ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. L. LIONS
E. MAGENES

Problèmes aux limites non homogènes (IV)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 15, n^o 4 (1961), p. 311-326
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_4_311_0>

PROBLÈMES AUX LIMITES NON HOMOGÈNES. (IV)

par J. L. LIONS (Nancy) et E. MAGENES (Pavia).

Introduction.

Cet article donne un certain nombre de propriétés d'espaces fonctionnels introduits dans l'article (III) de cette série (cf. bibliographie [11]) (¹). Certaines de ces propriétés seront utilisées dans l'article (V).

Nous avons mis ces propriétes dans un article séparé, pouvant être lu indépendamment des autres articles de cette série (²), parce que les résultats que nous obtenons ont intérêt à être placés dans le cadre général des espaces d'interpolation (cf. les Remarques du n⁰ 5).

Le plan est le suivant:

juillet 1961

N⁰ 1. Théorèmes de densité.

On désigne par Ω un ouvert de R^n; nous supposons (³) que Ω est borné, de frontière Γ une variété indéfiniment différentiable de dimension $n-1$, Ω étant d'un seul coté de Γ. On pose $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

(¹) Nous introduisons au N⁰ 1 quelques espaces plus généraux.

(²) A l'exception du N⁰ 6.

(³) On ne fait ici aucun effort pour trouver les hypothèses les plus générales sur Ω sous lesquelles nos résultats sont vrais.

Sur Ω on considère les espaces habituels : $L^q(\Omega)$ [4] espace des (classes de) fonctions de puissance q-ème intégrable sur Ω, la norme étant

$$\| f \|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega | f(x) |^q \, dx \right)^{1/q};$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}'(\Omega)$) espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact (resp. des distributions sur Ω), avec la topologie de Schwartz [13].

En accord avec les notations de [11], (III), nous désignons par $W^{1,q}(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^q(\Omega)$ telles que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^q(\Omega), \qquad i = 1, \dots, n;$$

muni de la norme

$$\| u \|_{W^{1,q}(\Omega)} = \left(\| u \|^q_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^q_{L^q(\Omega)} \right)^{1/q};$$

c'est un espace de Banach (réflexif).

Pour plus de symmétrie dans les notations nous poserons aussi

$$W^{0,q}(\Omega) = L^q(\Omega).$$

Espaces de traces ([8], [10]).

Nous considérons deux paramètres p et α tels que

$$1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \alpha = \theta \in]0, \infty[; \tag{1.1}$$

Nous désignons par $W(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$ l'espace des (classes de) fonctions $t \to u(t)$ telles que

$$X(u) = \left(\int_0^\infty t^{\alpha p} \| u(t) \|^p_{W^{1,q}(\Omega)} \, dt \right)^{1/p} < \infty \text{ [5]}, \tag{1.2}$$

la dérivée $\dfrac{du}{dt}$ (au sens des distributions sur $]0, \infty[$ à valeurs dans $W^{1,q}(\Omega)$) étant p.p. égale à une fonction u' telle que

$$Y(u') = \left(\int_0^\infty t^{\alpha p} \| u'(t) \|^p_{W^{0,q}(\Omega)} \, dt \right)^{1/p} < \infty. \tag{1.3}$$

---

(4) On supposera *toujours* que $p, q, \dots$ sont dans $]1, \infty[$.

(5) Cela signifie que $t^\alpha u(t) \in L^p(0, \infty; W^{1,q}(\Omega))$.

Muni de la norme max $(X(u), Y(u'))$ c'est un espace de BANACH.

On peut dans ces conditions définir $u(0)$ et *lorsque* u *parcourt* $W(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega)), u(0)$ *parcourt* $T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$ (6)

Pour $v \in T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$, on pose:

$$(1.4) \qquad \| v \|_{T(p,\alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))} = \inf_{u(0)=v} \{\max (X(u), Y(u'))\}.$$

On obtient ainsi un *espace de* BANACH qui a la propriété d'interpolation par rapport aux applications linéaires (cf. [8], [10]); autrement dit (avec des notations évidentes), si π est un opérateur linéaire et continu de X^1 dans Y^1 et de X^0 dans Y^0, alors π est linéaire et continue de $T(p, \alpha; X^1, X^0)$ dans $T(p, \alpha; Y^1, Y^0)$.

De cette propriété résulte aussitôt la

PROPOSITION 1.1 *Soit* $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ (7). *Pour tout* $v \in T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$, *la fonction* φv *est dans le même espace, l'application* $v \to \varphi v$ *étant continue de* $T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$ *dans lui même.*

Soit σ un deuxième ouvert de R^n et soit Ψ un homéomorphisme une fois continûment différentiable de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\sigma}$ ainsi que son inverse Ψ^{-1}; si f est une fonction définie sur Ω, on définit $\Psi^* f$ sur σ par

$$(1.5) \qquad \Psi^* f(y) = f(\Psi^{-1} y), \qquad y \in \sigma.$$

Grâce aux propriétés de différentiabilité faites sur Ψ et Ψ^{-1}, Ψ^* est un isomorphisme de $W^{1,q}(\Omega)$ sur $W^{1,q}(\sigma)$ et de $W^{0,q}(\Omega)$ sur $W^{0,q}(\sigma)$, donc (8)

$$(1.6) \qquad \begin{cases} \Psi^* \text{ est un isomorphisme de } T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega)) \text{ sur} \\ T(p, \alpha; W^{1,q}(\sigma), W^{0,q}(\sigma)). \end{cases}$$

Signalons également ceci (cf. [10]; [11] (III)):

(1.7) l'espace $C^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$.

