ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

V. AVANISSIAN

Sur l'extension à $\mathfrak{C}^n$ d'un théorème de Lindwart-Polya

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 3 (1965), p. 407-413
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_3_407_0>

SUR L'EXTENSION À $\mathbb{C}^n$ D'UN THÉORÈME DE LINDWART-POLYA

par V. Avanissian

On se propose essentiellement de donner une démonstration de l'énoncé suivant:

Théorème 1. *Soit dans* $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ *une suite de polynomes*

$$P_m(z_1, z_2, \dots, z_n) \qquad P_m(0) \neq 0 \tag{1}$$

de dégré $m = 1, 2, \dots,$ *uniformement convergente sur tout compact* K *contenu dans un ouvert* Ω *contenant* 0. *Si l'aire* σ_m *de l'ensemble analytique* $P_m = 0$ *vérifie*

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{d\sigma_m(a)}{\| a \|^{2n-2+\alpha}} \leq M \tag{2}$$

où $\alpha > 0$, $M > 0$ *sont des constantes, alors la suite* P_m *converge uniformement sur tout compact de* $\mathbb{C}^n$ *vers une fonction entière d'ordre au plus* α *si celui-ci est entier, et d'ordre au plus* $E(\alpha) + 1$, *si* α *n'est pas entier* ($E(\alpha)$ *étant la partie entièr de* α).

Dans $\mathbb{C}^1$ le théorème est dû à Jentzsch-Lindwart-Polya [6], [7]. Dans [1] il a été ètable pour $n \geq 2$ et $0 < \alpha < 1$. Le cas général s'obtient par la même méthode que dans [1] et grâce à une représentation intégrale des fonctions entières d'ordre fini de P. Lelong [2].

1. Rappel de définitions.

On renvoie le lecteur aux mémoires [3] [4] où sont établies les propriétés ci-dessous dont nous faisons usage. On note $z = (z_1, \dots, z_n)$ un point

Pervenuto alla Redazione il 14 Aprile 1965.

courant de $\mathbb{C}^n$ et par $\| z \| = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i \right)^{\frac{1}{2}}$, la norme euclidienne. $B(z\,;r)$ est la boule de centre z et de rayon $r > 0$, portée par $\mathbb{C}^n$.

1.1. Soit $f(z_1, \dots, z_n)$ une fonction holomorphe, $V = \operatorname{Log} |f|$. Le courant (au sens de G. Rham)

$$T = \frac{i}{\pi} d' d'' V = \frac{i}{\pi} \Sigma \frac{\partial^2 V}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} dz_p \wedge d\bar{z}_q$$

est l'opérateur d'intégration sur le diviseur $f = 0$; la mesure de Radon positive

$$\sigma = T \wedge \beta_{n-1}$$

où

$$\beta_1 = \frac{i}{2} \Sigma\, dz_p \wedge d\bar{z}_p, \qquad \beta_{n-1} = \frac{\beta_1^{n-1}}{(n-1)!},$$

est l'aire de l'ensemble analytique $f = 0$. L'aire $\sigma(\overset{\circ}{z}\,; R)$ contenue dans la boule $B(\overset{\circ}{z}\,; R)$, est pour $\overset{\circ}{z}$ fixé, fonction croissante de R. Si $f(\overset{\circ}{z}) = 0$, on a

$$\sigma(\overset{\circ}{z}\,; R) \geq \tau_{2n-2}(1)\, R^{2n-2} \tag{3}$$

où $\tau_{2n-2}(1)$ est le volume de la boule unité portée par $\mathbb{C}^{n-1}$. Dans le cas $n = 1$, $\sigma(0\,; R)$ est le nombre des zéros de $f(z)$ de module inférieur à R comptés avec leur multiplicité. Rappelons que $\sigma(z\,; R)$ s'exprime en fonction de la moyenne $\lambda[\operatorname{Log}|f|\,; z\,; R]$ de $\operatorname{Log}|f|$ sur la frontière de la boule $B(z\,; R)$:

$$\sigma(\overset{\circ}{z}\,; R) = \tau_{2n-2}(1)\, \nu(z\,; R)\, R^{2n-2} \tag{4}$$

où $\nu(z\,; R) = \dfrac{\partial}{\partial \operatorname{Log} R} \lambda[\operatorname{Log}|f|\,; z\,; R]$ est positive et croissante de R.

