

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. DA PRATO

U. MOSCO

## **Regolarizzazione dei semigruppı distribuzioni analitici**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 19, n<sup>o</sup> 4 (1965), p. 563-576*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1965\\_3\\_19\\_4\\_563\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_4_563_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## REGOLARIZZAZIONE DEI SEMIGRUPPI DISTRIBUZIONI ANALITICI

G. DA PRATO - U. MOSCO (\*)

In questa nota studiamo alcune proprietà di un semigruppone distribuzione  $\mathfrak{G}$  esponenziale e prolungabile analiticamente su un settore (SGDEA) (cfr. [1] Def. 3 - 0 - 1); più precisamente se  $A$  è il generatore infinitesimale di  $\mathfrak{G}$  e  $G(t)$  è il semigruppone di operatori associato a  $\mathfrak{G}$  tramite la relazione  $G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$  (cfr. [1] Def. 1 - 1 - 2) proviamo che  $G(t)$  è un operatore continuo per ogni  $t \geq 0$  e che inoltre l'applicazione  $t \rightarrow G(t)$  è una rappresentazione uniformemente continua e analitica di  $\mathbb{R}_+ = \{t : t > 0\}$  nell'algebra di Banach  $\mathcal{L}(X, X)$  degli operatori continui sullo spazio di Banach  $X$  dove  $\mathfrak{G}$  è definito.

Osserviamo che l'applicazione  $t \rightarrow G(t)$  non è in generale fortemente continua su  $\overline{\mathbb{R}_+} = \{t : t \geq 0\}$  cioè che la classe dei semigruppone di operatori associati ai SGDEA nel modo suddetto è più ampia di quella dei semigruppone di classe  $c_0$  (cfr. [2] p. 321); nel § 3 diamo un esempio di SGDEA  $\mathfrak{G}$  tale che  $G(t)$  non è un semigruppone di classe  $c_0$ .

Lions [3] ha considerato i semigruppone distribuzioni regolari per lo studio di un problema misto nel senso di Cauchy - Hadamard; più precisamente se  $A$  è un operatore lineare chiuso con dominio  $\mathcal{D}(A)$  denso nello spazio di Banach  $X$  generatore infinitesimale di un semigruppone distribuzione regolare allora l'equazione:

$$-Au + \frac{\partial u}{\partial t} = T \quad u \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{D}(A))$$

dove  $T$  è dato in  $\mathcal{D}'_+(X)$ , ammette una soluzione unica.

Con questa nota studiamo il problema di Cauchy omogeneo associato ad un operatore lineare chiuso  $A$  con dominio denso in  $X$  generatore infi-

---

Pervenuto alla Redazione il 21 Maggio 1965 ed in forma definitiva il 20 Luglio 1965.

(\*) Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 9 del C. N. R. nell'anno 1964-65.

nitesimale di un SGDEA, provando che se  $\mathfrak{G}$  è il SGDEA generato da  $A$  risulta :

$$-AG(t)x + \frac{dG(t)}{dt}x = 0$$

per ogni  $x$  del « range »  $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$  di  $\mathfrak{G}$  (cfr. [1], Def. 1-1-1).

Ringraziamo il Prof. J. L. Lions per le utili discussioni avute sull'argomento di questo lavoro.

### § 1. Notazioni.

Le notazioni usate sono le seguenti :

a)  $\mathbb{R}$  (risp.  $\mathbb{R}_+$ , risp.  $\overline{\mathbb{R}}_+$ ) è l'insieme dei numeri reali (risp. dei numeri reali positivi, risp. non negativi),  $\mathbb{C}$  l'insieme dei numeri complessi.

$\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$  è lo spazio delle funzioni su  $\mathbb{R}_+$  a valori complessi indefinitamente derivabili e a supporto compatto, con la topologia usuale (L. Schwartz [4] p. 64).

$\mathcal{C}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$  è lo spazio delle distribuzioni su  $\mathbb{R}$  aventi supporto contenuto in  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , con la topologia usuale (L. Schwartz [4] p. 88).

b)  $X$  è uno spazio di Banach,  $\mathcal{L}(X, X)$  l'algebra di Banach degli operatori lineari limitati su  $X$  con la norma usuale.

c)  $\mathfrak{G}$  è un semigrupp distribuzione su  $X$  prolungabile analiticamente sul settore  $S(\theta)$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$S(\theta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, |\arg \lambda| < \theta\}$$

di tipo  $\xi_0$  (cfr. [1] Def. 3-0-1).

