ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

C. BAIOCCHI

Ulteriori osservazioni sull'integrale di Bochner

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 3 (1964), p. 283-301

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_3_283_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ULTERIORI OSSERVAZIONI SULL'INTEGRALE DI BOCHNER

di C. BAIOCCHI (Pavia) (*)

§ 1. Introduzione.

Questo lavoro fa seguito alla nota « Osservazioni sulla definizione dell'integrale di Bochner » pubblicata sugli annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, nel 1963, ed è sempre uno sviluppo del lavoro svolto a Pisa col prof. E. De Giorgi per la mia tesi di Laurea; alla predetta nota, che suppongo conosciuta dal lettore, rinvio per le notazioni, le definizioni ed i concetti qui richiamati.

Nel § 2 è data una caratterizzazione delle funzioni misurabili analoga a quella che sfrutta la nozione di misurabilità in forma debole.

Nel § 3 è dimostrata per l'integrale una « proprietà della media » che generalizza il teorema della media per funzioni reali di una variabile reale; ed è dimostrato che tale proprietà, insieme alla additività numerabile, è caratteristica dell'integrale, cioè può essere presa come definizione.

Nel § 4 è trattato il problema della derivazione: essa in generale ha senso solo in forma « globale » cioè alla Radon-Nikodym) mentre se lo spazio di definizione delle funzioni è euclideo ha senso anche in forma « puntuale ». Si è dimostrato che nel caso di spazi euclidei i due concetti di derivata coincidono e si sono trovate condizioni sullo spazio che assicurino la derivabilità di ogni funzione a variazione limitata.

Nel § 5 infine si è ritornati all'integrale di Bochner cioè alle funzioni definite in sottoinsiemi di spazi euclidei, precisamente alle funzioni definite su un segmento; e si è generalizzato un noto teorema relativo all'integrale

---

Pervenuto alla Redazione il 13 Febbraio 1964.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio nazionale delle ricerche.

di Lebesgue, cioè: una funzione è assolutamente continua se e solo se è un integrale; in tal caso è a variazione limitata e la sua variazione è l'integrale della norma della derivata.

§ 2. Funzioni misurabili.

Con le notazioni e le definizioni di [1] sia $(S, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio mensurale completo e σ finito, B uno spazio di Banach, $f: S \to B$ una funzione misurabile, cioè:

$$(1.2) \quad \begin{cases} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \text{ per } x \in S - N; \quad N \in \mathcal{F}; \quad \mu(N) = 0 \\ f_n(x) = \alpha_{i,n} \qquad \text{per } x \in F_{i,n};\ F_{in} \in \mathcal{F};\ i = 1, 2 \ldots k_n;\ \bigcup\limits_{i=1}^{kn} F_{i,n} = S;\ n = 1, 2 \ldots \end{cases}$$

LEMMA 1.2. *Con le notazioni* (1.2) *sia* $\mathcal{C}$ *chiuso in* B. *Posto* $\mathcal{C}_k = \left\{ p \in B;\ \textit{distanza } \overline{p\mathcal{C}} < \frac{1}{k} \right\}$ *si ha:*

$$(2.2) \qquad f^{-1}(\mathcal{C}) - N = \bigcap_{k=1}^{\infty} \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} f_n^{-1}(\mathcal{C}_k) - N.$$

DIM. Sia $x \in f^{-1}(\mathcal{C}) - N$. Poichè $x \notin N$ è $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Fissato k ad arbitrio, poichè $f(x) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{C}_k$ e $\mathcal{C}_k$ è aperto, da un certo n_k in poi $f_n(x) \in \mathcal{C}_k$ cioè $x \in f_n^{-1}(\mathcal{C}_k)$; allora $x \in \operatorname*{maxlim}\limits_{n\to\infty} f_n^{-1}(\mathcal{C}_k)$; tale relazione, valendo per ogni k, poichè $x \notin N$ dà nella (2.2) la relazione $\subseteq$.

Viceversa se x appartiene al secondo membro della (2.2) è ancora $x \notin N$ cioè $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$; inoltre per ogni k fissato esiste una successione $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$ di valori di n tali che $f_{n_i}(x) \in \mathcal{C}_k$; poichè esiste il $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ dovrà essere $f(x) \in \overline{\mathcal{C}}_k$ (chiusura in B di $\mathcal{C}_k$) cioè si avrà: distanza $\overline{f(x), \mathcal{C}} \leq \frac{1}{k}$. Ciò valendo per ogni k, poichè $\mathcal{C}$ è chiuso e $x \notin N$, dà $x \in f^{-1}(\mathcal{C}) - N$ c.v.d.

COROLLARIO. *Immagini inverse mediante funzioni misurabili di insiemi chiusi o aperti in* B *sono misurabili* (1).

---

(1) Userò indifferentemente le locuzioni: « insieme misurabile » ed « insieme di $\mathcal{F}$ ».

DIM. Dalla (2.2), essendo $\mathcal{F}$ chiusa rispetto a unioni, intersezioni e complementazioni, poichè $f_n^{-1}(\mathcal{C}_k)$ è ovviamente in $\mathcal{F}$ si ha $f^{-1}(\mathcal{C}) - N \in \mathcal{F}$; per la completezza di $\mathcal{F}$ rispetto a μ si ha poi $f^{-1}(\mathcal{C}) \in \mathcal{F}$ per ogni $\mathcal{C}$ chiuso in B. Se $\mathcal{A}$ è aperto è $f^{-1}(\mathcal{A}) = S - f^{-1}(B - \mathcal{A}) \in \mathcal{F}$ essendo $B - \mathcal{A}$ chiuso in B. c.v.d.

Fin qui è stata usata una definizione di misurabilità « forte » (cioè che fa uso della topologia indotta in B dalla norma); si può anche dare una definizione di misurabilità « debole », ponendo cioè:

DEF. 1.2. *Una funzione $f: S \to B$ si dice debolmente misurabile se per ogni $p' \in B'$ (duale di B)* è misurabile la funzione reale $x \to \langle f(x), p' \rangle$.

Si può dimostrare (cfr. ad es. [6]) che, perchè una funzione $f: S \to B$ sia misurabile occorre e basta che siano verificate le due condizioni:

a) Esiste un insieme $N \in \mathcal{F}$ con $\mu(N) = 0$ tale che $f(S - N) = \{p \in B;\ p = f(x)$ per qualche $x \in S - N\}$ è separabile

b) $f: S \to B$ è debolmente misurabile.

La condizione *b*), ricordando la definizione di misurabilità per funzioni reali, può anche esprimersi:

b') È misurabile l'immagine inversa dei semispazi [2] di B.

