ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANTONIO CHIFFI

Insiemi *K*-rettificabili e spazio tangente

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 16, nº 4 (1962), p. 335-349

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_4_335_0>

INSIEMI K-RETTIFICABILI E SPAZIO TANGENTE. (1)

di ANTONIO CHIFFI (Pisa).

Si considera (definizione 1.5) una famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$ di insiemi dello spazio R^n, la quale risulta formata da tutti e soli gli insiemi di R^n che sono misurabili rispetto alla misura k-dimensionale di Hausdorff $\mathcal{H}_k$ e sono $(\mathcal{H}_k, k)$-rettificabili (2). Viene data una definizione di spazio k-dimensionale tangente (definizione 3.1) per insiemi misurabili rispetto a $\mathcal{H}_k$ e si dimostra (teorema 5.1) che gli insiemi di R^n misurabili rispetto a $\mathcal{H}_k$ che possiedono uno spazio k-dimensionale tangente in $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i loro punti sono tutti e soli quelli di una sottofamiglia di $\mathcal{E}_{k,n}$, che viene detta famiglia degli insiemi k-orientabili (definizione 1.9) e che contiene anche insiemi di misura $\mathcal{H}_k$ infinita.

Se in un punto di un insieme E esiste lo spazio k-dimensionale tangente a E secondo la definizione 3.1, esiste anche lo spazio tangente a E secondo Hausdorff (3) (teorema 4.9), ma non viceversa; vale a dire che il primo impone una condizione di maggiore regolarità per l'insieme E nel punto x.

§ 1. Definizioni preliminari.

DEFINIZIONE 1.1. Indichiamo con R^n lo spazio numerico a n dimensioni e con $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ un suo generico punto. Poniamo $|x| = (\Sigma x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

---

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche. L'autore ringrazia il prof. Ennio De Giorgi per i preziosi suggerimenti.

(2) Cfr. [2] def. 2.34 a pag. 126. I numeri in parentesi [ ] si riferiscono all'elenco bibliografico posto in fondo al lavoro.

(3) Cfr. [3] a pag. 312.

DEFINIZIONE 1.2. Indicheremo con $I(x, \varrho)$ l'insieme:

$$I(x, \varrho) = \{z : z \in R^n, |z - x| < \varrho\}. \tag{1.1}$$

DEFINIZIONE 1.3. Indicheremo con k un intero che, salvo avviso in contrario, si supporrà soddisfacente alla limitazione $1 \leq k \leq n$.

DEFINIZIONE 1.4. Sia: $f: T \longrightarrow R^n$ una funzione reale vettoriale di componenti $f_1, \dots f_n$, continua, definita in un intervallo T di R^k di cui indicheremo con $y = (y_1, \dots y_k)$ il generico punto. Posto $V = f(T)$, se sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

a) le componenti $f_1, \dots f_n$ delle funzione f possiedono derivate parziali prime continue in T;

b) la corrispondenza $f: T \longrightarrow V$ è biunivoca;

c) la matrice jacobiana $\dfrac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (y_1, \dots, y_k)}$ ha caratteristica k;

allora la terna:

$$\mathcal{V} = [T, f, V] \tag{1.2}$$

sarà detta *varietà parametrica regolare k-dimensionale di R^n, di intervallo base T, di equazione:*

$$x = f(y), \qquad y \in T \tag{1.3}$$

e *supporto V.*

DEFINIZIONE 1.5. Diremo che un insieme $E \subset R^n$ appartiene alla famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$ se (4):

a) l'insieme E è misurabile rispetto alla misura k-dimensionale di Hausdorff $\mathcal{H}_k$:

b) esistono: una successione $\{\mathcal{V}_h\}_{h=1,2,\dots}$ di varietà regolari $\mathcal{V}_h = [T_h, f^{(h)}, V_h]$ ed un insieme N di misura $\mathcal{H}_k$ nulla tali che:

$$E \subset \left(\bigcup_{h=1}^{\infty} V_h\right) \cup N. \tag{1.4}$$

Diremo che l'insieme $E \subset R^n$ appartiene alla famiglia $\mathcal{E}_{0,n}$ se è finito o numerabile.