Per ogni  $\lambda$  di  $S(\theta)$   $\mathfrak{G}_\lambda$  è il semigrupp distribuzione esponenziale ottenuto dal prolungamento analitico di  $\mathfrak{G}$  (cfr. [1], § 2).  $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$  è l'insieme

$$\mathcal{R}(\mathfrak{G}) = \{x : x = \sum_i \mathfrak{G}(\varphi_i) x_i, x_i \in X, \varphi_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}\}.$$

Se  $T$  è una distribuzione di  $\mathcal{C}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$   $\mathfrak{G}(T)$  è l'operatore definito da

$$\mathfrak{G}(T)x = \sum_i \mathfrak{G}(T * \varphi_i) x_i, \quad x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$$

se risulta

$$x = \sum_i \mathfrak{G}(\varphi_i) x_i, \quad x_i \in X, \varphi_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+};$$

$\mathfrak{G}(T)$  è un operatore prechiuso (cfr. [1] p. 372) la cui minima estensione chiusa indichiamo con  $\overline{\mathfrak{G}(T)}$ . In particolare se  $T = \delta_t$  è la misura di Dirac nel punto  $t, t \geq 0$ , porremo

$$G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$$

Inoltre poniamo:

$$S^0(\theta) = \left\{ \mu : \frac{\pi}{2} + \theta \leq |\arg u| \leq \pi \right\}$$

$$\Sigma(\xi_0, \theta) = \Sigma^\pm(\xi_0, \theta)$$

secondo che sia  $\text{sign } \xi_0 = \pm 1$  con

$$\Sigma^-(\xi_0, \theta) = \xi_1 + S^0(\theta), \quad \xi_1 = \frac{\xi_0}{\cos \theta}$$

$$\Sigma^+(\xi_0, \theta) = \Sigma^-(\xi_0, \theta) \cap \{ \mu : \text{Re } \mu \leq \xi_0 \}$$

$$\Omega_\varepsilon(\xi_0, \theta) = \Omega_\varepsilon^\pm(\xi_0, \theta)$$

secondo che sia  $\text{sign } \xi_0 = \pm 1$  con

$$\Omega_\varepsilon^\pm(\xi_0, \theta) = \mathbf{C} - \Sigma_\varepsilon^\pm(\xi_0, \theta)$$

dove

$$\Sigma_\varepsilon^+(\xi_0, \theta) = \Sigma_\varepsilon^-(\xi_0, \theta) \cap \{ \mu : \text{Re } \mu \leq \xi_0 + \varepsilon \}$$

$$\Sigma_\varepsilon^-(\xi_0, \theta) = \xi_1 + \varepsilon + S^0(\theta - \varepsilon).$$

Infine conviene ricordare esplicitamente il Teorema 3-2-1 in [1], che nel seguito sarà citato come Teorema 1-1.

**TEOREMA 1-1:** *Un operatore lineare chiuso  $A$  con dominio denso in  $X$  è il generatore infinitesimale di un SGDEA sul settore  $S(\theta), 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , di tipo  $\xi_0$ , se e soltanto se esiste un  $\xi_0$  reale tale che*

(i) *lo spettro  $\sigma(A)$  di  $A$  è contenuto nell'insieme  $\Sigma(\xi_0, \theta)$ ;*

(ii) *il risolvente  $R(\mu, A)$  di  $A$ , per ogni  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < \theta$ , verifica una maggiorazione del tipo*

$$\| R(\mu, A) \| \leq p_\varepsilon(|\mu|)$$

*sull'insieme  $\Omega_\varepsilon(\xi_0, \theta)$ , con  $p_\varepsilon$  opportuno polinomio a coefficienti non negativi.*

## § 2. Regolarizzazione di un SGDEA.

In questo paragrafo proviamo che se  $\mathfrak{G}$  è un SGDEA, posto

$$G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)} \text{ per } t > 0$$

risulta  $G(t) \in \mathcal{L}(X, X)$  e che inoltre l'applicazione  $t \rightarrow G(t)$  di  $\mathbb{R}_+$  in  $\mathcal{L}(X, X)$  è analitica e si ha

$$G^{(k)}(t)x - A^k G(t)x = 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G}).$$

LEMMA 2-1 : Sia  $A$  un operatore lineare chiuso con dominio denso in  $X$  verificante le condizioni (i) e (ii) del Teorema 1-1 e sia  $\mathfrak{G}$  il SGDEA (di tipo  $\xi_0$ ) generato da  $A$ .