Voglio ora sostituire alla *b'*) una condizione analoga; cioè:

TEOR. 1.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f: S \to B$ sia misurabile è che siano verificate le due condizioni:*

a) *Esiste un insieme $N \in \mathcal{F}$ con $\mu(N) = 0$ tale che l'insieme $\{p \in B;\ p = f(x)$ per qualche $x \in S - N\}$ è separabile*

b) *Immagini inverse mediante f di sfere chiuse (aperte) in B sono misurabili.*

DIM. Sia $f: S \to B$ misurabile. Con le notazioni (1.2) $f(S - N)$ è contenuto nella chiusura dell'insieme numerabile $\{\{\alpha_{i,n}\}\ i = 1, 2 \dots k_n;\ n = 1, 2 \dots\}$. La *b*) è verificata per il corollario al lemma 1.2.

Viceversa sia $f: S \to B$ tale da verificare le *a*) e *b*). Pongo:

$f_n(x) = p_i$ dove i è il minimo intero tale che $\| f(x) - p_i \| \leq \frac{1}{n}$ (ovvero $\| f(x) - p_i \| < \frac{1}{n}$ se conosco la misurabilità delle immagini inverse delle sfere aperte);

$f_{n,k}(x) = f_n(x)$ se $f_n(x) = p_i$ con $i \leq k$; $f_{n,k}(x) = 0$ altrove.

---

(2) Per « semispazio » di B intendo un insieme del tipo:

$$\{p \in B;\ \langle p, p' \rangle > \alpha \quad (\text{ovvero } \geq \alpha;\ \leq \alpha;\ < \alpha);\ p' \in B',\ \alpha \text{ reale}\}$$

Ovviamente, per $x \notin N$, si ha $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$; $f_n(x) = \lim_{k \to \infty} f_{n,k}(x)$ e per il teor. 1.2 di [1] basterà dimostrare che $f_{n,k}(x)$ è costante a tratti fortemente misurabile. Pongo allora:

$$\mathcal{B}_{i,n} = \left\{ p \in B \,;\ \| p - p_i \| \leq \frac{1}{n} \left(\text{ovvero, se conosco la misurabilità delle immagini inverse delle sfere aperte di } B,\ \| p - p_i \| < \frac{1}{n} \right) \right\}$$

ed avrò che $f_{n,k}(x)$ assume un numero finito di valori e gli insiemi su cui si mantiene costante sono del tipo

$$f_{n,1}^{-1}(p_1) = f^{-1}(\mathcal{B}_{1,n}) \in \mathcal{F};$$

$$f_{n,k}^{-1}(p_i) = f^{-1}(\mathcal{B}_{1,n}) - \bigcup_{h=1}^{i-1} f^{-1}(\mathcal{B}_{h,n}) \in \mathcal{F} \quad \text{per } 1 < i \leq k$$

$$f_{n,k}^{-1}(0) = S - \bigcup_{i=1}^{k} f_{n,k}^{-1}(p_i) \in \mathcal{F}$$

cioè $f_{n,k} : S \longrightarrow B$ è costante a tratti misurabile, quindi $f_n : S \longrightarrow B$ è misurabile e $f : S \longrightarrow B$ è misurabile. c.v.d.

§ 3. Teorema della media. Nuova definizione assiomatica dell'integrale.

DEF. 1.3. *Data una funzione $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ dirò che φ gode della proprietà della media generalizzata rispetto alla funzione $f : S \longrightarrow B$ ed alla misura μ se, per ogni $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) < +\infty$ si ha:*

$$\varphi(A) \in \mu(A) \cdot [\overline{f(A)}] \tag{1.3}$$

dove $f(A) = \{ p \in B \,;\ p = f(x)$ per qualche $x \in A \}$; $[\mathcal{C}]$ indica l'inviluppo convesso (3) *di $\mathcal{C}$ in B e $\overline{\mathcal{D}}$ indica la chiusura di $\mathcal{D}$ in B.*

TEOR. 1.3. *Sia $f : S \longrightarrow B$ una funzione misurabile e sommabile; $\varphi(A) = \int_A f d\mu$ gode della proprietà della media generalizzata rispetto alla funzione f ed alla misura μ.*

---

(3) Cioè l'intersezione di tutti i convessi contenenti $\mathcal{C}$.

DIM. Il teorema è ovvio se $\mu(A) = 0$ per cui supporrò $0 < \mu(A) < \infty$. Sia dapprima f costante a tratti: $f(x) = \alpha_i$ per $x \in A_i$; $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$.

Posto $\lambda_i = \dfrac{\mu(A_i)}{\mu(A)}$ è $0 \leq \lambda_i \leq 1$; $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ e si ha:

$$\int_A f\,d\mu = \mu(A) \cdot \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \frac{\mu(A_i)}{\mu(A)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \qquad \text{per } x_i \in A_i$$

cioè il teorema è vero per le funzioni costanti a tratti.

Sia ora $f(x)$ limite uniforme di costanti a tratti $\{f_n(x)\}$ dove $f_n(x) = \alpha_{i,n}$ per $x \in A_{i,n}$; $A_{i,n} \in \mathcal{F}$; $\bigcup_{i=1}^{k_n} A_{i,n} = A$ $(n = 1, 2 \ldots)$.

Sia $\int_A f_n(x)\,d\mu = \xi_n \mu(A)$ dove $\xi_n = \sum_{i=1}^{k_n} \dfrac{\mu(A_{i,n})}{\mu(A)} \cdot \alpha_{i,n}$.

Scelto ad arbitrio $x_{i,n} \in A_{i,n}$ pongo $\xi'_n = \sum_{i=1}^{k_n} \dfrac{\mu(A_{i,n})}{\mu(A)} f(x_{i,n})$. Ovviamente $\xi'_n \in [f(A)]$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ per ogni i si abbia $\|f_n(x_{i,n}) - f(x_{i,n})\| = \|\alpha_{i,n} - f(x_{i,n})\| < \varepsilon$; allora è

$$\|\xi_n - \xi'_n\| \leq \max_{1 \leq i \leq k_n} \|f(x_{i,n}) - \alpha_{i,n}\| \cdot \sum_{i=1}^{k_n} \frac{\mu(A_{i,n})}{\mu(A)} < \varepsilon .$$

Poichè esiste il limite: $\xi = \lim_{n \to \infty} \xi_n = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\int_A f_n\,d\mu}{\mu(A)} = \dfrac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)}$ deve esistere e coincidere con ξ il limite di $\{\xi'_n\}$; e poichè $\xi'_n \in [f(A)]$ sarà $\int_A f\,d\mu = \mu(A) \cdot \lim_{n \to \infty} \xi_n = \mu(A) \cdot \lim_{n \to \infty} \xi'_n \in \overline{[f(A)]} \cdot \mu(A)$ cioè anche in questo caso vale la (1.3).