(4) Cfr. [1], § 1 e 2.

DEFINIZIONE 1.6. Sia A un insieme aperto di R^n; indicheremo con $\mathcal{K}(A)$ la famiglia degli insiemi $E \subset R^n$ tali che:

(*a*) l'insieme E sia misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$;

(*b*) valga l'uguaglianza:

$$\mathcal{H}_k(E - A) = 0; \tag{1.5}$$

(*c*) qualunque sia l'insieme compatto $C \subset A$ si abbia:

$$\mathcal{H}_k(E \cap C) < \infty. \tag{1.6}$$

DEFINIZIONE 1.7. Indicheremo con $\mathcal{K}$ la famiglia degli insiemi $E \subset R^n$ a ciascuno dei quali si possa associare un insieme aperto $A \subset R^n$ tale che per questo e per l'insieme E valgano le proprietà (*a*), (*b*), (*c*) della precedente definizione.

È immediato verificare il seguente:

TEOREMA 1.8. *Sia A un insieme aperto di R^n, sia E un insieme della famiglia $\mathcal{K}(A)$ e L un suo sottoinsieme misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$; allora anche L appartiene a $\mathcal{K}(A)$.*

DEFINIZIONE 1.9. Diremo che un insieme $E \subset R^n$ è *k-orientabile* $(0 \leq k \leq n)$ se appartiene ad entrambe le famiglie $\mathcal{E}_{k,n}$ e $\mathcal{K}$.

Si noti che la famiglia degli insiemi n orientabili coincide con la famiglia degli insiemi misurabili secondo $\mathcal{H}_n$, cioè secondo la misura di Lebesgue in R^n.

Sono di immediata verifica i due seguenti teoremi:

TEOREMA 1.10. *Sia $E \subset R^n$ un insieme k-orientabile ed L un suo sottoinsieme misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$; l'insieme L è pure k-orientabile.*

TEOREMA 1.11. *Sia $\{E_h\}_{h=1,2,..}$ una successione di insiemi k-orientabili di R^n tali che l'unione $E = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h$ appartenga alla famiglia $\mathcal{K}$. L'insieme E è k orientabile.*

§ 2. Densità.

È noto (5) il seguente:

---

(5) Cfr. [2], 3.2 a pag. 128.

TEOREMA 2.1. *Sia E un insieme di R^n misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$ con $\mathcal{H}_k(E) < \infty$. Per $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti $x \in R^n - E$ si ha:*

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap I(x, \varrho)] = 0 \tag{2.1}$$

TEOREMA 2.2. *Sia A un insieme aperto di R^n e sia $E \subset R^n$ un insieme della famiglia $\mathcal{K}(A)$. Per $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti $x \in A - E$ ha luogo la* (2.1).

DIMOSTRAZIONE. Esiste una famiglia numerabile $\{I_h\}_{h=1,2,\dots}$ di sfere aperte I_h di R^n, tali che:

$$A = \bigcup_{h=1}^{\infty} I_h \tag{2.2}$$

$$(\textit{chiusura di } I_h) \subset A \tag{2.3}$$

Per la (2.3) e per la (1.6) si ha, per ogni h:

$$\mathcal{H}_k [E \cap I_h] < \infty \tag{2.4}$$

e per il teorema 2.1 si ha pure, per $\mathcal{H}_k$ -quasi tutti i punti $x \in R^n - (E \cap I_h)$:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap I_h \cap I(x, \varrho)] = 0. \tag{2.5}$$

In particolare la (2.5) ha luogo in $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in I_h - E$, dove equivale alla (2.1) e quindi per la (2.2) il teorema è dimostrato.

§ 3. Spazio tangente.

DEFINIZIONE 3.1. Sia $E \subset R^n$ un insieme misurabile rispetto alla misura $\mathcal{H}_k$ e sia $1 \leq k < n$.