Allora per ogni  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < \theta$  risulta

$$(2-1-1) \quad \|\mathfrak{G}(\varphi)\| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{\xi_\varepsilon t} q_\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right) |\varphi(t)| dt$$

per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ , con

$$\xi_\varepsilon = (\xi_1 + \varepsilon) + |\xi_1 + \varepsilon| \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)$$

$$q_\varepsilon(t) = \frac{n_\varepsilon!}{\pi \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)} p_\varepsilon\left(\frac{t}{\operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)}\right)$$

dove  $n_\varepsilon$  è il grado di  $p_\varepsilon$  e  $\xi_1 = \frac{\xi_0}{\cos \theta}$ .

DIMOSTRAZIONE :

Si ha per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$  :

$$\mathfrak{G}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} R(\mu, A) \int_0^{+\infty} e^{\mu t} \varphi(t) dt d\mu \quad \text{con } a \geq \xi'_1 = \xi_1 + \varepsilon$$

l'integrale essendo inteso nella topologia uniforme di  $\mathcal{L}(X, X)$ .

Poniamo  $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon$  e consideriamo le semirette

$$r_\pm = \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, \mu = -\tau e^{\mp i\theta'} + \xi'_1, \tau \geq 0\};$$

per ogni  $b > 0$  le rette  $\operatorname{Im} \mu = \pm b$  tagliano nella regione del piano  $\mu$  compresa fra la retta  $\operatorname{Re} \mu = a$  e le semirette  $r_\pm$  un dominio  $D$  contenuto nel campo di olomorfia di  $R(\mu, A)$ .

Posto

$$f(\mu) = R(\mu, A) \int_0^{+\infty} e^{\mu t} \varphi(t) dt$$

si ha

$$0 = \int_{FD} f(\mu) d\mu = \int_{a-ib}^{a+ib} f(\mu) d\mu + J_+(a, b) + J_-(a, b) + J'_+(a, b) + J'_-(a, b)$$

con

$$J_{\pm}(a, b) = \pm e^{\mp i\theta'} \int_0^{b/\sin\theta'} f(-\tau e^{\mp i\theta'} + \xi'_1) d\tau$$

$$J'_{\pm}(a, b) = \mp \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a f(\tau \pm ib) d\tau.$$

Dimostriamo ora che risulta

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} J'_{\pm}(a, b) = 0 \text{ in } \mathcal{L}(X, X).$$

Si ha, ponendo per brevità  $n = n_{\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} J'_{\pm}(a, b) &= \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a R(\tau \pm ib, A) \int_0^{+\infty} e^{(\tau \pm ib)t} \varphi(t) dt d\tau = \\ &= \mp (-1)^{n+2} \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a \frac{R(\tau \pm ib, A)}{(\tau \pm ib)^{n+2}} \int_0^{+\infty} e^{(\tau \pm ib)t} \varphi^{(n+2)}(t) dt d\tau. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\|J'_{\pm}(a, b)\| \leq \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a \frac{\|R(\tau \pm ib, A)\|}{|\tau \pm ib|^{n+2}} \int_0^{+\infty} e^{\tau t} |\varphi^{(n+2)}(t)| dt d\tau$$

e posto

$$M_{\pm} = \sup_{t \geq 0} \frac{p_{\varepsilon}(|\tau \pm ib|)}{|\tau \pm ib|^n}$$

risulta

$$\begin{aligned} \|J'_{\pm}(a, b)\| &\leq M_{\pm} \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a \int_0^{+\infty} \frac{e^{\tau t} |\varphi^{(n+2)}(t)|}{\tau^2 + b^2} dt d\tau = \\ &= M_{\pm} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n+2)}(t)| \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a \frac{e^{\tau t}}{\tau^2 + b^2} dt d\tau. \end{aligned}$$