1.2. *Noyau canonique de genre* q, [5].

Par analogie avec les facteurs primaires de Weierstrass (dans le cas $n = 1$) on introduit dans $\mathbb{C}^n$ le noyau $e_n(a\,; z\,; q)$.

Soit pour $a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}^n$,

$$\frac{1}{\|z - a\|^{2n-2}} = \frac{1}{\|a\|^{2n-2}} + P_1(a\,; z_i\,; \bar{z}_j) + \dots + P_s(a\,; z_i\,; \bar{z}_j) + \dots$$

le développement au voisinage de $z = 0$, du noyau de la théorie du potentiel newtonien. Par définition le noyau primaire de genre l'entier $q \geq 0$ est la fonction

$$e_n(a\,;z\,;q) = -\frac{1}{\|z-a\|^{2n-2}} + \frac{1}{\|a\|^{2n-2}} + P_1(a\,;z_i\,;\bar{z}_j) + \dots + P_q(a\,;z_i\,;\bar{z}_j).$$

On a la majoration pour tout $z \in \mathbb{C}^n$:

$$e_n(a\,;z\,;q) \leq c(n,q)\frac{\|z\|^{q+1}}{\|a\|^{2n-2+q}(\|z\|+\|a\|)} \leq c(n,q)\frac{\|z\|^{q+1}}{\|a\|^{2n-1+q}} \tag{5}$$

où $c(n,q)$ est une constante.

THÉORÈME [2]. *Soit $F(z_1, \dots, z_n)$ une fonction entière,*

$$F(0) \neq 0,\ \nu(t) = \frac{\partial}{\partial \operatorname{Log} t}\lambda[\operatorname{Log}|F|\,;0\,;t],\ \operatorname{Log}^+|F| = \operatorname{Sup}(\operatorname{Log}|F|\,;0)$$

si

$$\lambda[\operatorname{Log}^+|F|\,;0\,;t] = o(t^{q+1})\ (t \to \infty)$$

$$\int_0^\infty \frac{d\nu(t)}{t^{q+1}} < \infty$$

pour l'entier $q \geq 0$, on a uniformement sur tout compact de $\mathbb{C}^n$ (Re *désigne une partie réelle*),

$$V = \operatorname{Log}|F| = \operatorname{Re}\left[V(0) + 2\,\Sigma z_i\frac{\partial V}{\partial z_i}(0) + \dots + \frac{2}{q\,!}\left(\Sigma z_i\frac{\partial}{\partial z_i}\right)_0^q V\right] + \tag{6}$$

$$+\frac{1}{\omega_{2n-2}(1)}\int d\sigma(a)\,e_n(a\,;z\,;q)$$

$\omega_{2n-2}(1)$ *étant la mesure-aire de la sphèse unité de* $\mathbb{C}^{n-1}$.

En particulier (6) est valable pour un polynome P_m de degré m, $P_m(0) \neq 0$, avec q entier ≥ 0 quelconque. Rappelons que dans ce derniere cas on a, pour tout $r \geq 0$ et m :

$$\frac{1}{m}\sigma_m(r) \leq \tau_{2n-2}(1)\,r^{2n-2} \tag{7}$$

Inégalité qui résulte de (4) et du fait que pour un polynome P_m de degré m, $\frac{\partial}{\partial \operatorname{Log} R} \lambda \left[\frac{1}{m} \operatorname{Log} | P_m | ; 0 ; R \right] \leq 1$, quel que soit $R \geq 0$.