Sia $C_0^{(0)}(R^n)$ la famiglia delle funzioni reali φ, definite e còntinue in R^n, ivi a supporto compatto (nulle, cioè, al di fuori di un insieme limitato). Un sottospazio k-dimensionale $S_k(x)$ di R^n passante per un punto $x \in R^n$ si dirà *spazio k-dimensionale tangente a E nel punto x* se, per ogni $\varphi \in C_0^{(0)}(R^n)$ ha luogo l'uguaglianza (6):

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \varphi \left(x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\, \mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi(\xi)\, d\, \mathcal{H}_k(\xi) \tag{3.1}$$

---

(6) È evidente che scrivendo la (3.1) intendiamo che si abbia, per ϱ sufficientemente piccolo:

$$\mathcal{H}_k [E \cap I(x, \varrho)] < \infty$$

Per $k = n$ si può dare la stessa definizione, sostituendo a $S_k(x)$ lo spazio R^n.

È immediato verificare il seguente:

TEOREMA 3.2. *Se esiste lo spazio k-dimensionale $S_k(x)$ tangente nel punto x all'insieme $\mathcal{H}_k$-misurabile $E \subset R^n$, esso è necessariamente unico.*

TEOREMA 3.3. *Sia $E \subset R^n$ un insieme misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$ e nel punto $x \in R^n$ esista lo spazio k dimensionale $S_k(x)$ tangente a E. Sia ψ una funzione reale definita in R^n, ivi misurabile, limitata e a supporto compatto ed esista un insieme chiuso N tale che ψ sia continua in $R^n - N$, e si abbia:*

$$\mathcal{H}_k [N \cap S_k(x)] = 0 \tag{3.2}$$

In tali ipotesi vale l'uguaglianza:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \psi\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\,\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \psi(\xi)\, d\,\mathcal{H}_k(\xi) \tag{3.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero positivo h consideriamo la funzione continua φ_h, così definita per $x \in R^n$:

$$\varphi_h(x) = \max\{0, 1 - h \operatorname{dist}(x, N)\} \tag{3.4}$$

dove con $\operatorname{dist}(x, N)$ si è indicata la distanza del punto x dall'insieme N.

Dalla (3.4) segue che le funzioni φ_h $(h = 1, 2, \ldots)$ sono continue e verificano le disuguaglianze:

$$0 \leq \varphi_h(x) \leq 1 \qquad \text{per } x \in R^n \tag{3.5}$$

Poniamo:

$$\begin{cases} \varphi_h^{*}(x) = [1 - \varphi_h(x)]\, \psi(x) + \varphi_h(x) \inf\{\psi(x) : x \in R^n\} \\ \varphi_h^{**}(x) = [1 - \varphi_h(x)]\, \psi(x) + \varphi_h(x) \sup\{\psi(x) : x \in R^n\} \end{cases} \tag{3.6}$$

Dalla definizione 3.1 e dalla evidente continuità delle funzioni φ_h^{*} e φ_h^{**} seguono le uguaglianze:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \displaystyle\int_E \varphi_h^{*}\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi_h^{*}(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) \\ \lim\limits_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \displaystyle\int_E \varphi_h^{**}\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi_h^{**}(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) \end{cases} \tag{3.7}$$

Si verificano pure le disuguaglianze, valevoli per $x \in R^n$:

$$\varphi_h^*(x) \leq \psi(x) \leq \varphi_h^{**}(x) \tag{3.8}$$

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \varphi_h^* \left(x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \tag{3.9}$$

$$\leq \min \lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \psi \left(x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \max \lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \psi \left(x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq$$

$$\leq \lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \varphi_h^{**} \left(x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi)$$

$$\int_{S_k(x)} \varphi_h^*(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \int_{S_k(x)} \psi(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \int_{S_k(x)} \varphi_h^{**}(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) \tag{3.10}$$

Per le (3.7) la (3.9) diventa:

$$\int_{S_k(x)} \varphi_h^*(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \min \lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \psi \left(x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \tag{3.11}$$

$$\leq \max \lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \psi \left(x + \frac{\xi - x}{\varrho} \right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \int_{S_k(x)} \varphi_h^{**}(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi)$$

