)} h_i \xi^{(i)})^{-1} F_h(x, \xi_{(i)})$; ne segue l'esistenza di una funzione u su X, godente della proprietà richiesta. Più esattamente dalla dimostrazione del lemma 1 risulta che, fissato comunque un punto $x_0 \in X$, esiste una sottovarietà $\Delta_{x_0}^{n-q}$ regolarmente immersa in X, tale che:

(*a*) $\mathcal{L}(u, x)|\Delta_{x_0}^{n-q} > 0$ nel punto $x_0 \in X$;

(*b*) $F_k(x, \xi^{(i)})|\pi^{-1}(\Delta_{x_0}^{n-q}) \geq 0$ in ogni punto $p = (x_0, \xi^{(i)}) \in E$;

(*c*) $F_k(x, \xi^{(i)})|\pi^{-1}(\Delta_{x_0}^{n-q}) > 0$ in ogni punto $p = (x_0, \xi^{(i)}) \in E - E_0$ e per tutti i vettori $(dz_1, \dots, dz_n, d\xi_1^{(i)}, \dots, d\xi_r^{(i)})$ non tangenti alle fibre di E.

Con questa scelta di u, la funzione $\varphi = u \circ \pi + \Phi_k$ è fortemente q-pseudoconvessa su E; precisamente si ha $\mathcal{L}(\varphi, p_0)\pi^{-1}|(\Delta_{x_0}^{n-q}) > 0$ in ogni punto $p_0 = (x_0, \xi^{(i)}) \in E$; per verificarlo, basta ricorrere al lemma 2, tenuto conto anche delle proprietà (*a*), (*b*), (*c*) stabilite or ora; si noti che questa conclusione è possibile perchè in ogni punto p_0 le forme hermitiane $\mathcal{L}(u \circ \pi)$ ed $\mathcal{L}(\Phi_k)$ sono entrambe ≥ 0 *su una medesima varietà* $(n + r - q)$-dimensionale $\pi^{-1}(\Delta_{x_0}^{n-q})$, e non sono simultaneamente nulle su alcun vettore tangente a tale varietà, escluso il vettore nullo.

Per terminare la dimostrazione del teorema 1 basta osservare a questo punto che gli insiemi $\{p \in E;\ \varphi(p) < c\}$ sono relativamente compatti in E per ogni $c \in \mathbf{R}$, e ciò è evidente dalla costruzione della funzione φ.

COROLLARIO. *Sia X un'arbitraria varietà complessa di dimensione complessa n; ogni fibrato vettoriale olomorfo $\pi : E \longrightarrow X$ è una varietà n-completa.*

DIMOSTRAZIONE: Basta ricordare che ogni varietà complessa X di dimensione n è n completa (cfr. [4]), dopodichè il corollario è conseguenza immediata del teorema 1.

3. Diamo ora un esempio di varietà fortemente q-pseudoconvessa (ma non q-completa) V ed un esempio di varietà fortemente q-pseudoconcava W, tali che le fibrazioni banali $V \times \mathbf{C}^r$, $W \times \mathbf{C}^r$ $(r \geq 1)$ non siano più varietà fortemente q-pseudoconvesse, rispettivamente fortemente q-pseudoconcave. Ricordiamo preliminarmente la seguente proprietà coomologica delle varietà fortemente q-pseudoconvesse e fortemente q-pseudoconcave (cfr. [1], pag. 249):

PROPOSIZIONE 1: *Sia X una varietà complessa. Si ha*

$$\dim_{\mathbf{C}} H^j(X, \mathcal{F}) < +\infty$$

per ogni fascio $\mathcal{F}$ coerente su X, e per i seguenti valori di j:
$j > q$ se X è fortemente q-pseudoconvessa;
$j < \operatorname{prof}(\mathcal{F}) - q - 1$ se X è fortemente q-pseudoconcava.

ESEMPIO 1. Sia V^n una varietà kähleriana compatta, di dimensione complessa $n \geq 1$, e di genere geometrico > 0 (ossia, indicato con Ω^n il fascio dei germi di forme differenziali olomorfe di grado n su V^n, si abbia $\dim_{\mathbf{C}} H^0(V^n, \Omega^n) > 0$). Ad esempio si può prendere come V^n un toro complesso di dimensione n.