Sia ora $f(x)$ una generica funzione misurabile e $\{f_n(x)\}$ sia una successione di costanti a tratti convergente quasi ovunque verso $f(x)$. Essendo per ipotesi $\mu(A) < +\infty$ esiste una successione I_k di insiemi di $\mathcal{F}$ con $\mu(I_k) < \dfrac{1}{k}$ e tali che, in $A - I_k$, $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)$.

Essendo $\lim_{k \to \infty} \int_{I_k} f\,d\mu = 0$ si dovrà avere (avendo posto $\xi_k = \dfrac{\int_{A-I_k} f\,d\mu}{\mu(A - I_k)} \in$ $\in \overline{[f(A - I_k)]} \subseteq \overline{[f(A)]}$):

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_{A-I_k} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \xi_k\,\mu(A-I_k) = \xi\cdot\mu(A)$$

dove $\xi = \lim_{k\to\infty} \xi_k \in \overline{[f(A)]}$ (ed esiste in quanto esiste il limite del prodotto $\xi_k\cdot\mu(A-I_k)\longrightarrow\int_A f\,d\mu$ ed esiste il limite del fattore $\mu(A-I_k)\longrightarrow\mu(A)$). c.v.d.

TEOR. 2.3. *Sia $\varphi:\mathcal{F}\longrightarrow B$ numerabilmente additiva e tale che esiste $f: S\longrightarrow B$ sommabile, rispetto a cui φ verifica la proprietà della media generalizzata; si deve avere:*

$$\varphi(A) = \int_A f\,d\mu \qquad \textit{per ogni} \quad A\in\mathcal{F}. \tag{2.3}$$

DIM. A meno di cambiare f su un insieme di misura nulla (cosa che non ne altera l'integrale) posso supporre $f(S)$ separabile; sia $\{p_n\}_{n=1,2\ldots}$ un insieme denso in $f(S)$.

Sia $\mathcal{B}(p,r)$ la sfera di centro p e raggio r; pongo $S_{1,r}=f^{-1}(\mathcal{B}(p_1,r))\in\mathcal{F}$; $S_{n,r}=f^{-1}\left(\mathcal{B}(p_n,r)-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathcal{B}(p_i,r)\right)\in\mathcal{F}$ (tutto ciò è immediata conseguenza del teor. 1.2).

Si ha $\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{B}(p_i,r)\supseteq f(S)$ per ogni r quindi $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_{i,r}=S$ per ogni r; inoltre gli insiemi $\{S_{i,r}\}_{i=1,2\ldots}$ sono disgiunti.

Sia per ora $\mu(A)<+\infty$; per il teor. 1.3 e per l'ipotesi che φ gode della proprietà della media, per ogni i ed ogni r esisteranno due punti $\xi_{i,r}$ e $\xi'_{i,r}\in\mathcal{B}(p_i,r)$ tali che

$$\xi_{i,r}\cdot\mu(S_{i,r}\cap A)=\varphi(S_{i,r}\cap A); \qquad \xi'_{i,r}\cdot\mu(S_{i,r}\cap A)=\int_{A\cap S_{i,r}} f\,d\mu.$$

Si avrà:

$$\left\|\varphi(A)-\int_A f\,d\mu\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(A\cap S_{i,r})-\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A\cap S_{i,r}} f\,d\mu\right\|\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\varphi(A\cap S_{i,r})-\int_{A\cap S_{i,r}} f\,d\mu\right\| = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A\cap S_{i,r})\left\|\xi_{i,r}-\xi'_{i,r}\right\|\leq$$

$$\leq 2r\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A\cap S_{i,r}) = 2r\,\mu(A)$$

(essendo $\xi_{i,r}$ e $\xi'_{i,r}$ in una stessa sfera di raggio r). Per l'arbitrarietà di r segue che su ogni insieme di misura finita vale la (2.3).

Per la σ-finitezza di $(S, \mathcal{F}, \mu)$ e la numerabile additività dell'integrale e della φ segue il teorema in ogni caso. c.v.d.

TEOR. 3.3. *Data la funzione $f: S \longrightarrow B$ misurabile e sommabile esiste una ed una sola funzione di insieme numerabilmente additiva $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow B$ che verifica la proprietà della media generalizzata rispetto a $f: S \longrightarrow B$.*

DIM. Ovvia per i teor. 1.3 e 2.3 e per il teorema di esistenza e unicità dell'integrale di [1].

Tale teorema può quindi servire a dare una nuova definizione assiomatica dell'integrale.

COROLLARIO. *Sia $f: S \longrightarrow B$ misurabile e sommabile e sia $g \in B'$ (duale di B). Si ha, per ogni $F \in \mathcal{F}$:*

$$\left\langle \int_F f\, d\mu, g \right\rangle = \int_F \langle f, g \rangle\, d\mu. \tag{3.3}$$

DIM. Infatti la funzione $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^1$ definita da $\varphi(F) = \left\langle \int_F f\, d\mu, g \right\rangle$ è numerabilmente additiva e, per il teor. 1.3, verifica la proprietà della media generalizzata rispetto alla funzione (misurabile per il teor. 2.1) $\langle f, g \rangle$; per il teor. 3.3 si ha la validità della (3.3).

OSSERVAZIONE. Il precedente Corollario può essere dimostrato direttamente per le funzioni costanti a tratti e, con passaggio al limite, in generale per funzioni misurabili; e per mezzo di esso si potrebbero poi dimostrare i teor. 1.2, 2.3 e 3.3 conoscendo l'analogo del teor. 3.3 per l'integrale di Lebesgue.

§ 4. Derivabilità.

Quando $(S, \mathcal{F}, \mu)$ è un sottoinsieme di uno spazio euclideo con la struttura mensurale indotta dalla misura di Lebesgue si dà la seguente definizione di derivata:

DEF. 1.4. *$\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow B$ si dice derivabile nel punto $x \in S$ se esiste il limite $\lim\limits_{\mu(Q) \to 0} \dfrac{\varphi(Q)}{\mu Q}$ dove Q è un qualunque ipercubo (intervallo, quadrato, cubo ecc.)*

contenente x. La funzione $\varphi : \mathcal{F} \to B$ si dice puntualmente derivabile se è derivabile in quasi ogni punto $x \in S$; la funzione $f : S \to B$ definita da $f(x) = \lim_{\substack{\mu(Q) \to 0 \\ x \in Q}} \frac{\varphi(Q)}{\mu(Q)}$ si dice derivata puntuale di φ.