Dalle (3.6) segue:

$$\int_{S_k(x)} \varphi_h^{**}(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) - \int_{S_k(x)} \varphi_h^*(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) = \tag{3.12}$$

$$= [\sup \{ \psi(x) : x \in R^n \} - \inf \{ \psi(x) : x \in R^n \}] \int_{S_k(x)} \varphi_h(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi)$$

Tenendo presente che è

$$\lim_{h \to \infty} \varphi_h(\xi) = 0 \qquad \text{per } \xi \in S_k(x) - N \tag{3.13}$$

$$0 \leq \varphi_h(\xi) \leq \varphi_1(\xi) \tag{3.14}$$

$$\int_{S_k(x)} \varphi_1(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) < \infty \tag{3.15}$$

dalle (3.12) si deduce:

$$\lim_{h\to\infty}\int_{S_k(x)}\varphi_h^{**}(\xi)\,d\mathcal{H}_k(\xi)-\lim_{h\to\infty}\int_{S_k(x)}\varphi_h^{*}(\xi)\,d\mathcal{H}_k(\xi)=0 \tag{3.16}$$

e per la (3.10) si ha:

$$\lim_{h\to\infty}\int_{S_k(x)}\varphi_h^{*}(\xi)\,d\mathcal{H}_k(\xi)=\lim_{h\to\infty}\int_{S_k(x)}\varphi_h^{**}(\xi)\,d\mathcal{H}_k(\xi)= \tag{3.17}$$

$$=\int_{S_k(x)}\psi(\xi)\,d\mathcal{H}_k(\xi)$$

Per la (3.16) e la (3.11) esiste il limite:

$$\lim_{\varrho\to 0}\varrho^{-k}\int_E\psi\left(x+\frac{\xi-x}{\varrho}\right)d\mathcal{H}_k(\xi) \tag{3.18}$$

e questo, per la (3.11) e (3.17) risulta uguale all'integrale:

$$\int_{S_k(x)}\psi(\xi)\,d\mathcal{H}_k(\xi). \tag{3.19}$$

Il teorema risulta così dimostrato.

TEOREMA 3.4. *Sia $E\subset R^n$ un insieme misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$ e sia $C_0^{(\infty)}(R^n)$ la famiglia delle funzioni reali ψ definite e continue con tutte le loro derivate in R^n, ivi a supporto compatto. Se esiste un sottospazio k-dimensionale $S_k(x)$ di R^n, passante per un punto $x\in R^n$, tale che, per ogni $\psi\in C_0^{(\infty)}(R^n)$ valga l'uguaglianza:*

$$\lim_{\varrho\to 0}\varrho^{-k}\int_E\psi\left(x+\frac{\xi-x}{\varrho}\right)d\mathcal{H}_k(\xi)=\int_{S_k(x)}\psi(\xi)\,d\mathcal{H}_k(\xi) \tag{3.20}$$

allora $S_k(x)$ è lo spazio k-dimensionale tangente a x in E.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varphi\in C_0^{(0)}(R^n)$ e sia $I(x,r)$ un intorno di x di raggio r, contenente nel suo interno il supporto di φ. Siano $\{\psi_h^*\}_h$ e $\{\psi_h^{**}\}_h$ due successioni di funzioni della famiglia $C_0^{(\infty)}(R^n)$, convergenti uniformemente a φ in $I(x,r)$, formate da funzioni nulle fuori di $I(x,r)$ e tali che per $x \in R^n$ si abbia (7):

$$\psi_1^*(x) \leq \ldots \leq \psi_h^*(x) \leq \ldots \tag{3.21}$$

$$\psi_1^{**}(x) \geq \ldots \geq \psi_h^{**}(x) \geq \ldots \tag{3.22}$$

Per ipotesi si ha:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \psi_h^*\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \psi_h^*(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) \tag{3.23}$$

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \psi_h^{**}\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \psi_h^{**}(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) \tag{3.24}$$

mentre, per la convergenza uniforme delle successioni $\{\psi_h^*\}_h$ e $\{\psi_h^{**}\}_h$, si ha:

$$\lim_{h \to \infty} \int_{S_k(x)} \psi_h^*(\xi)\, d\mathcal{H}_h(\xi) = \lim_{h \to \infty} \int_{S_k(x)} \psi_h^{**}(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) \tag{3.25}$$