2. Démonstration du théoreme 1.

Lemme 1. *$\sigma_m(r)$ étant l'aire de l'ensemble analytique $P_m = 0$ contenue dans la boule $B(0 ; r)$, on a pour tout m et $r \geq 0$*

(8) $$\sigma_m(r) \leq M r^{2n-2+\alpha}.$$

En effet m étant fixé, on déduit de (2)

(9) $$\left[\sigma_m(t)\, t^{-(2n-2+\alpha)} \right]_0^\infty + (2n-2+\alpha) \int_0^\infty \frac{\sigma_m(t)}{t^{2n-1+\alpha}}\, dt \leq M.$$

A cause de (7) et du fait que $\sigma_m(t)$ est nulle au voisinage de $t = 0$, le premier terme de (9) disparait. En remarquant que $\sigma_m(t)$ est fonction croissante de t on obtient en particulier pour tout $r \geq 0$,

$$(2n-2+\alpha)\, \sigma_m(r) \int_r^\infty \frac{dt}{t^{2n-1+\alpha}} = \frac{\sigma_m(r)}{r^{2n-2+\alpha}} \leq M.$$

Lemme 2. *Soit $F_m(z_1, \dots, z_n)$ $(m = 1, 2, \dots)$ une suite de fonctions intières dont les zéros vérifient pour tout m et $r > 0$,*

(10) $$\sigma_m(r) \leq M r^{2n-2+\alpha}$$

$\alpha > 0$, $M > 0$ étant des constantes. Alors il n'existe aucun zéro des F_m dans la boule de centre 0 et de rayon

$$\delta = \alpha \left[\frac{\tau_{2n-2}(1)}{M} \cdot \frac{(2n-2)^{2n-2}}{(2n-2+\alpha)^{2n-2+\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

En effet, l'hypothèse (10) montre que $F_m(0) \neq 0$ pour tout m. Soit $\overset{\circ}{z}$ un point de l'ensemble défini par $F_m = 0$ (m fixé). Si $r > r_0 = \| \overset{\circ}{z} \|$, écrivons que l'aire σ_m contenue dans la boule $B(\overset{\circ}{z} ; r - r_0)$ est au plus égale à celle portée par la boule $B(0\,;r)$. Tenant compte de (3) et de (10), on obtient

$$\tau_{2n-2}(1)(r-r_0)^{2n-2} \leq \sigma_m(\overset{\circ}{z}\,;\,r-r_0) \leq \sigma_m(r) \leq Mr^{2n-2+\alpha}$$

où

$$(11) \qquad r - r_0 \leq M' r^{1+\frac{\alpha}{2n-2}} \qquad M' = [M\,\tau_{2n-2}^{-1}(1)]^{\frac{1}{2n-2}}.$$

Considérons la courbe convexe croissante

$$g(r) = M' r^{1+\frac{\alpha}{2n-2}} \qquad (r \geq 0).$$

Menons la tangente de pente 1 (qui existe et est unique). Elle coupe l'axe des r en un point d'abscisse $\delta > 0$. Alors on n'aura (11) pour tout $r > r_0$ que si la droite $y = r - r_0$ est au dessous de la tangente en question. Le calcul de δ donne l'expression figurant dans l'énoncé.

Revenons au théorème 1. D'après les lemmes 1 et 2, il n'existe aucun zéro des P_m dans la boule $B(0\,;\delta)$. La convergence uniforme des P_m dans Ω entraîne la convergence des aires $\sigma_m(t)$ portées par des boules contenues dans Ω, vers celle de la fonction limite (d'après (4) et le Th. 6 de [3]). Il en résulte que dans $\Omega \cap B(0\,;\delta)$, la fonction F limite de P_m n'a aucun zéro. Pour m fixé, les conditions de la représentation (6) sont vérifiées pour tout $q \geq 0$. En effett, les polynomes sont d'ordre zéro, d'où la premiere condition. La seconde est aussi vérifiée car pour un polynome de degré m,

$$\nu_m(t) = \frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Log}\,t}\,\lambda\,[\mathrm{Log}\,|P_m|\,;\,0\,;\,t] \leq m.$$