Le but de ce n^0 est de démontrer le

THÉORÈME 1.1. *Si*

$$(1.8) \qquad 1 - \left(\frac{1}{p} + \alpha\right) = 1 - \theta \leq \frac{1}{q}$$

l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$ (9).

---

(6) Dans [11], (III), nous avons utilisé $T(p, \alpha; W^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega)) = W^{1-\theta,p}(\Omega)$.

(7) Fonctions une fois continûment différentiables dans $\overline{\Omega}$.

(8) On interpole par rapport à θ^* et $(\theta^*)^{-1}$.

(9) Le résultat analogue dans le cas $p = q = 2$ a été obtenu indépendamment dans [2].

DÉMONSTRATION.

1) Soit v donnée dans $T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$. Nous voulons approcher v par $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$. Grâce à (1.7) on peut déja supposer que $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Utilisant un système de cartes locales et une partition de l'unité associée, et (1.6), on se ramème au cas où Ω coincide avec $R^n_+ = \{x_n > 0\}$. Donc on considère $v \in C^1(\bar{R}^n_+)$ $(\bar{R}^n_+ = \{x_n \geq 0\})$, à support compact, et on veut approcher v par $\varphi_j, \varphi_j \in \mathcal{D}(R^n_+)$, au sens de $T(p, \alpha; W^{1,q}(R^n_+), W^{0,q}(R^n_+)) = T$.

2) Soit $b(t)$ une fonction une fois continûment différentiable à support compact, telle que $b(0) = 1$. Introduisons

$$u(x, t) = v(x)\, b(t),$$

puis

$$u_m(x, t) = v(x)\, b(t)\, \theta_m(x, t)$$

où

$$\theta_m(x, t) = 1 \quad \text{si} \quad t \geq 2/m,$$

$$\theta_m(x, t) = \begin{cases} m\left(x_n + t - \dfrac{1}{m}\right) & \text{si} \quad 0 \leq x_n \leq \dfrac{2}{m} - t, \quad \dfrac{1}{m} \leq t \leq \dfrac{2}{m}, \\ 1 & \text{si} \quad x_n \geq \dfrac{2}{m} - t, \quad \dfrac{1}{m} \leq t \leq \dfrac{2}{m}, \end{cases}$$

$$\theta_m(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{m} - t, \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{m}, \\ m\left(x_n + t - \dfrac{1}{m}\right) & \text{si} \quad \dfrac{1}{m} - t \leq x_n \leq \dfrac{2}{m} - t, \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{m}, \\ 1 & \text{si} \quad x_n \geq \dfrac{2}{m} - t, \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{m}. \end{cases}$$

Nous vérifions au point 3) de la démonstration que:
(1.9) u_m demeure dans un ensemble borné de $W(p, \alpha; W^{1,q}(R^n_+), W^{0,q}(R^n_+))$.
Il en résulte que l'on peut extraire de u_m une suite u_ν, $\nu \to \infty$, telle que

$$u_\nu(x, 0) \to u(x, 0) \quad \text{dans } T \text{ faible.} \tag{1.10}$$

Mais $u(x, 0) = v(x)$ et $u_\nu(x, 0) = \theta_\nu(x, 0)\, v(x)$ et u_ν *est identique à zéro au voisinage de la frontière de* R^n_+.

Ceci montre que l'espace $T \cap \mathcal{E}'(R^n_+)$ des éléments de T à support compact dans R^n_+ est dense dans T et par régularisations, maintenant possible, on voit que $\mathcal{D}(R^n_+)$ est dense dans T.

Reste à vérifier (1.9) (ce qui utilisera (1.8)).

3) Comme $\dfrac{\partial \theta_m}{\partial x_n} = \dfrac{\partial \theta_m}{\partial t}$, la seule chose à vérifier est que

$$X_m = \int_0^\infty | b(t) |^p t^{\alpha p} \left(\int_{R^n_+} \left| \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \right|^q | v(x) |^q dx \right)^{p/q} dt \leq c_1 \tag{1.11}$$

(c_1 = constante indépendante de m).

Mais comme $v \in C^1(\overline{R^n_+})$ et est à support compact, on a:

$$\int_{R^n_+} \left| \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \right|^q | v(x) |^q dx \leq c_2 \int_0^{2/m} m^q \, dx = c_3 \, m^{q-1}$$

et alors

$$X_m \leq c_4 \, m^{(q-1)p/q} \int_0^{2/m} t^{\alpha p} dt = c_5 \, m^{p(1-\theta-1/q)} \leq c_1$$

si (1.8) a lieu.