Dunque

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \|J_{\pm}'(a, b)\| = 0.$$

Si ha allora

$$\mathfrak{G}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} [J_+(a, +\infty) + J_-(a, +\infty)]$$

dove

$$J_{\pm}(a, +\infty) = \pm e^{\mp i\theta'} \int_0^{+\infty} f(-\tau e^{\mp i\theta'} + \xi_1') d\tau.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \|J_{\pm}(a, +\infty)\| &\leq \int_0^{+\infty} \|R(-\tau e^{\mp i\theta'} + \xi_1', A)\| \int_0^{+\infty} e^{(\xi_1' - \tau \cos \theta')t} |\varphi(t)| dt d\tau \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{\xi_1' t} |\varphi(t)| F(t) dt \end{aligned}$$

avendo posto

$$F(t) = \int_0^{+\infty} p_{\varepsilon}(\tau + |\xi_1'|) e^{-\tau \cos \theta'} d\tau.$$

Risulta ora

$$F(t) = \int_{|\xi_1'|}^{+\infty} p_{\varepsilon}(\tau) e^{-\tau \cos \theta'} e^{|\xi_1'| t \cos \theta'} d\tau \leq n! \frac{e^{|\xi_1'| t \cos \theta'}}{t \cos \theta'} p_{\varepsilon}\left(\frac{1}{t \cos \theta'}\right).$$

Si ha dunque

$$\|\mathfrak{G}(\varphi)\| \leq \frac{n!}{\pi \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{(\xi_1' + |\xi_1'| \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon))t}}{t} p_{\varepsilon}\left(\frac{1}{t \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)}\right) |\varphi(t)| dt$$

cosicchè la tesi del Lemma è provata.

Possiamo ora dimostrare il seguente Teorema.

**TEOREMA 2-1:** *Sia  $\mathfrak{G}$  un SGDEA sul settore  $S(\theta)$ . Posto per ogni  $t \geq 0$  e per ogni  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < \theta$   $G(t) = \mathfrak{G}(\delta_t)$  sussiste la maggiorazione:*

$$\|G(t)\| \leq \frac{e^{\xi_1 t}}{t} q_{\varepsilon}\left(\frac{1}{t}\right)$$

con

$$\xi_\varepsilon = \xi_1 + \varepsilon + |\xi_1 + \varepsilon| \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)$$

$$q_\varepsilon(\mu) = \frac{n_\varepsilon!}{\pi \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)} p_\varepsilon\left(\frac{\mu}{\operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)}\right),$$

dove  $p_\varepsilon$  è un polinomio di grado  $n_\varepsilon$  verificante la condizione (ii),  $A$  essendo il generatore infinitesimale di  $\mathfrak{G}$ .

Inoltre l'applicazione  $t \rightarrow G(t)$  di  $\mathbb{R}_+$  in  $\mathcal{L}(X, X)$  è prolungabile a un'applicazione analitica  $\lambda \rightarrow G(\lambda)$  di  $S(\theta)$  in  $\mathcal{L}(X, X)$  e risulta

$$\frac{d^k G(\lambda)}{d\lambda^k} x - A^k G(\lambda) x = 0, \quad x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G}).$$

DIMOSTRAZIONE:

In virtù del Lemma 2-1, fissato  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < \theta$  risulta

$$\|\mathfrak{G}(\varphi)\| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{\xi_\varepsilon t}}{t} q_\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right) |\varphi(t)| dt$$

per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ .

Sia  $\{\varrho_\nu\}$  una successione regolarizzante, cioè tale che  $\varrho_\nu \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$  e  $\varrho_\nu * \varphi \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ , e sia  $\eta > 0$ ; possiamo supporre che i supporti delle  $\varrho_\nu$  siano contenuti nell'intervallo  $]0, \eta]$ . Si ha, per ogni  $s > 0$

$$\|\mathfrak{G}(\delta_s * \varrho_\nu)\| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{\xi_\varepsilon(s+t)}}{s+t} q_\varepsilon\left(\frac{1}{s+t}\right) |\varrho_\nu(t)| dt$$

e dunque

$$(2-1-2) \quad \|\mathfrak{G}(\delta_s * \varrho_\nu)\| \leq e^{\xi_\varepsilon(s+\eta)} \frac{1}{s} q_\varepsilon\left(\frac{1}{s}\right).$$