La definizione 1.4 non ha senso se lo spazio S non ha struttura di spazio euclideo; anche il tal caso si può dare una definizione di derivata, precisamente una derivata alla Radon-Nikodym. Ho bisogno a tale scopo di alcune definizioni: la definizione di funzione assolutamente continua (cfr. [1] def. 2.3 e Teor. 3.3) e la seguente:

DEF. 2.4. *Una funzione $\chi : \mathcal{F} \to B$ si dice singolare rispetto alla misura μ se esiste un insieme $N \in \mathcal{F}$ con $\mu(N) = 0$ tale che per ogni $F \in \mathcal{F}$ si abbia $\chi(F) = \chi(F \cap N)$.*

Con tali definizioni si può estendere un noto teorema di decomposizione di funzioni numerabilmente additive (teorema di Hahn-Lebesgue; cfr. ad es. [2] per una dimostrazione nel caso di funzioni a valori reali).

TEOR. 1.4. *Data una funzione $\varphi : \mathcal{F} \to B$ numerabilmente additiva ed a variazione totale limitata è possibile decomporre φ nella somma di due funzioni numerabilmente additive: $\varphi = \psi + \chi$ tali che ψ sia assolutamente continua e χ sia singolare, rispetto a μ; tale decomposizione è unica.*

DIM. Applicando il teorema di Hahn-Lebesgue alla funzione di insieme $V_\varphi : \mathcal{F} \to B$ si trova un insieme $N \in \mathcal{F}$ di misura nulla tale che $V_\varphi(F - N)$ è assolutamente continua e $V_\varphi(F \cap N)$ è singolare. Ovviamente $\psi(F) = \varphi(F - N)$ è assolutamente continua e $\chi(F) = \chi(F \cap N)$ è singolare. La decomposizione è unica perchè se $\varphi = \psi' + \chi'$ fosse una decomposizione analoga la funzione $\psi - \psi' = \chi' - \chi$ sarebbe contemporaneamente assolutamente continua e singolare, quindi identicamente nulla; cioè $\psi = \psi'$ e $\chi = \chi'$.

Ha senso allora porre la seguente definizione:

DEF. 3.4. *Una funzione $\varphi : \mathcal{F} \to B$ a variazione totale limitata si dice globalmente derivabile se esiste una funzione sommabile $f : S \to B$ tale che $\int f \, d\mu$ coincida con la parte assolutamente continua di φ.*

Se $(S, \mathcal{F}, \mu)$ ha struttura di spazio euclideo le due definizioni di derivata sono quasi coincidenti; più precisamente si ha il

TEOR. 2.4. *Sia S uno spazio euclideo* (4) *con la struttura mensurale indotta dalla misura di Lebesgue. Sia $\varphi : \mathcal{F} \to B$ a variazione totale limitata ed*

(4) Tutta la dimostrazione del teorema può ripetersi se S è un sottoinsieme di uno spazio euclideo dotato di punti interni e con frontiera di misura nulla.

assolutamente continua. Allora φ è globalmente derivabile se e solo se è puntualmente derivabile; in tal caso le due derivate coincidono.

DIM. Sia $\varphi(F) = \int_F f\,d\mu$. Se f è costante a tratti si ha ovviamente per quasi ogni $x \in S$ $f(x) = \lim_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}} \frac{\varphi(Q)}{\mu(Q)}$. Per una generica f misurabile sia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ quasi ovunque con $f_n(x)$ costanti a tratti. Si ha allora per quasi ogni x:

$$\lim''_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}} \left\| \frac{\varphi(Q)}{\mu(Q)} - f(x) \right\| \leq \lim''_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}} \left\| \frac{\int_Q f\,d\mu}{\mu(Q)} - \frac{\int_Q f_n\,d\mu}{\mu(Q)} \right\| +$$

$$+ \lim''_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}} \left\| \frac{\int_Q f_n\,d\mu}{Q} - f_n(x) \right\| + \|f_n(x) - f(x)\| \leq$$

$$\leq \lim''_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}} \frac{\int_Q \|f - f_n\|\,d\mu}{\mu(Q)} + \|f_n(x) - f(x)\| = 2\,\|f_n(x) - f(x)\|$$

essendo valido è il teorema nel caso di funzioni reali. Poichè il primo membro è infinitesimo con n ed il primo non dipende da n si ha, per quasi ogni $x \in S$, $\lim_{\mu(Q)\to 0} \frac{\varphi(Q)}{\mu(Q)} = f(x)$; cioè se φ è globalmente derivabile è puntualmente derivabile e le due derivate coincidono.

Viceversa sia $\varphi : \mathcal{F} \to B$ puntualmente derivabile. Siano $x_1, x_2 \dots x_k$ le coordinate euclidee in S.

Se $l \equiv (l_1, l_2 \dots l_k)$ è una k-pla di numeri interi pongo $Q_l^n = \{x \in S;\ 2^{-n} l_i < x_i < 2^{-n}(l_i + 1)\}$; $Q^n = S - \bigcup_{l\in L_n} Q_l^n$ dove $L_n = \{l;\ \max_{1\leq i\leq k} |l_i| \leq n\cdot 2^n\}$.

Considero ora le partizioni di S definite da: $P_1 = \{Q^1;\ Q_l^1\,(l \in L)\} \dots$ $\dots P_s = \{Q^s;\ Q_l^s\,(l \in L_s)\} \dots$ e costruisco la successione di costanti a tratti:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in Q^n \\ \dfrac{\varphi(Q_l^n)}{\mu(Q_l^n)} & \text{se } x \in Q_l^n \end{cases}$$