Ceci achève la démonstration du Théorème.

REMARQUE 1.1.

Même théorème (et même démonstration!) si Ω est un ouvert borné on non, de frontière une fois continûment différentiable, Ω d'un seul coté de Γ. Cf. aussi le Remarque suivante.

REMARQUE 1.2.

On peut comprendre, *de façon formelle*, la situation, en notant que $T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega)$ est « voisin » de $W^{0,q}(\Omega)$ lorsque $1-\theta$ est « petit » et « voisin » de $W^{1,q}(\Omega)$ lorsque $1-\theta$ est « grand ». L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W^{0,q}(\Omega)$ et ne l'est plus dans $W^{1,q}(\Omega)$; le théorème 1.1 donne un sens précis à l'affirmation que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans les espaces « assez voisins » de $W^{0,q}(\Omega)$ et ne l'est plus lorsqu'on se rapproche de $W^{1,q}(\Omega)$. Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^q(\Omega)$, indépendemment de la régularité de Ω, la question suivante est naturelle: le théorème 1.1 est-il vrai *sans aucune hypothèse de régularité sur* Ω?

On désigne par $T_0(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega)), W^{0,q}(\Omega))$ (resp. $W_0^{1,q}(\Omega)$) la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$ (resp. $W^{1,q}(\Omega)$). Il résulte évidemment du Théorème 1.1 que $T_0(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega)) = T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$ lorsque $1 - \left(\dfrac{1}{p} + \alpha\right) \leq \dfrac{1}{q}$.

Une question maintenant naturelle est la comparaison des espaces $T_0(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$ et $T(p, \alpha; W_0^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$.

Cette étude fait l'objet des N⁰ suivants mais seulement dans le cas $p = q$ (le cas $p \neq q$ n'est pas résolu).

N. 2. Quelques Lemmes.

On va donner dans ce N⁰ quelques propriétés des espaces

$$T(p, \alpha;\ W^{1,p}(\Omega),\ W^{0,p}(\Omega)) = W^{1-\theta,p}(\Omega), \qquad \frac{1}{p} + \alpha = \theta,$$

lorsque $\Omega =]\,0, \infty\,[$.

Il résulte par exemple de [7] que

Proposition 2.1. *Si l'on suppose que* $1 - \theta > \dfrac{1}{p}$, $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ *est contenu dans* $C^0(\overline{\Omega})$ (espace des fonctions continues dans $\overline{\Omega} = [0, \infty\,]$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact) *avec une topologie plus fine.*

Rappellons (cfr. par ex. [11], (III)) que pour que $u \in L^p(\Omega)$ soit dans $W^{1-\theta,p}(\Omega)$, il faut et il suffit que

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty | u(x) - u(y) |^p \, | x - y |^{(\alpha-1)p} \, dx \, dy < \infty. \tag{2.1}$$

Pour simplifier l'écriture, on pose

$$\| f \|_E = \left(\int_0^\infty x^{(\theta-1)p} \, | f(x) |^p \, dx \right)^{1/p} \tag{2.2}$$

et l'on désigne par E l'espace des fonctions f mesurables telles que $\| f \|_E < \infty$.

Le résultat essentiel de ce N⁰ est contenu dans la

Proposition 2.2.

1⁰) *Si* $1 - \theta < \dfrac{1}{p}$, *alors* $W^{1-\theta,p}(\Omega) \subset E$.

2⁰) *Si* $1 - \theta > \dfrac{1}{p}$, *et si* $u \in W^{1-\theta,p}(\Omega)$, *alors* $u - u(0) \in E$.

On va démontrer en peu plus. Tout élément u de $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ satisfait à (2.1), donc à fortiori :

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty | u(x) - u(y) |^p \, (x + y)^{(\alpha-1)p} \, dx \, dy < \infty. \tag{2.3}$$

On va alors montrer ceci (qui entraine la Proposition 2.2):

PROPOSITION 2.3.

1⁰) *Si* $1-\theta<\dfrac{1}{p}$, *tout* $u\in L^p(\Omega)$, *vérifiant* (2.3) *est dans* E.

2⁰) *Si* $1-\theta>\dfrac{1}{p}$, *pour tout* $u\in L^p(\Omega)\cap C^0(\bar\Omega)$, *vérifiant* (2.3), *on a*: $u-u(0)\in E$.

Le démonstration qui suit est une simple adaptation de [1]. Nous la donnons pour la commodité du lecteur.