Si ha pure:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \psi_h^*\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \tag{3.26}$$

$$\leq \min \lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \varphi\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq \max \lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \varphi\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) \leq$$

$$\leq \lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \psi_h^{**}\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi).$$

---

(7) Cfr. [4], Cap. I a pag. 22. Costruita una successione di funzioni della famiglia $C_0^{(\infty)}(R^n)$: $\{\psi_h\}_h$, convergente uniformemente a φ e formata da funzioni nulle al di fuori di un intorno circolare interno a $I(x,r)$, si possono facilmente dedurre due successioni $\{\psi_h^*\}_h$ e $\{\psi_h^{**}\}_h$ convergenti uniformemente a φ e formate da funzioni di $C_0^{(\infty)}(R^n)$, nulle al di fuori di $I(x,r)$ e verificanti le (3.21) e (3.22).

Per le (3.26), (3.23), (3.24) e (3.25) esiste il limite:

$$\lim_{\varrho\to 0} \varrho^{-k} \int_E \varphi\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) \tag{3.27}$$

e questo, per le (3.26) e (3.25), risulta uguale a

$$\int_{S_k(x)} \varphi(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi)$$

e il teorema risulta dimostrato.

§ 4. Caratterizzazione degli insiemi k-orientabili.

TEOREMA 4.1. *Sia $E \subset R^n$ un insieme misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$ e sia x un punto di R^n tale che in esso esista lo spazio k-dimensionale $S_k(x)$ tangente a E. Si ha l'uguaglianza:*

$$\lim_{\varrho\to 0} \varrho^{-k}\, \mathcal{H}_k[E \cap I(x, \varrho)] = \omega_k \tag{4.1}$$

dove con ω_k si è indicata la misura della sfera di R^k di raggio 1.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in R^n$ un punto nel quale esiste lo spazio k-dimensionale $S_k(x)$ tangente a E e consideriamo la funzione ψ così definita per $z \in R^n$:

$$\psi(z) = 1 \qquad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z - x| \leq 1$$

$$\psi(z) = 0 \qquad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z - x| > 1.$$

La funzione ψ verifica le ipotesi del teorema 3.3 e pertanto verifica pure la formula (3.3) che diventa:

$$\lim_{\varrho\to 0} \varrho^{-k}\, \mathcal{H}_k[E \cap I(x, \varrho)] = \mathcal{H}_k[S_k(x) \cap I(x, 1)]. \tag{4.2}$$

Il secondo membro della (4.2) è uguale a ω_k e la (4.1) risulta dimostrata.

DEFINIZIONE 4.2. Indichiamo con $\mathcal{T}_{k,n}$ $(1 \leq k \leq n)$ la famiglia degli insiemi $E \subset R^n$ misurabili rispetto a $\mathcal{H}_k$ e tali che per $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in E$ esista uno spazio k-dimensionale $S_k(x)$ tangente a E nel punto x.

TEOREMA 4.3. *Ogni insieme della famiglia $\mathcal{T}_{k,n}$ appartiene alla famiglia $\mathcal{K}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni punto $x \in E$ per il quale valga la (4.1) costruiamo un intorno sferico aperto $I(x, \varrho(x))$ tale che si abbia:

$$\mathcal{H}_k[E \cap I(x, \varrho(x))] < \omega_k + 1 \tag{4.3}$$

Posto:

$$A = \bigcup_x I(x, \varrho(x)) \tag{4.4}$$

l'insieme A è aperto e si ha:

$$\mathcal{H}_k[E - A] = 0. \tag{4.5}$$

Inoltre ogni insieme compatto $C \subset A$ è contenuto in una famiglia finita di insiemi della famiglia $\{I(x, \varrho(x))\}_x$ e pertanto si ha:

$$\mathcal{H}_k(E \cap C) < \infty. \tag{4.6}$$

Le (4.5) e (4.6) mostrano che sono verificate le (*b*) e (*c*) della definizione 1.6 e pertanto, per la definizione 1.7, si conclude che E appartiene a $\mathcal{K}$.