Se ora  $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$  risulta

$$G(s)x = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{G}(\delta_s * \varrho_\nu)x.$$

Ne segue, in virtù della (2-1-2)

$$\|G(s)x\| \leq e^{\xi_\varepsilon(s+\eta)} \frac{1}{s} q_\varepsilon\left(\frac{1}{s}\right) \|x\|$$



e quindi, per l'arbitrarietà di  $\eta$  e dato che  $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$  è denso in  $X$ , ne segue la continuità dell'operatore  $G(s)$  e la maggiorazione

$$\|G(s)\| \leq \frac{e^{\xi_\varepsilon s}}{s} q_\varepsilon \left( \frac{1}{s} \right).$$

Per provare che  $G(t)$  è prolungabile analiticamente su  $S(\theta)$  introduciamo le seguenti funzioni

$$g_\nu(\lambda) = \mathfrak{G}_\lambda(\varrho_\nu * \delta_1);$$

$g_\nu(\lambda)$  è analitica su  $S(\theta)$  per il Teorema 1-1.

Inoltre se  $\lambda = s \in \mathbb{R}_+$  e  $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$  si ha

$$(2-1-3) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(s)x = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{G}_s(\varrho_\nu * \delta_1) = G(s)x$$

e, procedendo come per la deduzione della (2-1-2), si trova

$$\|\mathfrak{G}_s(\varrho_\nu * \delta_1)\| \leq \frac{e^{\xi_\varepsilon s(1+\eta)}}{s} q_\varepsilon \left( \frac{1}{s} \right)$$

dato che i supporti delle  $\varrho_\nu$  sono contenuti in  $]0, s\eta]$ ; quindi la (2-1-3) sussiste per ogni  $x \in X$ .

Dimostriamo ora che quando  $\lambda$  varia in un compatto  $Q$  contenuto in  $S(\theta)$  allora l'insieme  $\{\|g_\nu(\lambda)\|\}$  è equilimitato al variare di  $\nu$  e di  $\lambda$ .

Da ciò seguirà per il Teorema di Vitali che, posto

$$G(\lambda) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(x)$$

$G(\lambda)$  è un'applicazione analitica di  $S(\theta)$  in  $\mathcal{L}(X, X)$ , la quale è evidentemente il prolungamento analitico di  $G(t)$ .

Sia  $\lambda \in Q$ . L'operatore lineare chiuso  $\lambda A$  verifica le ipotesi del Teorema 1-1 con  $\theta_\lambda = \theta - |\arg \lambda|$  al posto di  $\theta$ ,  $\xi_{0,\lambda} = |\lambda| \xi_0$  al posto di  $\xi_0$  e  $p_{\varepsilon,\lambda}$  al posto di  $p_\varepsilon$  essendo

$$p_{\varepsilon,\lambda}(|\mu|) = \frac{1}{|\lambda|} p_\varepsilon \left( \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \right).$$

Ricordando che  $\lambda A$  è il generatore infinitesimale di  $\mathfrak{G}_\lambda$  (cfr. [1] Prop. 2-3-2) e applicando a  $\lambda A$  il Lemma 2-1 si ottiene per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$

$$\|\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{\xi_\varepsilon \lambda t} q_{\varepsilon,\lambda} \left( \frac{1}{t} \right) |\varphi(t)| dt$$

con

$$\xi_{\varepsilon, \lambda} = (\xi_{1, \lambda} + \varepsilon) + |\xi_{1, \lambda} + \varepsilon| \operatorname{sen}(\theta_\lambda - \varepsilon)$$

$$\xi_{1, \lambda} = \frac{\xi_{0, \lambda}}{\cos \theta_\lambda}$$

$$q_{\varepsilon, \lambda}(t) = \frac{n_\varepsilon!}{\pi \operatorname{sen}(\theta_\lambda - \varepsilon)} p_{\varepsilon, \lambda} \left( \frac{t}{\operatorname{sen}(\theta_\lambda - \varepsilon)} \right),$$

dove  $n_\varepsilon$  è il grado di  $p_\varepsilon$ .