Un calcul simple montre que (2.3) équivaut à

$$\int_0^\infty (1+y)^{(\alpha-1)p}\,\|u(x)-u(xy)\|_{E_x}^p\,dy<\infty\ ({}^{10}). \tag{2.4}$$

LEMME 2.1. *Soit* $a>1$ *donné. Il existe un ensemble mesurable* $\mathcal{G}$, *contenu dans* $\left[\dfrac{1}{a^2},a^2\right]$, *tel que*

$$L(y)=\|u(x)-u(xy)\|_{E_x}\le c_1\quad\text{pour}\quad y\in\mathcal{G}, \tag{2.5}$$

et tel que, pour tout $y\in\left[\dfrac{1}{a},a\right]$, *il existe* $y_0,y_1,y_2\in\mathcal{G}$ *tels que*

$$y=\frac{y_0\,y_2}{y_1}. \tag{2.6}$$

DÉMONSTRATION.

Posons: $\log y=\eta$, $\log a=\alpha$, $L(e^\eta)=\lambda(\eta)$. D'après (2.4) $\lambda(\eta)$ est une fonction mesurable, *p.p.* $<\infty$. Par conséquent, d'après une propriété bien connue des fonctions mesurables, il existe $\mathcal{E}\subset[-2\alpha,2\alpha]$, ensemble mesurable, $|\mathcal{E}|>3\alpha$ (11), avec $\lambda(\eta)\le c_2$ pour $\eta\in\mathcal{E}$.

Si maintenant $\eta\in[-\alpha,\alpha]$, il existe $\eta_0\in\mathcal{E}$ tel que $|\eta-\eta_0|<\alpha$ (car $|\mathcal{E}|>3\alpha$). Lorsque η_1 parcourt $\mathcal{E}$, $\eta-\eta_0+\eta_1$ parcourt $\mathcal{E}'$, $|\mathcal{E}'|>3\alpha$, $\mathcal{E}'\subset[-3\alpha,3\alpha]$. Comme $|\mathcal{E}|+|\mathcal{E}'|>6\alpha$, on a nécessairement $\mathcal{E}\cap\mathcal{E}'\neq\emptyset$; donc il existe $\eta_2\in\mathcal{E}$ tel que $\eta-\eta_0+\eta_1=\eta_2$, d'où le résultat avec $y_j=\exp(\eta_j)$, $j=0,1,2$.

---

(10) $\|g(x,y,\dots)\|_{E_x}=\left(\displaystyle\int_0^\infty x^{(\theta-1)p}\,|g(x,y,\dots)|^p\,dx\right)^{1/p}$.

(11) $|X|=$ mesure de X.

LEMME 2.2. *Il existe une constante* c_3 *telle que*

$$L(y) = \| u(x) - u(xy) \|_{E_\infty} \leq c_3 \quad \text{pour} \quad y \in \left[\frac{1}{a}, a\right]. \tag{2.7}$$

DÉMONSTRATION.
On utilise (2.6);

$$L(y) \leq \| u(x) - u(xy_0) \|_{E_\infty} + \left\| u(xy_0) - u\left(x \frac{y_0 y_2}{y_1}\right) \right\|_{E_\infty}$$

d'où, d'après (2.5) et un calcul simple

$$L(y) \leq c_1 + \left(\frac{y_0}{y_1}\right)^{1-\theta-1/p} (\| u(xy_1) - u(x) \|_{E_\infty} + \| u(xy_2) - u(x) \|_{E_\infty}).$$

Mais comme y_1, $y_2 \in E$, on a, d'après (2.5):

$$L(y) \leq c_1 + 2c_1 \left(\frac{y_0}{y_1}\right)^{1-\theta-1/p}$$

et comme y_0, $y_1 \in E \subset \left[\frac{1}{a^2}, a^2\right]$, $\frac{y_0}{y_1}$ est borné, d'où (2.7).

LEMME 2.3. *Posons*

$$g_y(x) = u(x) - u(xy). \tag{2.8}$$

On a

$$\| g_{y_1} - g_{y_2} \|_E \leq c_3\, y_1^{1-\theta-1/p}, \quad si \quad 1 \leq \frac{y_2}{y_1} \leq a, \tag{2.9}$$

$$\| g_{y_1} - g_{y_2} \|_E \leq c_4 (y_1^{1-\theta-1/p} - y_2^{1-\theta-1/p}), \quad si \quad \frac{y_2}{y_1} > a. \tag{2.10}$$

DÉMONSTRATION.
On a:

$$\| g_{y_1} - g_{y_2} \|_E = y_1^{1-\theta-1/p} \left\| u(x) - u\left(x \frac{y_2}{y_1}\right) \right\|_{E_\infty}$$

et si $1 \leq \frac{y_2}{y_1} \leq a$, (2.9) résulte de (2.7).

Supposons maintenant $\frac{y_2}{y_1} > a$. Il existe $y \in [\sqrt{a}, a)$ et un entier n, tels que

$$y_2/y_1 = y^n.$$

Alors

$$\| g_{y_1} - g_{y_2} \|_E = y_1^{1-\theta-1/p} \, \| u(xy^n) - u(x) \|_E \leq$$

$$\leq y_1^{1-\theta-1/p} \sum_{j=1}^{n} \| u(xy^j) - u(xy^{j-1}) \|_E =$$

$$= y_1^{1-\theta-1/p} \, \| u(x) - u(xy) \|_E \left(\sum_{j=1}^{n} y^{(j-1)(1-\theta-1/p)} \right) \leq$$

$$\leq c_3 \frac{y_2^{1-\theta-1/p} - y_1^{1-\theta-1/p}}{y^{1-\theta-1/p} - 1}$$

d'où (2.10), puisque $y \geq \sqrt{a} > 1$.