Per l'ipotesi che $f(x) = \lim_{\mu(Q)\to 0} \frac{\varphi(Q)}{\mu(Q)}$ esista per quasi ogni $x \in S$, per quasi ogni x è $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ cioè la derivata puntuale di una funzione,

se esiste, è misurabile. Sfruttando l'ipotesi che φ sia assolutamente continua e a variazione limitata si verifica facilmente che anche V_φ è assolutamente continua ed a variazione limitata; ma allora per il teorema di Radon-Nikodym V_φ è un integrale si ha ovviamente $\|f(x)\| \leq \left(\frac{dV_\varphi}{d\mu}\right)_x$ cioè $f: S \to B$ è misurabile e sommabile. Resta solo da dimostrare che è $\varphi(F) = \int_F f\,d\mu$ per ogni $F \in \mathcal{F}$; e poichè φ e $\int f\,d\mu$ sono a variazione limitata (quindi « continue »; cfr. teor. 2.3 e relativa nota (1) di [1]) ed assolutamente continue posso limitarmi a verificare $\varphi(F) = \int_F f\,d\mu$ per ogni $F \in P_n$, $F \neq Q^n$ $(n = 1, 2 \ldots)$. E infatti se $F \in P_n$, $F \neq Q^n$ sarà, per ogni $m > n$, $F = \bigcup_{l \in \mathcal{L}^m} Q_l^m$ dove $\mathcal{L}^m = \{l \in L_m;\ Q_l^m \subseteq F\}$. Allora si ha, se $x_l \in Q_l^m$, $\varphi(F) = \sum_{l \in \mathcal{L}^m} \varphi(Q_l^m) = \sum_{l \in \mathcal{L}^m} \frac{Q(Q_l^m)}{\mu(Q_l^m)} \mu(Q_l^m) = \sum_{l \in \mathcal{L}^m} f_m(x_l)\,\mu(Q_l^m) = \sum_{l \in \mathcal{L}^m} \int_{Q_l^m} f_m\,d\mu$. Tale relazione, valendo per ogni $m > n$ dà $\int_F f\,d\mu = \lim_{m \to \infty} \int_F f_m\,d\mu = \varphi(F)$ c.v.d.

Sono noti esempi di funzioni numerabilmente additive non derivabili. Ad es. (cfr. [3]) si consideri $S = \{x;\ 0 \leq x \leq 1\}$ con la struttura mensurale indotta dalla misura di Lebesgue; $B = L^1(0 \leq y \leq 1)$ (5); $\varphi(F) = \widehat{\chi_F}$ ($\chi_F(y) =$ = funzione caratteristica dell'insieme F; $\widehat{\chi_F}$ = classe cui appartiene $\chi_F(y)$; tale notazione sarà adoperata in generale per la classe individuata da un dato rappresentante).

Si ha ovviamente $\|\varphi(F)\| = V_\varphi(F) = \mu(F) \leq 1$ per $F \in \mathcal{F}$.

Fissato $\bar{x} \in (0, 1)$ sia $Q_n = \{x \in (0, 1);\ |\bar{x} - x| < 2/n\}$; si ha:

$$\left\| \frac{\varphi(Q_n)}{\mu(Q_n)} - \frac{\varphi(Q_{2n})}{\mu(Q_{2n})} \right\| = \frac{n}{4} \|\varphi(Q_n) - 2\varphi(Q_{2n})\| = \frac{n}{4} \int_0^1 |\chi_{Q_n}(y) - 2\chi_{Q_{2n}}(y)|\,dy =$$

$$= \frac{n}{4} \int_{x-\frac{2}{n}}^{x-\frac{1}{n}} dx + \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} dx + \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\frac{2}{n}} dx = \frac{n}{4} \cdot \frac{4}{n} = 1.$$

(5) Cioè lo spazio delle (classi di) funzioni reali misurabili e sommabili in $0 \leq y \leq 1$ con la norma $\|\hat{f}\| = \int_0^1 |f(y)|\,dy$ dove $f(y)$ è un qualunque elemento della classe $\hat{f}$.

Allora $\dfrac{\varphi(Q_n)}{\mu(Q_n)}$ non ha limite cioè $\dfrac{\varphi(Q)}{\mu(Q)}$ non ha limite per $\mu(Q) \to 0$ qualunque sia $x \in (0, 1)$; cioè $\varphi: \mathcal{F} \to L^1$ non è derivabile.

Se si cercano condizioni necessarie di derivabilità si vede subito che una di queste è che, detta ψ la parte assolutamente continua di φ, sia separabile lo spazio generato da $\{\psi(F);\ F \in \mathcal{F}\}$. Se infatti è $\psi(F) = \int_F f\, d\mu$ con f limite di costanti a tratti, $f(x) = \lim f_n(x)$, con le notazioni (1.2) l'insieme $\left\{\int_F f_n\, d\mu;\ F \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \ldots\right\}$ è denso in $\psi(\mathcal{F})$ e l'insieme (ovviamente numerabile) delle combinazioni lineari e coefficienti razionali degli elementi $\{\alpha_{i,n}\}_{i=1,2,\ldots,k_n}$ è denso in $\left\{\int_F f_n\, d\mu;\ F \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \ldots\right\}$ $n = 1, 2, \ldots$ quindi in $\psi(\mathcal{F})$.

Tale condizione non è però sufficiente ($L^1(0, 1)$ è separabile). Dunford-Morse [4] hanno dimostrato che sono derivabili funzioni a variazione limitata definite su un sottoinsieme di uno spazio euclideo con la struttura mensurale indotta dalla misura di Lebesgue ed a valori in uno spazio di Banach B separabile e che verifichi inoltre il seguente assioma:

A) Esiste in B almeno una base di Hamel (6) $\{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *tale che* $\sup_n \left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|\right\} < +\infty$ *implica:* $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\}_{n=1,2,\ldots}$ *è convergente.*

Tale risultato può estendersi alla derivabilità in forma debole per funzioni di insieme $\varphi: \mathcal{F} \to B$ con $\mathcal{F}$ generica; precisamente si ha il

TEOR. 3.4. *Sia B uno spazio di Banach separabile e verificante l'assioma A); sia $(S, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio mensurale σ-finito; ogni funzione $\varphi: \mathcal{F} \to B$ numerabilmente additiva ed a variazione limitata è derivabile.*

DIM. Per il teor. 1.4 posso limitarmi a supporre $\varphi: \mathcal{F} \to B$ assolutamente continua e cercare una funzione $f: S \to B$ sommabile tale che $\varphi(F) = \int_F f\, d\mu$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.

---

(6) e cioè una famiglia di vettori di norma 1, $\{l_n\}_{n=1,2,\ldots}$ tali che per ogni $x \in B$ si abbia $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n l_n$ dove gli x_n sono univocamente determinati da x; è una condizione più restrittiva della separabilità, cfr. anche nota (7).

Inoltre posso supporre verificato il seguente assioma:

A') *Qualunque sia la successione di numeri* $\{a_i\}_{i=1,2,\dots}$ *e per ogni* n

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|.$$

Infatti (cfr. [4]) lo spazio B è isomorfo allo spazio delle successioni $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ tali che $\left\{ \sum_{u=1}^{k} a_n e_n \right\}_{k=1,2,\dots}$ converge in B, con la norma $\| \{a_n\} \| = \sup_k \left\| \sum_{n=1}^{k} a_n e_n \right\|_B$; in questo spazio l'insieme $\{\eta^k\}_{k=1,2,\dots}$ dove $\eta^k \equiv \{\delta_{n,k}\}_{n=1,2,\dots}$ è una base ($\delta_{n,k}$ indice di Kroneker) e questa base verifica sia l'assioma A che l'assioma A'; B è isomorfo a questo spazio e se so derivare in questo so derivare anche in B.