TEOREMA 4.4. *Sia E un insieme della famiglia $\mathcal{T}_{k,n}$. Ogni sottoinsieme L di E, che sia misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$, appartiene a $\mathcal{T}_{k,n}$. Inoltre, per $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in L$, lo spazio tangente a L in x e lo spazio tangente a E in x coincidono.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 4.3 esiste un insieme aperto $A \subset R^n$ tale che $E \in \mathcal{K}(A)$. Per i teoremi 1.8 e 2.2 per $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in [A - (E - L)]$ e, di conseguenza, per $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in L$, si ha:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k[(E - L) \cap I(x, \varrho)] = 0. \tag{4.7}$$

Detta φ una funzione di $C_0^{(0)}(R^n)$ si ha, per ϱ sufficientemente piccolo:

$$\varrho^{-k} \int_E \varphi\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \tag{4.8}$$

$$= \varrho^{-k} \int_L \varphi\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) + \varrho^{-k} \int_{E-L} \varphi\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi).$$

Sia r il raggio di un cerchio di centro x e contenente nel suo interno il supporto di φ; sia M il massimo di φ; si ha, sempre per ϱ sufficientemente piccolo:

$$(4.9)\qquad \left|\varrho^{-k}\int_{E-L}\varphi\left(x+\frac{\xi-x}{\varrho}\right)d\mathcal{H}_k(\xi)\right| = \left|\varrho^{-k}\int_{(E-L)\cap I(x,\varrho r)}\varphi\left(x+\frac{\xi-x}{\varrho}\right)d\mathcal{H}_k(\xi)\right| \leq$$

$$\leq Mr^k(r\varrho)^{-k}\mathcal{H}_k[(E-L)\cap I(x,\varrho r)].$$

Dalla (4.7) e dalla (4.9) segue che per $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x\in L$ il secondo addendo del secondo membro della (4.8) tende a zero per $\varrho\to 0$ e, tenuto conto della (3.1), si ottiene l'uguaglianza:

$$(4.10)\qquad \lim_{\varrho\to 0}\varrho^{-k}\int_{L}\varphi\left(x+\frac{\xi-x}{\varrho}\right)d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)}\varphi(\xi)\,d\mathcal{H}_k(\xi),$$

che dimostra il teorema.

TEOREMA 4.5. *Sia* $\{E_h\}_{h=1,2,\ldots}$ *una successione di insiemi della famiglia* $\mathcal{T}_{k,n}$, *tali che l'unione* $E=\bigcup_{h=1}^{\infty}E_h$ *appartenga alla famiglia* $\mathcal{K}$; *allora l'insieme* E *appartiene a* $\mathcal{T}_{k,n}$. *Inoltre, per ogni* h, *in* $\mathcal{H}_k$-*quasi tutti i punti* $x\in E_h$ *lo spazio tangente a* E_h *e lo spazio tangente a* E *coincidono.*

DIMOSTRAZIONE. Esiste un insieme aperto $A\subset R^n$ tale che $E\in\mathcal{K}(A)$. Fissiamo un valore dell'indice h. Dai teoremi 1.8 e 2.2 segue che per $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x\in A-(E-E_h)$ e, di conseguenza per $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x\in E_h$, si ha:

$$(4.11)\qquad \lim_{\varrho\to 0}\varrho^{-k}\mathcal{H}_k[(E-E_h)\cap I(x,\varrho)] = 0.$$

Sia x un punto di E_h nel quale abbia luogo la (4.11) e nel quale esista lo spazio k-dimensionale $S_k(x)$ tangente a E_h.