LEMME 2.4.

1[0]) *Soit $1-\theta<1/p$, et soit une suite croissante $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n \leq, \ldots, \to \infty$; alors $g_{y_n} \to u$ dans E lorsque $n \to \infty$.*

2[0]) *Soit $1 - \theta > \dfrac{1}{p}$, et soit une suite décroissante $y_1 \geq \ldots y_n \geq y_{n+1}, \ldots \to 0$; alors $g_{y_n} \to u - u(0)$ dans E lorsque $n \to \infty$.*

DÉMONSTRATION.

En effet on estime $\| g_{y_n} - g_{y_{n+k}} \|_E$ par (2.9) et (2.10) et on note que l'espace E est complet. Donc il existe $g \in E$ tel que $g_{y_n} \to g$ dans E lorsque $n \to \infty$.

Notons maintenant que $u(xy_n) \to 0$ dans $L^p(\Omega)$ lorsque $y_n \to +\infty$ de sorte que $g_{y_n}(x) = u(x) - u(xy_n) \to u(x)$ dans $E + L^p(\Omega)$, donc $g = u$, si $1 - \theta < 1/p$. Ceci démontre le 1[0]) de la Proposition 2.3.

Notons enfin que pour $u \in L^p(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, et pour $y_n \to 0$, $u(xy_n) \to u(0)$ par exemple au sens des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ sur Ω, de sorte que, si $1 - \theta > 1/p$, $g_{y_n} \to u - u(0)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc $g = u - u(0)$, ce qui démontre le 2[0]) de la Proposition 2.3.

3. Prolongement à R^n des éléments de $W^{1-\theta,p}(\Omega)$.

THÉORÈME 3.1. ([12]) *Les hypothèses sur Ω sont celles du N[0] 1. Pour $u \in L^p(\Omega)$, on désigne par $\tilde{u}$ la fonction égale à u dans Ω et à 0 ailleurs.*

1[0]) *Si $1 - \theta < 1/p$, $u \to \tilde{u}$ est une application linéaire continue $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ dans $W^{1-\theta,p}(R^n)$.*

([12]) Le résultat analogue dans le cas $p = 2$ est donné dans [2], cf. aussi [16].

2⁰) *Si* $1-\theta \geq \frac{1}{p}$, *pour* $u \in W^{1-\theta,p}(\Omega)$, $\tilde{u}$ *n'est pas en général dans* $W^{1-\theta,p}(R^n)$.

DÉMONSTRATION DU 1⁰).

Utilisant les propriétés locales de $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ (cfr. N⁰ 1) et une partition de l'unité, on se ramène au cas où *Ω est identique à* $R_+^n = \{x_n > 0\}$. *De façon générale*, pour que $u \in L^p(\Omega)$ soit dans $W^{1-\theta,p}(\Omega)$, il faut et il suffit que (cf. per ex. [11], III).

$$\int_\Omega \int_\Omega |u(x) - u(y)|^p \frac{1}{|x-y|^{n-1}} |x-y|^{(\alpha-1)p}\, dx\, dx < \infty.$$

Partant de $u \in W^{1-\theta,p}(R_+^n)$, il s'agit donc de vérifier que

$$\int_{R^n} \int_{R^n} |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)|^p \frac{1}{|x-y|^{n-1}} |x-y|^{(\alpha-1)p}\, dx\, dy < \infty,$$

ou encore, ce qui revient au même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{R^n} |t|^{(\alpha-1)p} |\tilde{u}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - \tilde{u}(x)|^p\, dx\, dt < \infty,$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Tout se ramène aussitôt à vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{R^n} |t|^{(\alpha-1)p} |\tilde{u}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + t) - \tilde{u}(x)|^p\, dx\, dt < \infty$$

et finalement que

$$\int_{-\infty}^{0} \int_{R_+^n} (x_n - y_n)^{(\alpha-1)p} \, |u(x)|^p\, dx\, dy_n < \infty$$

soit, en intégrant en y_n, que

$$\int_{R_+^n} x_n^{(\theta-1)p} \, |u(x)|^p\, dx < \infty. \tag{3.1}$$

D'après la Proposition 2.2, 1°),

$$\int_0^\infty x_n^{(\theta-1)p} \mid u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mid^p dx_n \le$$

$$\le c \int_0^\infty \mid u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mid^p dx_n +$$

$$+ c \int_0^\infty \int_0^\infty \mid x_n - y_n \mid^{(\alpha-1)p} \mid u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - u(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) \mid^p dx_n \, dy_n$$

d'où (3.1), en intégrant en $x_1, \dots, x_{n-1}$.

DÉMONSTRATION DU 2°).