Sia allora $\varphi(F) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \varphi_i(F)$; $\varphi_i \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^1$ è ovviamente numerabilmente additiva, a variazione limitata ed assolutamente continua rispetto a μ; per il teorema di Radon-Nikodym (cfr. p. es. [2]) si può scrivere $\varphi_i(F) = \int_F f_i \, d\mu$ e quindi

$$\varphi(F) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \varphi_i(F) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e_i \int_F f_i \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_F \sum_{i=1}^{n} e_i f_i \, d\mu, \tag{1.4}$$

(l'ultimo passaggio è una ovvia conseguenza della definizione di integrale). La successione $\left\{ \sum_{i=1}^{n} e_i f_i \right\}_{n=1,2,\dots}$ è, per l'assioma A'), non decrescente in norma; inoltre

$$\left\| \int_F \sum_{i=1}^{n} e_i f_i \, d\mu \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \varphi_i(F) \right\| \leq (\text{per } A')) \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} e_i \varphi_i(F) \right\| = \| \varphi(F) \| \leq V_\varphi(F) < V(S)$$

ne segue

$$\int_F \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i f_i \right\| d\mu = V_{\int_F \sum_{i=1}^{n} e_i f_i \, d\mu}(F) \leq V_\varphi(F) = \int_F \left(\frac{d V_\varphi}{d\mu} \right)_x d\mu$$

(il primo passaggio è giustificato dal teor. 2.4 di [1]); e, trattandosi di funzioni positive, $\left\| \sum_{i=1}^{n} e_i f_i(x) \right\| < \left(\frac{dV}{d\mu} \right)_x$.

Allora si può applicare il teor. 3.4 di [1] sul passaggio al limite sotto il segno di integrale ed ottenere dalla (1.4)

$$\int_F \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e_i f_i(x)\, d\mu = \int_F \sum_{i=1}^{\infty} e_i f_i(x) = \varphi(F)$$

cioè la funzione $\sum_{i=1}^{\infty} e_i f_i(x)$ che abbiamo visto essere sommabile (è misurabile perchè limite quasi ovunque di funzioni misurabili) è precisamente la derivata globale della φ. c. v. d.

Un'altra condizione sufficiente ad assicurare la derivabilità di funzioni a valori in uno spazio di Banach insieme alla condizione di separabilità è la riflessività; cioè:

TEOR. 4.4. *Sia B uno spazio di Banach riflessivo separabile. Ogni funzione $\varphi: \mathcal{F} \to B$ numerabilmente additiva ed a variazione totale limitata è derivabile.*

DIM. Anche qui, come nel teor. 2.4, posso, per il Teor. 1.4, limitarmi a supporre φ assolutamente continua e cercare $f: S \to B$ sommabile tale che $\varphi(F) = \int_F f\, d\mu$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.

Poichè B è riflessivo B' (duale forte di B) ha per duale B che è separabile quindi B' è separabile (cfr. ad es. [6] pag. 34). Valgono le relazioni:

$$V_{<\varphi, g>}(F) \leq V_\varphi(F) \cdot \| g \| \tag{2.4}$$

$$\| g \| \cdot \left(\frac{d}{d\mu} V_\varphi\right)_x \geq \left(\frac{d V_{<\varphi, g>}}{d\mu}\right)_x = \left| \left(\frac{d_{<\varphi, g>}}{d\mu}\right)_x \right|. \tag{3.4}$$

Infatti si ha, se $\{F_i\}$ è una partizione finita di F,

$$\Sigma_i \,|<\varphi(F_i), g>| \leq \Sigma_i \| \varphi(F_i) \| \cdot \| g \| = \| g \| \cdot \Sigma_i \| \varphi(F_i) \| \leq \| g \| \cdot V_\varphi(F)$$

e prendendo il superiore del primo membro si ha la (2.4); trattandosi di funzioni positive si passa immediatamente alla (3.4).

Sia allora $\{g_n\}_{n=1,2,\ldots}$ una base (7) in B' con $\| g_n \| = 1$. Sia $f_n(x)$ una funzione reale misurabile sommabile tale che $\int_F f_n(x) d\mu = <\varphi(F), g_n> (n = 1, 2, \ldots)$

(7) Qui si intende base nel senso usuale del termine, cioè una famiglia di vettori linearmente indipendenti tali che il sottospazio generato da essi sia tutto B.

(cosa possibile per il teorema di Radon-Nikodym per le funzioni reali; $<\varphi(F), g_n>$ è ovviamente assolutamente continua se tale è φ).

Sia $\{a_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ una qualunque n-upla di numeri

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{d_{<\varphi, g_k>}}{d\mu}\right)_x\right| = \left|\left(\frac{d \sum_{k=1}^{n} a_k <\varphi, g_k>}{d\mu}\right)_x\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{d\left\langle \varphi, \sum_{k=1}^{n} a_k g_k\right\rangle}{d\mu}\right)_x\right| = \left(\frac{d}{d\mu} V_{\left\langle \varphi, \sum_{k=1}^{n} a_k g_k\right\rangle}\right)_x \leq \left(\frac{dV_\varphi}{d\mu}\right)_x \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k g_k\right\|.$$

Per un noto teorena spazi di Banach (cfr. p. es. [6] pag. 31) si deduce l'esistenza di un elemento $f(x)$ del duale forte di B' e cioè $f(x) \in B$ tale che $<f(x), g_n> = f_n(x)$; $\|f(x)\| \leq \left(\frac{dV}{d\mu}\right)_x$.

La funzione $f: S \longrightarrow B$ così definita è misurabile; infatti essa è scalarmente misurabile ($f_n(x)$ è ovviamente misurabile) e lo spazio B è separabile (cfr. quanto detto al § 2); inoltre $f(x)$ è sommabile e quindi ha senso considerare la funzione di insieme $\int_F f\, d\mu$.

Per ogni g_n si ha (cfr. corollario al Teor. 3.3)

$$\left\langle \int_F f\, d\mu, g_n \right\rangle = \int_F <f, g_n> d\mu = \int_F f_n\, d\mu = <\varphi(F), f_n>$$

relazione che, valendo per ogni n, dà $\int_F f\, d\mu = \varphi(F)$ c. v. d.