Sia φ una funzione di $C_0^{(0)}(R^n)$; dalla uguaglianza, valevole per ϱ sufficientemente piccolo:

$$(4.11)\qquad \varrho^{-k}\int_{E}\varphi\left(x+\frac{\xi-x}{\varrho}\right)d\mathcal{H}_k(\xi) =$$

$$\varrho^{-k}\int_{E_h}\varphi\left(x+\frac{\xi-x}{\varrho}\right)d\mathcal{H}_k(\xi) + \varrho^{-k}\int_{E-E_h}\varphi\left(x+\frac{\xi-x}{\varrho}\right)d\mathcal{H}_k(\xi)$$

si deduce, con ragionamento analogo a quello del teorema precedente:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \int_E \varphi\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_{S_k(x)} \varphi\left(x + \frac{\xi - x}{\varrho}\right) d\mathcal{H}_k(\xi). \tag{4.12}$$

Ne segue che, $\mathcal{H}_k$-quasi ovunque in E_h, esiste lo spazio k-dimensionale tangente a E ed essendo: $E = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h$, il teorema risulta dimostrato.

TEOREMA 4.6. *Il supporto V di una varietà regolare k-dimensionale $\mathcal{V} = [T, f, V]$ appartiene a $\mathcal{C}_{k,n}$. Nei punti x di V associati per la f a punti interni a T, lo spazio k-dimensionale $S_k(x)$ tangente a $\mathcal{V}$ nel senso usuale coincide con lo spazio tangente nel senso della definizione* 3.1.

DIMOSTRAZIONE. Posto:

$$g_{hl}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_h} \frac{\partial f_i}{\partial y_l} \qquad (h, l = 1, \dots k) \tag{4.13}$$

$$G(y) = \{\det \| g_{hl}(y) \|\}^{1/2}, \tag{4.14}$$

dalla uguaglianza, valevole ([8]) per ogni insieme misurabile $L \subset T$

$$\mathcal{H}_k[f(L)] = \int_L G(y)\, dy \tag{4.15}$$

segue, per ogni $\psi \in C_0^{(\infty)}(R^n)$:

$$\int_V \psi(\xi)\, d\mathcal{H}_k(\xi) = \int_T \psi[f(y)]\, G(y)\, dy, \tag{4.16}$$

donde, con calcoli di carattere elementare, si ha la (3.1) per ogni $x \in f(T - \mathcal{F}T)$, essendo $S_k(x)$ lo spazio k-dimensionale tangente a $\mathcal{V}$ nel senso usuale.

TEOREMA 4.7. *Ogni insieme k-orientabile $E \subset R^n$ appartiene alla famiglia $\mathcal{C}_{k,n}$.*

La dimostrazione segue dai teoremi 4.6, 4.4 e 4.5.

DEFINIZIONE 4.8. Sia $1 \leq k < n$ e sia $S_k(x)$ un sottospazio k-dimensionale di R^n passante per il punto x. Detta ξ' la proiezione ortogonale di un

---

([8]) Cfr. [2] teor. 5.10 a pag. 144.

punto $\xi \in R^n$ su $S_k(x)$, poniamo, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$M^{n-k}(x, S_k(x), \varepsilon) = \{\xi : |x - \xi| > (1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} |x - \xi'|\}. \tag{4.17}$$

Diremo che lo spazio k-dimensionale $S_k(x)$ è uno *spazio k-dimensionale tangente a E nel punto x secondo Hausdorff* (9) se sono verificate le condizioni seguenti:

$$\max \lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap I(x, \varrho)] > 0 \tag{4.18}$$

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap M^{n-k}(x, S_k(x), \varepsilon) \cap I(x, \varrho)] = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0. \tag{4.19}$$

TEOREMA 4.9. *Sia $E \subset R^n$ un insieme misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$ e sia x un punto di R^n in cui esiste lo spazio k-dimensionale $S_k(x)$ tangente a E secondo la definizione 3.1. Esiste allora in x lo spazio k-dimensionale tangente E secondo Hausdorff ed esso coincide con $S_k(x)$* (10).