La condition (3.1) est non seulement suffisante mais *nécessaire* pour que $u \in W^{1-\theta,p}(R^n)$.

Or si l'on prend pour u une fonction une fois continûment différentiable à support compact dans $\{x_n \ge 0\}$ telle que, par exemple, $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 1$ pour $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \le 1$, la condition (3.1) *n'a pas lieu* lorsque $(1-\theta)p \ge 1$. Comme u est évidemment dans $W^{1,p}(\Omega)$, u est à fortiori dans $W^{1-\theta,p}(\Omega)$, ce qui achève la démonstration du Théorème.

4. Prolongement à R^n des éléments de $W_0^{1-\theta,p}(\Omega)$.

On désigne par $W_0^{1-\theta,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1-\theta,p}(\Omega)$. Comme on a déjà signalé à la fin du N° 1 (avec $p \neq q$), on a $W_0^{1-\theta,p}(\Omega) = W^{1-\theta,p}(\Omega)$ si $1-\theta \le \dfrac{1}{p}$. On a le

THÉORÈME 4.1. *Pour* $1-\theta > \dfrac{1}{p}$, *l'application* $u \to \tilde{u}$ *est linéaire et continue de* $W_0^{1-\theta,p}(\Omega)$ *dans* $W^{1-\theta,p}(R^n)$.

DÉMONSTRATION.

Comme au Théorème 3.1, on se ramène au cas où $\Omega = R_+^n$.

On se ramené ancore à démontrer (3.1) et pour cela on applique la Proposition 2.3, 2°) (avec $u(0) = 0$).

5. Conséquences.

Notons d'abord ceci:

PROPOSITION 5.1. *L'application* $u \to \tilde{u}$ *est continue de*

$$T(p, \alpha;\ W_0^{1,p}(\Omega),\ W^{0,p}(\Omega)) \ \textit{dans}\ W^{1-\theta,p}(R^n).$$

En effet $u \to \tilde{u}$ est continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(R^n)$, d'où le résultat par interpolation.

Démontrons maintenant le

THÉORÈME 5.1. *L'ouvert Ω vérifie les hypothèses du* N⁰ 1. *Alors*

$$(5.1) \qquad T(p, \alpha;\ W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega)) = W_0^{1-\theta,p}(\Omega) \quad si \quad 1-\theta \neq \frac{1}{p},$$

le résultat étant inexact si $1-\theta = \dfrac{1}{p}$.

DÉMONSTRATION.

L'application identité étant évidemment continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, elle est continue de $T(p, \alpha;\ W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega))$ dans $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ et comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $T(p, \alpha;\ W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega))$ (d'après le lemme 1.1, chap. 2 de [10]) on a:

$$(5.2) \qquad T(p, \alpha;\ W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega)) \subset W_0^{1-\theta,p}(\Omega)\ \text{[13]}.$$

Par ailleurs, il existe une application linéaire continue $u \to Qu$ de $W^{1,p}(R^n)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, telle que $Q\tilde{\varphi} = \varphi$ si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ [14]. Par interpolation, on voit que Q est linéaire continue de $W^{1-\theta,p}(R^n)$ dans $T(p, \alpha; W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega))$.

Mais si $u \in W_0^{1-\theta,p}(\Omega)$, alors, pour $1-\theta \neq 1/p$ (cf. Th. 3.1 et 4.1) $\tilde{u} \in W^{1-\theta,p}(R^n)$ et $Q\tilde{u} = u \in T(p, \alpha;\ W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega))$ ce qui montre l'inclusion inverse de (5.2) (lorsque $1-\theta \neq 1/p$) et démontre la première partie du Théorème.

On peut préciser l'énoncé du Théorème 5.1 relativement au cas $1-\theta = \dfrac{1}{p}$ de la façon suivante:

THÉORÈME 5.2. *Si* $1-\theta = \dfrac{1}{p}$, *l'espace* $T(p,\alpha;\ W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega))$ *est contenu strictement dans* $W_0^{1-\theta,p}(\Omega) = W^{1-\theta,p}(\Omega)$ *avec une topologie plus fine.*

DÉMONSTRATION.

De la Proposition 5.1 et du Théorème 3.1, 2⁰), il résulte que $T(p,\alpha; W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega))$ est strictement contenu dans $W_0^{1-\theta,p}(\Omega)$ et comme

---

[13] L'inclusion algébrique et topologique, y comprise pour $1-\theta = \dfrac{1}{p}$, cf. Th. 5.2.

[14] Par carte locale on se ramène à $\Omega = R_+^n$. Alors $Qu(x) = u(x) - u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$. (Cf. aussi [11], (III), page 76).

$\mathcal{D}(\Omega)$ est *dense* dans chacun des espaces, il résulte que la topologie de $T(p, \alpha; W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega))$ est strictement plus fine que celle de $W_0^{1-\theta,p}(\Omega)$.