OSSERVAZIONE. Tra gli spazi che verificano l'assioma A e che quindi rientrano nel teorema 2.4, sono ad esempio gli spazi l^p, L^p $(1 < p < +\infty)$ (cf. ad es. [4]) e gli spazi di Hilbert separabili; tra gli spazi riflessivi separabili sono ancora gli spazi 1^p; L^p $(1 < p < +\infty)$ e gli spazi del tipo di Sobolev derivati dagli spazi L^p (8bis); e gli spazi di Hilbert separabili. Si può tuttavia notare che per gli spazi di Hilbert la condizione di separabilità è superflua; vale infatti il

---

(8bis) come ad es. gli spazi $W^{k,p}(R^n)$ delle funzioni di potenza p-esima sommabile insieme alle loro derivate fino all'ordine k.

TEOR. 5.4. *Sia* $\varphi : \mathcal{F} \to H$ (*H spazio di Hilbert*) *numerabilmente additiva e a variazione limitata;* $\varphi(\mathcal{F}) = \{\varphi(F);\ F \in \mathcal{F}\}$ *genera un sottospazio* H_1 *di* H *separabile.*

DIM. Sia $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una base (cfr. nota (7)) ortonormale per H_1. Indicando con $(\,,\,)$ il prodotto scalare in H_1 pongo $\varphi_\lambda = (\varphi, e_\lambda)$; $V_\lambda = V_{\varphi_\lambda}$; $\Lambda^h = \left\{\lambda \in \Lambda;\ V_\lambda(S) > \frac{1}{h}\right\}$; per l'ipotesi che $\varphi(\mathcal{F})$ genera H_1 dovrà aversi $\Lambda = \bigcup_{h=1}^{\infty} \Lambda^h$. Si dovrà avere, per ogni decomposizione di S in insiemi disgiunti $\{F_i\}_{i=1,2\dots n}$ e per ogni k-upla $\lambda_j \in \Lambda^h$ $(j = 1, 2 \dots k)$:

$$+\infty > V_\varphi(S) \geq \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(F_i)\| \geq \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{k} e_{\lambda_j} \varphi_{\lambda_j}(F_i) \right\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (\varphi_{\lambda_j}(F_i))^2} \geq \text{(8)}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{k} |\varphi_{\lambda_j}(F_i)| = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_{\lambda_j}(F_i)|.$$

Sia $\{F_i\}_{i=1,2\dots n}$ tale che $\sum_{j=1}^{n} |\varphi_{\lambda_j}(F_i)| \geq V_{\lambda_j}(S) - 2^{-j}$ $(j = 1, 2 \dots k)$. Si dovrà avere, per la relazione precedente,

$$+\infty > V_\varphi(S) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_{\lambda_j}(F_i)| \geq \sum_{j=1}^{k} \frac{V_{\lambda_j}(S) - 2^{-j}}{\sqrt{k}} \geq \frac{k\,\frac{1}{h} - 1}{\sqrt{k}}$$

cioè Λ^h è finito per ogni h. Allora $\Lambda = \bigcup_{h=1}^{\infty} \Lambda^h$ è al più numerabile. C. V. D.

§ 5. Funzioni di una variabile reale.

In tutto questo paragrafo lo spazio S sarà il segmento $\overset{|-|}{a, b}$ cioè l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^1$ con $-\infty < a \leq x \leq b < +\infty$; la famiglia $\mathcal{F}$ sarà la famiglia dei sottoinsiemi di $\overset{|-|}{a\ b}$ misurabili secondo Lebesgue; μ sarà la restrizione ad $\mathcal{F}$ della misura di Lebesgue. Premetto alcune definizioni:

(8) Il passaggio è giustificato dalla relazione numerica:

$$K \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i| \right)^2$$

DEF. 1.5. *Si dicono funzioni associate due funzioni* Φ, φ, *tali che* $\Phi : \overset{|-|}{a\ b} \to B$ *è una funzione di punto e* $\varphi : \mathcal{F} \to B$ *è una funzione di insieme, e tali che per ogni* $x \in \overset{|-|}{a\ b}$ *sia* $\Phi(x) = \varphi(\overset{|-|}{a\ x})$.

DEF. 2 5. *Una funzione di punto* $\Phi : \overset{|-|}{a\ b} \to B$ *si dice assolutamente continua* (9), *se fissato* $\varepsilon > 0$ *ad arbitrio, è possibile determinare un* $\mu_\varepsilon > 0$ *tale che, se* $\overset{|\text{———}|}{x_i,\ x_i + h_i}$ $(i = 1, 2 \dots n)$ *sono intervalli aventi due a due al più un estremo in comune e di lunghezza totale* $\sum_{i=1}^{n} h_i < \mu_\varepsilon$ *si abbia*

$$\sum_{i=1}^{n} \| \Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i) \| < \varepsilon.$$

DEF. 3.5. *Una funzione di punto* $\Phi : S \to B$ *si dice a variazione totale limitata* (9) *sull'intervallo* $a'\ b'$ $(a \leq a' < b' \leq b)$ *se si ha*

$$V_\Phi^*(\overset{|-|}{a'\ b'}) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| \Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i) \| \right\} < +\infty$$

dove il superiore è calcolato al variare degli intervalli $\overset{|\text{———}|}{x_i,\ x_i + h_i}$ *nella classe degli intervalli contenuti in* $\overset{|-|}{a',\ b'}$ *ed aventi due al due al più un estremo comune. Il numero* $V_\Phi^*(\overset{|-|}{a',\ b'})$ *si dice variazione di* Φ *sull'intervallo* $\overset{|-|}{a',\ b'}$.

Si verifica facilmente (10) che, se φ e Φ sono associate è:

$$V_\Phi^*(\overset{|-|}{a',\ b'}) = V_\varphi(\overset{|-|}{a',\ b'}) \quad \text{per ogni} \quad \overset{|-|}{a',\ b'} \subseteq \overset{|-|}{a,\ b}. \tag{1.5}$$

Ovviamente, data una funzione numerabilmente additiva $\varphi : \mathcal{F} \to B$, si può sempre costruire la funzione di punto $\Phi : S \to B$ ad essa associata ponendo $\Phi(x) = \varphi(\overset{|-|}{a\ x})$.

---

(9) Si faccia attenzione a non confondere le definizioni 2.5 e 3.5 (che riguardono funzioni di punto) con le definizioni 1.3 e 2.3 di [1] (che riguardano funzioni di insieme)

(10) Più in generale, se $\varphi : \mathcal{F} \to B$ è numerabilmente additiva, si ha:

$$V_\varphi(\overset{|-|}{a',\ b'}) = \sup \sum_{i=1}^{n} \| \varphi(\overset{|\text{———}|}{x_i;\ x_i + h_i}) \|. \tag{1.5'}$$

Infatti nella (1.5') si ha ovviamente il $\geq$; se per assurdo valesse il $>$ si dovrebbe poter sostituire il I° membro con $\Sigma \| \varphi(F_k) \|$ con $F_k \in \mathcal{F}$ senza alterare la disuguaglianza; e agli F_k si potrebbe sostituire successivamente, sempre senza alterare la disuguaglianza, degli aperti, degli aperti disgiunti, dei segmenti disgiunti; e così si arriva all'assurdo.