Ne segue

$$\|g_\nu(\lambda)\| = \|\mathfrak{G}_\lambda(\varrho_\nu * \delta_1)\| \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{\xi_{\varepsilon, \lambda} t}}{t} q_{\varepsilon, \lambda} \left( \frac{1}{t} \right) |\varrho_\nu(t-1)| dt \leq e^{\xi_{\varepsilon, \lambda}(1+\eta)} q_{\varepsilon, \lambda}(1)$$

e dunque è provata la equilimitatezza di  $\{\|g_\nu(\lambda)\|\}$  al variare di  $\nu$  e di  $\lambda$  in  $Q$ .

Infine passando al limite per  $\nu \rightarrow \infty$  nella relazione

$$\frac{d^k \mathfrak{G}_\lambda(\delta_1 * \varrho_\nu)}{d\lambda^k} x = A^k \mathfrak{G}_\lambda(\delta_1 * \varrho_\nu) x$$

(cfr. [1] (2-2-1) e Prop. 2-3-2), si trova

$$\frac{d^k G(\lambda) x}{d\lambda^k} = A^k G(\lambda) x.$$

### § 3. Un esempio di SGDEA.

Indichiamo con  $E_2$  lo spazio di Hilbert complesso di dimensione 2; fissata una base ortonormale in  $E_2$ , allora dato un operatore lineare  $T$  lo identificheremo con la sua espressione matriciale rispetto a tale base; posto

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

porremo anche  $|T|^2 = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + |t_{21}|^2 + |t_{22}|^2$ . Si mostra facilmente che risulta:

$$\frac{1}{2} |T|^2 \leq \|T\|^2 \leq |T|^2.$$

Con  $E_2^{(k)}$  indicheremo una copia di  $E_2$ ,  $k = 0, 1, \dots$  e con  $X$  la somma diretta degli  $E_2^{(k)}$ :

$$X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} E_2^{(k)}.$$

Indicheremo inoltre con  $Y$  il sottospazio vettoriale di  $X$  costituito dalla totalità delle combinazioni lineari finite di elementi di  $E_2^{(k)}$ ; evidentemente  $Y$  è denso in  $X$ .

Definiamo in  $E_2^{(k)}$  l'operatore  $\mathfrak{G}_k(\varphi)$ :

$$\mathfrak{G}_k(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-kt} \begin{pmatrix} 1 & k^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt \quad k = 0, 1, \dots \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+};$$

è evidente che  $\mathfrak{G}_k(\varphi)$  è un SGDE su  $E_2^{(k)}$  di tipo  $-k$ .

Vogliamo ora provare che posto:

$$\mathfrak{G}(\varphi) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{G}_k(\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$$

$\mathfrak{G}(\varphi)$  è un SGDE di tipo 0 su  $X$ .

Se  $\varphi \in \mathcal{S}^\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\varphi(t) = e^{-\varepsilon t} \psi(t)$ ,  $\psi \in \mathcal{S}$  risulta

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{G}_k(\varphi)\|^2 &= \left\{ 2 \left| \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-(k+\varepsilon)t} dt \right|^2 + \left| \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-(k+\varepsilon)t} k^2 t dt \right|^2 \right\} \\ &\leq \left( \frac{2}{(k+\varepsilon)^2} + \frac{k^4}{(k+\varepsilon)^4} \right) \left( \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}_+}} |\psi(t)| \right)^2 \leq \left( \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \right) \left( \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}_+}} |e^{\varepsilon t} \varphi(t)| \right)^2; \end{aligned}$$

ne segue:

$$\|\mathfrak{G}(\varphi)\| \leq (2/\varepsilon^2 + 1)^{1/2} \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}_+}} |e^{\varepsilon t} \varphi(t)|$$

cosicchè  $\mathfrak{G}(\varphi)$  è continuo in  $X$  e l'applicazione  $\varphi \rightarrow \mathfrak{G}(\varphi)$  di  $\mathcal{S}^\varepsilon$  in  $\mathcal{L}(X, X)$  è continua.

Inoltre la relazione

$$\mathfrak{G}(\varphi) \mathfrak{G}(\psi) x = \mathfrak{G}(\varphi * \psi) x \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}, \quad \psi \in \mathcal{S}^\varepsilon, \quad x \in X$$

vale per ogni  $x$  di  $Y$  e quindi per ogni  $x$  di  $X$ .