Des Théorèmes 5.1 et 5.2 on déduit:

COROLLAIRE 5.1. *L'espace $T(p, \alpha; W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega))$ est un sous espace vectoriel fermé de $T(p, \alpha; W^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega))$, pour $1-\theta \neq \frac{1}{p}$, et n'est pas fermé pour $1-\theta = \frac{1}{p}$.*

REMARQUE 5.1.

Ceci montre que, X^i étant un sous espace vectoriel fermé de Y^i, $i=0, 1$, $T(p, \alpha; X^1, X^0)$ *n'est pas nécessairement un sous espace vectoriel fermé de* $T(p, \alpha; Y^1, Y^0)$.

Le même exemple, avec $p=2$, montre que (avec les notions et notations de [3], [9]) $[X^1, X^0, \delta(\theta)]$ n'est pas nécessairement un sous espace vectoriel fermé de $[Y^1, Y^0, \delta(\theta)]$, même lorsque les espaces considérés sont *hilbertiens*. Il serait intéressant de voir ce que donnent à ce sujet les constructions de [5] et [6].

REMARQUE 5.2.

Il semble probable — mais nous n'avons pas démontré — que $T(p, \alpha; W_0^{1,q}(\Omega), W^{1,q}(\Omega))$ est fermé dans $T(p, \alpha; W^{1,q}(\Omega), W^{0,q}(\Omega))$ pour $1-\left(\frac{1}{p}+\alpha\right) \neq \frac{1}{q}$, et ne l'est pas lorsque $1-\left(\frac{1}{p}+\alpha\right) = \frac{1}{q}$.

REMARQUE 5.3.

Il semble également probable — mais il n'est pas démontré, sauf dans le cas $p=2$, auquel cas c'est exactement le Corollaire 5.1 — que $[W_0^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega), \delta(\theta)]$ est fermé dans $[W^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega), \delta(\theta)] = H^{1-\theta,p}(\Omega)$, cf. [11], (III)) pour $1-\theta \neq \frac{1}{p}$, et ne l'est pas pour $1-\theta = \frac{1}{p}$.

6. Une application.

Nous utilisons ici les notations de [11], (III).

THÉORÈME 6.1. *Pour s entier ≥ 0, et pour $1-\theta \neq \frac{1}{p}$, on a*

$$T(p, \alpha; W_0^{s+1,p}(\Omega), W_0^{s,p}(\Omega)) = W_0^{s+1-\theta,p}(\Omega). \tag{6.1}$$

DÉMONSTRATION.

Le cas $s=0$ est donné au Théorème 5.1 — Le cas s entier >0 se démontre de facon analogue. D'abord, comme pour (5.2), on a:

$$T(p, \alpha; W_0^{s+1,p}(\Omega), W_0^{s,p}(\Omega)) \subset W_0^{s+1-\theta,p}(\Omega). \tag{6.2}$$

On considère ensuite (cf. [11] (III), page 76) un opérateur linéaire Q tel que $u \to Qu$ soit continue de $W^{s+1,p}(R^n)$ et $W^{s,p}(R^n)$ dans $W_0^{s+1,p}(\Omega)$ et $W_0^{s,p}(\Omega)$ respectivement, avec $Q\widetilde{\varphi} = \varphi$ si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par interpolation, Q est linéaire et continue de $W^{s+1-\theta,p}(R^n)$ dans $T(p, \alpha ; W_0^{s+1,p}(\Omega), W_0^{s,p}(\Omega))$. On termine comme au théorème 5.1 si l'on montre que, pour tout $u \in W_0^{s+1-\theta,p}(\Omega)$, alors $\widetilde{u} \in W^{s+1-\theta,p}(R^n)$. Or ceci résulte des théorèmes 3.1 et 4.1.

Par dualité, on déduit du Théorème 6.1 le

THÉORÈME 6.2 *Pour s entier < 0 et $1 - \theta \neq \frac{1}{p}$ on a*

$$T(p, \alpha ; W^{s+1,p}(\Omega), W^{s,p}(\Omega)) = W^{s+1-\theta,p}(\Omega). \tag{6.3}$$

C'est le Théorème 11.3 bis de [11], (III), mais démontré ici par un procédé beaucoup plus direct que dans [11], (III) où nous passions par l'intermédiaire des problèmes de DIRICHLET.

REMARQUE 6.1. Corrigeons un erreur dans la Prop. 11.1 de [11], (III). *Cette proposition suppose* $s \neq \frac{1}{p}$.