V^n, in quanto varietà complessa compatta, è fortemente 0-pseudoconvessa. La fibrazione banale $E = V^n \times \mathbf{C}^r$ $(r \geq 1)$ non è fortemente $(n-1)$-pseudoconvessa, e di conseguenza non è neppure fortemente q-pseudoconvessa per alcun valore $q \leq n-1$; in particolare E non è fortemente 0-pseudoconvessa [5].

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo su E il fascio strutturale $\mathcal{O}_E$. Per provare la nostra asserzione, tenuto conto della proposizione 1, basta far vedere che $\dim_{\mathbf{C}} H^n(E, \mathcal{O}_E) = +\infty$; ed invero

$$\dim_{\mathbf{C}} H^n(E, \mathcal{O}_E) = \dim_{\mathbf{C}} H^n(V^n, \mathcal{O}_{V^n}) \cdot \dim_{\mathbf{C}} H^0(\mathbf{C}^r, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^r})$$

---

[5] Invece la varietà E è fortemente n-pseudoconvessa, anzi addirittura n-completa, in virtù del corollario al teorema 1.

(conseguenza della formula di Künneth-Grothendieck, cfr. ad es. [3], pag. 211). Ora $\dim_{\mathbf{C}} H^0(\mathbf{C}^r, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^r}) = +\infty$, e d'altra parte, in virtù della kählerianità di V^n si ha $\dim_{\mathbf{C}} H^n(V^n, \mathcal{O}_{V^n}) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(V^n, \Omega^n) > 0$.

ESEMPIO 2. Sia W^n una arbitraria varietà complessa fortemente 0-pseudoconcava, di dimensione complessa $n \geq 1$ (sono fortemente 0-pseudoconcave ad es. tutte le varietà complesse compatte; un esempio di varietà fortemente 0-pseudoconcava non compatta è dato da $\mathbf{C}^1$: una funzione che dà la 0-pseudoconcavità si ottiene raccordando differenziabilmente la funzione $(z\bar{z})^{-1}$, definita al di fuori dell'origine di $\mathbf{C}^1$, con un'arbitraria funzione differenziabile, definita su un opportuno intorno dell'origine stessa).

La fibrazione banale $E = W^n \times \mathbf{C}^r$ $(r \geq 1)$ non è fortemente $(n+r-2)$-pseudoconcava, e di conseguenza non è neppure fortemente q-pseudoconcava per alcun valore $q \leq n+r-2$; in particolare E non è fortemente 0-pseudoconcava.

DIMOSTRAZIONE: Ragionando esattamente come nell'esempio 1, ed osservando che $\operatorname{prof} \mathcal{O}_E = n + r$, basta far vedere che $\dim_{\mathbf{C}} H^0(E, \mathcal{O}_E) = +\infty$. Ed invero, qualunque sia W^n, lo spazio vettoriale $H^0(W^n, \mathcal{O}_{W^n})$ contiene le costanti $\mathbf{C}$, onde $\dim_{\mathbf{C}} H^0(W^n, \mathcal{O}_{W^n}) > 0$; inoltre $\dim_{\mathbf{C}} H^0(\mathbf{C}^r, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^r}) = +\infty$, onde (sempre per la formula di Künneth-Grothendieck) $\dim_{\mathbf{C}} H^0(E, \mathcal{O}_E) = +\infty$, come volevasi dimostrare.

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI-H. GRAUERT: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 193-259.

[2] A. ANDREOTTI-R. NARASIMHAN: *Oka's Heftungslemma and the Levi Problem for complex spaces.* Trans. Am. Math. Soc **111** (1964), 345-366.

[3] J. FRENKEL: *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés.* Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 135-220.

[4] V. VILLANI: *Su alcune proprietà coomologiche dei fasci coerenti su uno spazio complesso.* Rend. Sem. Mat. Università di Padova **35** (1964), 47-55.