(\*) Per la definizione dello spazio  $\mathcal{S}^\varepsilon$  vedi [1], pp. 370.

In modo analogo si prova la condizione di regolarità per  $\mathfrak{G}$ .

Dimostriamo infine che  $\mathfrak{G}$  verifica le condizioni ausiliarie (cfr. [1], 1-1). Innanzi tutto, poichè  $Y \subset \mathcal{R}(\mathfrak{G})$ , ne segue che  $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$  è denso in  $X$ ; inoltre se  $x \in X$  è tale che  $\mathfrak{G}(\varphi)x = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ , detta allora  $x_k$  la proiezione di  $x$  su  $E_2^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  si ha

$$\mathfrak{G}_k(\varphi)x_k = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$$

e quindi  $x_k = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$  cosicchè risulta  $x = 0$ .

Abbiamo così provato che  $\mathfrak{G}$  è un SGDE di tipo  $\leq 0$ , ed è facile la verifica che  $\mathfrak{G}$  è esattamente di tipo 0.

Detto  $A$  il generatore infinitesimale di  $\mathfrak{G}$  e  $A_k$  quello di  $G_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  si ha

$$R(\mu, A) = \mathfrak{G}(e^{-\mu t}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{G}_k(e^{-\mu t}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R(\mu, A_k) \quad \text{Re } \mu > 0,$$

con

$$R(\mu, A_k) = \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+k)t} \begin{pmatrix} 1 & k^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{(\mu+k)^2} \begin{pmatrix} \mu+k & k^2 \\ 0 & \mu+k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Si ha:

$$|R(\mu, A_k)|^2 = \frac{2|\mu+k|^2 + k^4}{|\mu+k|^4}.$$

Se  $\mu = s \in \mathbb{R}_+$  si ha

$$\|R(s, A_k)\|^2 \geq \frac{1}{2} |R(s, A_k)|^2 \geq \frac{1}{2} \frac{k^4}{(s+k)^4}$$

da cui  $\|R(s, A)\|^2 \geq \frac{1}{2}$ , cosicchè  $A$  non è il generatore infinitesimale di un semigruppato di classe  $e_0$ .

Sia ora  $\varepsilon$  un numero positivo minore di  $\frac{\pi}{2}$ ; dimostriamo che  $A$  verifica le ipotesi del Teorema 1-1 con  $p_\varepsilon$  polinomio costante e con  $\xi_0 = 0$ . Si ha:

$$|R(\mu, A_k)|^2 \leq 2 \frac{(k^2 + k + |\mu|)^2}{|k + \mu|^4}$$

e quindi

$$\|R(\mu, A_k)\| \leq \sqrt{2} \frac{k^2 + k + |\mu|}{|k + \mu|^2} \leq \sqrt{2} \left( \sup_k \frac{k^2}{|k + \mu|^2} + \sup_k \frac{k}{|k + \mu|^2} + |\mu| \sup_k \frac{1}{|k + \mu|^2} \right).$$

Poniamo  $\mu = \rho e^{i\theta}$  e osserviamo che sul settore  $\Omega_\varepsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  si ha

$$0 \leq |\theta| \leq \pi - \varepsilon \quad \text{e} \quad \rho \geq \varepsilon \sin \varepsilon.$$

Si trova

$$\sup_k \frac{k^2}{|k + \mu|^2} = \sup_k \frac{k^2}{k^2 + 2k\rho \cos \theta + \rho^2} \begin{cases} = 1 & \text{se } \cos \theta \geq 0 \\ = \frac{1}{1 - \cos^2 \theta} & \text{se } \cos \theta < 0, \end{cases}$$

cosicchè

$$\sup_k \frac{k^2}{|k + \mu|^2} \leq \frac{1}{1 - \cos^2 \varepsilon} \quad \forall \mu \in \Omega_\varepsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Inoltre

$$\sup_k \frac{k}{|k + \mu|^2} = \frac{1}{2\rho(1 + \cos \theta)} \leq \frac{1}{2\varepsilon \sin \varepsilon (1 - \cos \varepsilon)} \quad \forall \mu \in \Omega_\varepsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Infine