Dans la représentation (6) on peut donc prendre $q \geq 0$ arbitraire. Soit

$$q = \begin{cases} E(\alpha) & \text{si } \alpha \text{ n'est pas entier} \\ \alpha - 1 & \text{si } \alpha \text{ est entier} \end{cases}$$

Tenant compte de (5), l'intégrale figurant dans (6) est majorée pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, par

$$(12) \qquad c(n,q)\int_{\mathbb{C}^n} \frac{d\sigma_m(a)}{\|a\|^{2n-1+q}}\,\|z\|^{q+1}$$

si α est entier, $q = \alpha - 1$, et la dernière expression est majorée d'après (2) par

$$c(n, \alpha - 1) M \| z \|^{\alpha} \qquad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Si α n'est pas entier, une intégration par parties montre que (12) est majorée par

$$c(n, q)(2n - 1 + q) \int_{\delta}^{\infty} \frac{dt}{t^{2+q-\alpha}} \| z \|^{q+1} = K(\alpha, n, \delta) \| z \|^{E(\alpha)+1} \qquad (z \in \mathbb{C}^n).$$

D'autre part la convergence uniforme de P_m dans $\Omega \cap B(0; \delta)$ vers F (nécessairement holomorphe) entraine la convergence uniforme d'une dérivée quelconque de P_m vers la dérivée correspondante de F. Or F ne peut s'annuler dans $\Omega \cap B(0; \delta)$ comme on a remarqué plus haut. Il en résulte que les coefficients du polynome de degré q

$$V_m(0) + 2 \Sigma z_i \frac{\partial V_m(0)}{\partial z_i} + \dots + \frac{2}{q!} \left(\Sigma z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)_0^q V_m$$

($V_m = \operatorname{Log} | P_m |$) sont uniformement bornés en module par une constante K_1 ne dépendant que de q· Ceci équivaut à une majoration en module de ce polynome en tout point $z \in \mathbb{C}^n$, par une expression de la forme $K_2(q) \| z \|^q$ ($K_2(q) = cte$). Ce qui entraîne la même majoration pour sa partie réelle.

Finalement on constate que les polynomes P_m sont majorés en module uniformement sur tout compact de $\mathbb{C}^n$ par des expressions de la forme

$$K_2 \| z \|^{\alpha - 1} + c(n, \alpha - 1)\, \omega_{2n-2}^{-1}(1)\, M \| z \|^{\alpha} \tag{13}$$

$$K_2 \| z \|^{E(\alpha)} + K(\alpha, n, \delta)\, \omega_{2n-2}^{-1}(1) \| z \|^{E(\alpha)+1} \tag{14}$$

suivant que α est entier ou non. Il en résulte d'après le théorème de Stieltjes la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}^n$ de la suite P_m, vers une fonction, entière dont le module est nécessairement majoré par (13) ou (14) suivant que α est entier ou non. D'où le théorème. Remarquions que les zéros de la fonction limite doivent aussi vérifier (2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. AVANISSIAN, *Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques.* Ann. E.N.S. 1961.

[2] P. LELONG, *Sur l'extension aux fonctions entières de n variables d'ordre fini d'un développement canonique de Weierstras.* C. R. 237, 1953.

[3] P. LELONG, *Proprietés métriques des varietés analytiques complexes définies par une équation.* Ann. E.N.S. 1950.

[4] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives.* Colloque du Sém. d'été de Varenna Italie, 1963.

[5] P. LELONG, *Fonctions entières et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans* $\mathbb{C}^n$. Journal d'Analyse Math., Jérusalem. t. 9. 1964.

[6] R. JENTZSCH, *Sur l'extension d'un thèorème de Laguerre.* C.R. 158, 1914.

[7] E. LINDWART und G. POLYA, *Uber einen. Zusammenhang zwischen der konvergenz von polynomfolgen...* Rend. cir. mat. di Palermo, 37, 1914.

Université de Strasburg
Département de Mathématique.
Palais de l'Université