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo la funzione ψ_ε così definita per $\xi \in R^n$:

$$\psi_\varepsilon(\xi) = 1 \text{ per } \xi \in I(x, 1) \cap M^{n-k}(x, S_k(x), \varepsilon)$$

$$\psi_\varepsilon(\xi) = 0 \text{ per } \xi \in [R^n - I(x, 1) \cap M^{n-k}(x, S_k(x), \varepsilon)].$$

La funzione ψ_ε verifica le ipotesi del teorema 3.3 e pertanto verifica pure la formula (3.3), dalla quale si ottiene, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap M^{n-k}(x, S_k(x), \varepsilon) \cap I(x, \varrho)] = 0 \tag{4.20}$$

e questa dimostra la (4.19). La (4.18) segue dal teorema 4.1.

TEOREMA 4.10. *Ogni insieme E della famiglia $\mathcal{T}_{k,n}$ è k-orientabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $1 \leq k < n$. Per il teorema 4.3 e la definizione 1.6 esiste una successione di insiemi compatti $\{C_h\}_h$ di R^n tali che sia:

$$\mathcal{H}_k \left[E - \bigcup_{h=1}^{\infty} C_h \right] = 0 \tag{4.21}$$

$$\mathcal{H}_k [E \cap C_h] < \infty \qquad (h = 1, 2, \ldots) \tag{4.22}$$

---

(9) Cfr. [3] a pag. 311.

(10) Non vale l'inverso del teorema 4.8; infatti l'insieme dei punti della curva di R^2 di equazione: $x_1^2 = x_2^3$ possiede nel punto (0,0) la retta tangente secondo Hausdorff, ma non secondo la definizione 3.1.

Fissato h, l'insieme $E \cap C_h$ appartiene alla famiglia $\mathcal{T}_{k,n}$ (teorema 4.4) e, per il teorema 4.9, esiste in $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i suoi punti lo spazio k-dimensionale tangente a $E \cap C_h$ secondo Hausdorff. Per tale motivo, per la (4.22) e per risultati già noti [11], segue che l'insieme $E \cap C_h$ è $(\mathcal{H}_k, k)$ rettificabile. Dalla (4.21) si deduce che anche l'insieme E è $(\mathcal{H}_k, k)$ rettificabile. L'insieme E appartiene allora [12] alla famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$ e, poichè per il teorema 4.3 appartiene alla famiglia $\mathcal{K}$, esso risulta k-orientabile. Per $k = n$ il teorema discende dal fatto che ogni insieme della famiglia $\mathcal{T}_{n,n}$ è misurabile (secondo Lebesgue) in R^n.

§ 5. Riassunto dei principali risultati.

I teoremi 4.7 e 4.10 si possono riassumere nel seguente:

TEOREMA 5.1. *Condizione necessaria e sufficiente perché un insieme $E \subset R^n$ misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$ sia k-orientabile è che in $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i suoi punti esista uno spazio k-dimeusionale tangente a E nel senso della def.* 3.1.

Dai teoremi 5.1 e 4.1 si deduce il seguente:

TEOREMA 5.2. *Sia E un insieme k-orientabile. In $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in E$ si ha:*

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap I(x, \varrho)] = \omega_k \tag{5.1}$$

Dalla definizione 1.9 e dal teorema 2.2 si deduce il seguente:

TEOREMA 5.3. *Sia E un insieme k-orientabile. Esiste un insieme aperto $A \subset R^n$ tale che si abbia:*

$$\mathcal{H}_k (E - A) = 0 \tag{5.2}$$

e, per $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in A - E$ si abbia:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-k} \mathcal{H}_k [E \cap I(x, \varrho)] = 0. \tag{5.3}$$

---

(11) Cfr. [2], teor. 9.1 a pag. 178, [3] a pag. 312.

(12) Cfr. [1] teor. 2.12 a pag. 180 e 2.13 a pag. 181.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. CHIFFI: *Sezioni di insiemi k-rettificabili.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XVI (1962), pp. 173-193.

[2] H. FEDERER: *The (Φ, k) rectifiable subsets of n-space.* Transactions of the American Math. Soc. vol. 62 (1947), pp. 114-192.

[3] H. FEDERER: *Measure and area.* Bulletin of the American Math. Soc., vol. 58 (1952) pp. 306-378.

[4] L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions,* vol. I; Hermann, Paris, 2a ed. 1957.