$$\sup_k \frac{|\mu|}{|k + \mu|^2} \begin{cases} = \frac{1}{\rho} & \text{se } \cos \theta \geq 0 \\ = \frac{1}{\rho(1 - \cos^2 \theta)} & \text{se } \cos \theta < 0, \end{cases}$$

cosicchè

$$\sup_k \frac{|\mu|}{|k + \mu|^2} \leq \frac{1}{\varepsilon \sin \varepsilon (1 - \cos^2 \varepsilon)} \quad \forall \mu \in \Omega_\varepsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

ne segue

$$\|R(\mu, A)\| \leq C_\varepsilon \quad \forall \mu \in \Omega_\varepsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

essendo

$$C_\varepsilon = \sqrt{2} \left( \frac{1}{1 - \cos^2 \varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon \cos \varepsilon (1 - \cos \varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon \sin \varepsilon (1 - \cos^2 \varepsilon)} \right).$$

Dunque  $\mathfrak{G}$  è un SGDEA.

Vogliamo ora determinare  $G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$ ; poniamo

$$G(t) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} G_k(t)$$

$$G_k(t) = e^{-kt} \begin{pmatrix} 1 & k^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad k = 0, 1, \dots;$$

evidentemente  $G(t)$  coincide con  $\overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$  su  $Y$ ; per provare che  $G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$  basta mostrare allora che  $G(t)$  è continuo per ogni  $t \in \mathbb{R}_+$ . Si ha infatti:

$$|G_k(t)|^2 = e^{-2kt} (2 + k^4 t^2) \leq \sup_k (2e^{-2kt} + k^4 t^2 e^{-2kt}) = \left(2 + \left(\frac{2}{e}\right)^4 \frac{1}{t^2}\right)$$

da cui

$$\|G(t)\| \leq \left[2 + \left(\frac{2}{e}\right)^4 \frac{1}{t^2}\right]^{1/2};$$

in modo analogo si prova

$$\|G(t)\| \geq \left(\frac{2}{e}\right)^2 \frac{1}{t}$$

cosicchè  $G(t)$  non è di classe  $c_0$ .

Osserviamo infine che se la 3-1 si modifica al modo seguente

$$\mathfrak{G}_k(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-(k\sin\alpha + ik\cos\alpha)t} \begin{pmatrix} 1 & k^\beta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt, \quad 0 \leq \alpha < \pi \quad \beta \geq 0 \quad k = 0, 1, \dots$$

e se si pone

$$\mathfrak{G}(\varphi) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{G}_k(\varphi)$$

si trovano, ragionando in modo analogo, i seguenti risultati: qualunque sia  $\alpha$ , se  $\beta > 2$ ,  $\mathfrak{G}$  è SGD, ma non è esponenziale nè regolare; se  $1 < \beta \leq 2$ ,  $\mathfrak{G}$  è un SGDE e  $\|R(\mu, A)\| = o\left(\frac{1}{(\operatorname{Re} \mu)^{2-\beta}}\right)$ ; se  $\beta \leq 1$ ,  $\mathfrak{G}(t)$  è di classe  $c_0$ .

Inoltre se  $0 < \alpha < \pi$  e  $\beta \leq 2$   $\mathfrak{G}$  è un SGDEA su  $S\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ , mentre se  $\alpha = 0$  lo spettro di  $A$  non è contenuto in alcun settore essendo costituito dai numeri  $0, -i, \dots -ki, \dots$ , quindi  $\mathfrak{G}$  non è prolungabile analiticamente; da notare che in questo caso  $\overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$  non è continuo se  $\beta > 1$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] G. DA PRATO - U. MOSCO, « *Semigrupp distribuzioni analitici* », *Annali Scuola Normale Superiore di Pisa*, XIX (1965), 367-396.
- [2] E. HILLE - R. S. PHILLIPS, « *Functional Analysis and semi-groups* », *Colloq. Publ. Amer. Math. Soc.*, **31** (1957).
- [3] J. L. LIONS, « *Les semi-groupes distributions* », *Portugaliae Math.* **19** (1960), 141-164.
- [4] L. SCHWARTZ, « *Théorie des distributions* », Tome I, Hermann Paris (1957).