En effet, si $s = \frac{1}{p}$, D_i n'applique pas $W^{s,p}(\Omega)$ dans $W^{s-1,p}(\Omega)$; en effet, tout se ramène au cas $\Omega =]0,1[$, $D_i = D = \frac{d}{dx}$; si D appliquait $W^{s,p}(\Omega)$ dans $W^{s-1,p}(\Omega)$, ce serait un opérateur linéaire *continu* (théorème du *graphe fermé*) ; donc

$$\| D\varphi \|_{W^{s-1,p}(\Omega)} \leq c \, \| \varphi \|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$; donc

$$| < D\varphi, \psi > | \leq C \, \| \varphi \|_{W^{s,p}(\Omega)} \| \psi \|_{W_0^{1-s,p'}(\Omega)} \tag{6.4}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Mais $1 - s = \frac{1}{p'}$, donc (théor. 1.1) $W_0^{1-s,p'}(\Omega) = W^{1-s,p'}(\Omega)$ et (6.4) vaut également pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Même inégalité en échangeant φ et ψ, d'où

$$| \varphi(1) \psi(1) - \varphi(0) \psi(0) | \leq 2\, C \, \| \varphi \|_{W^{s,p}(\Omega)} \| \psi \|_{W^{1-s,p'}(\Omega)}. \tag{6.5}$$

On peut choisir $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ avec $\psi(0) = 1$ et $\psi(1) = 0$. Alors, puisque $s = \frac{1}{p}$

$$| \varphi(0) | \leq C^* \, \| \varphi \|_{W^{1/p,p}(\Omega)} \tag{6.6}$$

ce qui n'est pas (puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_p^{1,p}(\Omega)$, si (6.6) était vrai, on aurait $\varphi(0) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, ce qui est absurde).

Dans la démonstration de la Prop. 11.1 de [11], (III) nous avons utilisé l'opérateur de restriction à Ω, R_Ω, qui applique $W^{s-1,p}(R^n)$ dans $W^{s-1,p}(\Omega)$ sauf si $s - 1 = \dfrac{1}{p'}$, c'est à dire $s = \dfrac{1}{p}$.

CONSÉQUENCES : dans [11], (III) les théor. 11.1 et 11.2 sont corrects si pour p fixé, $r - \dfrac{1}{p}$ est non entier ; le théor. 11.3 bis est correct si, pour p fixé, $\theta + \dfrac{1}{p}$ est $\neq 1$; le théor. 11.6 est contenu dans le théor. 11.2 ; dans [11], (II) il faut ajouter : $(1 - \theta)\alpha + \theta\beta - \dfrac{1}{2}$ non entier dans (1.3). Tous les autres énoncés sans changement, en particulier les théor. 11.3, 11.4 et 11.5 de [11], (III) (noter que pour les espaces $W^{s,p}(\Gamma)$ et $H^s(\Gamma)$ les phénomènes exceptionnels signalés dans ce travail n'ont pas lieu, puisque Γ est « sans bord »).

BIBLIOGRAPHIE

1. - N. ARONSZAJN - G. H. HARDY : *On a class of double integrals.* Annals of Maths. Vol. 46 (1945), p. 220-241.
2. - N. ARONSZAJN - K. T. SMITH : *Theory of Bessel potentials.* Part. I Annales Inst. Fourier, Part. II, en préparation.
3. - A. P. CALDERON : *Intermediate spaces and interpolation.* Colloque de Varsovie, Septembre 1960, à paraitre.
4. - E. GAGLIARDO : *Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili.* Rend. Sem. Mat. Padova. 27 (1957), p. 284-305.
5. - E. GAGLIARDO : *Interpolation d'espaces de Banach et applications.* C. R. Acad. Sc. Paris, (I), (II), (III), vol. 248 (1959), p. 1912-1914, 3388-3390, 3517-3518.
6. - E. GAGLIARDO : *Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni.* Ricerche di Mat., IX (1960), p. 58-81.
7. - V. P. IL'IN. : *Sur un théorème de Hardy et Littlewood.* Bull. Stekloff (1959), p. 128-144.
8. - J. L. LIONS : *Théorèmes de trace et d'interpolation.* (I) Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, XII (1959), p. 389-403 ; (IV), en préparation.
9. - J. L. LIONS : *Une construction d'espaces d'interpolation.* C. R. Acad. SC. Paris, t. 251 (1960), p. 1851-1855.
10. - J. L. LIONS : *Sur les espaces d'interpolation, dualité.* Math. Scandinavica, t. 9 (1961), p. 147-177.
11. - J. L. LIONS - E. MAGENES : *Problemi al contorno non omogenei,* (I), (III), Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. XIV (1960), p. 269-308, Vol. XV (1961), p. 39-101; *Problèmes aux limites non homogènes* (II), Annales Institut Fourier, t. 11 (1961), p. 137-178.
12. - P. I. LIZORKIN : *Propriétés aux limites de classes de fonctions avec « poids ».* Doklady Akad. Nauk. t. 132 (1960), p. 514-517.
13. - L. SCHWARTZ : *Théorie des distributions.* Paris - Hermann, t. 1 (1950, 2ème édition 1957), t. 2 (1951).
14. - S. L. SOBOLEV : *Applications de l'analyse fonctionelle à la Physique mathématique.* Léningrad (1950).
15. - S. V. USPENSKII : *Propriété des classes W_p^r pour dérivées fractionnaires sur une variété différentiable.* Doklady Akad. Nauk., t. 132 (1960), p. 60-62.
16. - J. PEETRE : *Mixed problems for higher order elliptic equations I.* Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, à paraitre.