Il viceversa non è sempre vero; tuttavia, se $B = \mathbb{R}^1$ si ha il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $\Phi : \overset{|-|}{a\ b} \to \mathbb{R}^1$ *sia assolutamente continua è che esista una funzione* $f : \overset{|-|}{a\ b} \to \mathbb{R}^1$ *sommabile su* $\overset{|-|}{a\ b}$ *tale che per ogni* x

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_{\overset{|-|}{a\ x}} f\,d\mu. \tag{2.5}$$

Inoltre in tal caso si ha:

$$V_\varphi^*(a', b') = \int_{a'}^{b'} |f(t)|\,dt = \sup \sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i)|\,. \tag{3.5}$$

In particolare se $\Phi : \overset{|-|}{a\ b} \to \mathbb{R}^1$ è assolutamente continua essa è anche a variazione limitata; ed è associata alla funzione $\varphi(F) = \int_F f\,d\mu$.

Questi risultati non sono in generale estendibili alle funzioni a valori in un generico spazio di Banach; ad es. la funzione associata alla funzione definita a pag. 10 è assolutamente continua ma, come si è visto, non è derivabile quindi (per il teor. 2.4) tale funzione non è un integrale.

Particolarizzando lo spazio B si può tuttavia ancora ottenere la validità della (3.5) (avendo naturalmente sostituito i valori assoluti con le norme): ad es. se B è uno spazio di Banach uniformemente convesso (cfr. [3] per la definizione e per la dimostrazione della proprietà enunciata) si ha che ogni funzione di punto a variazione limitata ed assolutamente continua è derivabile (11) e coincide con l'integrale della sua derivata; la (3.5) si può allora ottenere dalla (2,1.02) di pag. 339 di [5] se B è separabile (in tal caso l'integrale di Bochner usato da [3] e quello di Pettis usato da [5] coincidono; cfr. ad es. lo stesso [5]); e più in generale si può ottenere per B generico dal teor. 2.4 di [1]. In ipotesi leggermente diverse su B si può completamente generalizzare il risultato enunciato per le funzioni reali. Precisamente si ha:

---

(11) Infatti ad essa può associarsi una «funzione di figura elementare» a variazione limitata quindi derivabile, (cfr. [3]).

TEOR. 1.5. *Sia B riflessivo separabile. Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $\Phi : S \longrightarrow B$ sia assolutamente continua è che esista una funzione sommabile $f : S \longrightarrow B$ tale che per ogni $x \in S$ si abbia*

$$\Phi(x) = \int_{\vdash\!\dashv\, a\ b} f\, d\mu. \tag{4.5}$$

Inoltre sotto queste ipotesi si ha:

$$\sup \Sigma \, \| \Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i) \| = \int_a^b \| f(t) \| \, dt. \tag{5.5}$$

DIM. La (5.5) una volta dimostrata la condizione necessaria, segue subito dalla (1.5′) della nota ([10]) e dal teor. 2.4 di [1].

La condizione sufficiente è ovvia in quanto si verifica facilmente che la funzione di punto associata ad un integrale è assolutamente continua. Resta da dimostrare la derivabilità di una funzione di punto assolutamente continua. Per vedere ciò opero come nella dimostrazione del teorema 4,4: se $\{g_n\}$ è una base (cfr. nota ([7])) per B con $\| g_n \| = 1$ le funzioni di punto $\Phi_n : S \longrightarrow \mathbb{R}^1$ definite da $\Phi_n(x) = < \Phi(x), g_n >$ sono ovviamente assolutamente continue e cioè $\Phi_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt = \int_{\vdash\!\dashv\, a\ x} f_n \, d\mu.$

Per ogni scelta delle costanti $a_1, a_2 \dots a_k$ si ha inoltre:

$$\left| \sum_{n=1}^{k} a_n f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=1}^{k} a_n \left(\frac{d\Phi_n}{d\mu} \right)_x \right| = \left| \left(\frac{d}{d\mu} \sum_{n=1}^{k} a_n \Phi_n \right)_x \right| =$$

$$= \left(\frac{d}{d\mu} V_{\left\langle \varphi, \sum_{n=1}^{k} a_n g_n \right\rangle} \right)_x \leq \left(\frac{d V_\Phi^*}{d\mu} \right)_x \cdot \left\| \sum_{n=1}^{k} a_n g_n \right\| \text{ ([12])}.$$

Esattamente come nella dimostrazione del teor. 4.4 si conclude anche qui che esiste una funzione $f : S \longrightarrow B$ sommabile tale che $\Phi(x) = \int_{\vdash\!\dashv\, a\ x} f d\mu$. c.v.d.

([12]) $\left(\frac{d V_\Phi^*}{d\mu} \right)_x$ esiste perchè si verifica facilmente che se Φ è assolutamente continua ed a variazione limitata anche V_Φ^* è assolutamente continua; ed il passaggio segue dalla relazione analoga (2.4) e cioè $V_{<\Phi, g>} \leq V_\Phi^* \cdot \| g \|$.

COROLLARIO. *Sia B riflessivo separabile. Le funzioni di punto assolutamente continue sono tutte e sole le funzioni associate a funzioni di insieme assolutamente continue ed a variazione totale limitata.*

DIM. Ovvia per il teor. 4.4, il Teor. 1.5 e il fatto che la funzione di punto associata ad un integrale è necessariamente assolutamente continua.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAIOCCHI C., *Osservazioni sulla definizione di integrale di Bochner.* (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa) Serie III, Vol. XVII, pag. 239-253.

[2] CAFIERO F., *Misura e integrazione.* Monografie Matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

[3] CLARKSON J. A., *Uniformly convex spaces.* Trans. Am. Math. Soc. 1936 vol. 40 pag. 396-414.

[4] DUNFORD N.-MORSE A. P., *Remarks on the preceding paper of J. A. Clarkson.* Trans. Am. Math. Soc. 1936 vol. 40 pag. 415-420.

[5] DUNFORD N.-PETTIS B. J., *Linear operations on summable functions.* Trans. Am. Math. Soc. 1940 vol. 47 pag. 323-392.

[6] HILLE E.-PHILLIPS R. S., *Functional analysis and semi-groups.* American Mathematical Society Colloquium Publications.