ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

L. BERS

Uniformizzazione e moduli

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 4 (1960), p. 309-316
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_4_309_0>

UNIFORMIZZAZIONE E MODULI (*)

di L. BERS (New York)

Le equazioni di Beltrami a coefficienti discontinui furono considerate per la prima volta da Morrey (cfr. [3] anche per i riferimenti bibliografici); esse si sono dimostrate utili nello studio dell'uniformizzazione e dei moduli delle superficie di Riemann. Nella teoria dei moduli che se ne deduce, ci si è limitati naturalmente al « caso classico » ; tuttavia alcuni teoremi possono essere dimostrati anche pel caso di superficie di Riemann aperte.

Una presentazione completa dell'argomento è ovviamente impossibile in poche pagine. Ci limiteremo perciò solo ad enunciare il risultato centrale per le superficie di Riemann chiuse (§ 1), risultato che commenteremo al § 2 ; quindi al § 3 daremo un teorema di uniformizzazione che è essenziale per la dimostrazione e che è di per sè interessante. Le dimostrazioni saranno date per sommi capi nei § 6, 7, 8. Una esposizione completa sarà pubblicata in seguito.

§ 1. — Enunciato del teorema fondamentale.

Il teorema che enunceremo assicura in sostanza la possibilità dell'uniformizzazione simultanea di tutte le curve algebriche di dato genere $g > 1$. Esso è da ravvicinarsi al teorema corrispondente per le funzioni di Weierstrass $p(z, 1, \tau)$ e $p'(z, 1, \tau)$, $|z| < \infty$, $\Im m\, \tau > 0$ che dà l'uniformizzazione delle curve di genere 1.

(*) Lavoro eseguito col contratto No. DA — 30 — 069 — 0Rd — 2153 dell'« *Office of Ordonance Research* » dell'Esercito degli Stati Uniti. Questo lavoro uscirà in inglese nei Rendiconti del « *Symposium on function theory* » del « *Tata International Institute* ». Il contenuto di questo lavoro è stato esposto in un ciclo di conferenze tenute presso la Scuola Normale Superiore di Pisa dal 1 al 10 settembre 1958 in occasione del corso internazionale organizzato dal CIME e tenuto sotto gli auspici della Scuola Normale Superiore e dell'Istituto Matematico dell'Università di Pisa.

TEOREMA : Sia $g > 1$ un intero fissato. Esiste:

1) un *dominio limitato* T nello spazio numerico complesso $\mathbb{C}^{3g-3}$ (ove $\tau_1, \dots, \tau_{3g-3}$ sono le coordinate) omeomorfo ad una cella

2) un dominio $M \subset \mathbb{C}^{3g-2}$ (ove $Z, \tau_1, \dots, \tau_{3g-3}$ sono le coordinate) omeomorfo ad una *cella* e olomorficamente equivalente ad un dominio limitato.

3) una funzione continua $\sigma(t, \tau)$ a valori complessi, $-\infty < t < +\infty$, $\tau \in T$ tale che $\sigma(t, \tau)$ è *olomorfa* in τ per ogni fissato t, $\sigma(t, \tau) \to \infty$ per τ fissato e $|t| \to \infty$, $\sigma(t_1, \tau) \neq \sigma(t_2, \tau)$ se $t_1 < t_2$.

4) un gruppo G di automorfismi *analitici complessi* di M che opera su M senza punti fissi e in modo *propriamente discontinuo.*

5) un gruppo Γ di automorfismi *analitici complessi* di T, *propriamente discontinuo* (ma *non* privo di punti fissi).

6) una applicazione *olomorfa* $\tau \to Z(\tau)$ di T nello *spazio di* Siegel delle coppie $Z = X + iY$ di matrici $g \times g$ simmetriche X, Y con $Y > 0$.

ed infine

7) un numero finito di funzioni *meromorfe* $F_j(z, \tau)$ definite su M *automorfe* rispetto a G.

tali che le seguenti conclusioni siano verificate:

8) per ogni $\tau \in T$ la curva $\gamma(\tau): z = \sigma(t, z)$, $-\infty < t < +\infty$ è la curva frontiera di un *dominio semplicemente connesso* $D(\tau)$ nel piano della variabile z.

9) un punto $(z, \tau_1 \dots \tau_{3g-3}) = (z, \tau)$ è in M se e solo se $\tau \in T$ e $z \in D(\tau)$.

10) ogni elemento di G è della forma

$$\tau \to \tau$$

$$z \to \frac{a(\tau) z + b(\tau)}{c(\tau) z + d(\tau)}$$

ove a, b, c, d, sono funzioni olomorfe in T e $ad - bc = 1$. G è generato da $2g$ elementi $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$ tali che $\Pi[Aj, Bj] = 1$ ove $[A, B] = A B A^{-1} B^{-1}$

11) $G(\tau)$, la «restrizione» di G per τ fissato, è un gruppo di trasformazioni di Möbius del dominio $D(\tau)$ in sè. La superficie di Riemann $S(\tau) = D(\tau)/G(\tau)$ è una *superficie chiusa di genere g.*

12) *Ogni* superficie di Riemann chiusa di genere g è conformemente equivalente ad una $S(\tau)$, $S(\tau')$ e $S(\tau'')$ sono conformemente equivalenti se e solo se τ' e τ'' sono equivalenti rispetto a Γ.

13) La matrice $Z(\tau)$ è una *matrice di Riemann di periodi* per $S(\tau)$, còrrispondente ad una base dell'omologia definita da A_i, B_i,

e finalmente

14) Le restrizioni delle funzioni F_j per τ fissato generano il corpo delle funzioni automorfe di $D(\tau)$ rispetto a $G(\tau)$ cioè il *corpo delle funzioni meromorfe* su $S(\tau)$.

Osserviamo il seguente

COROLLARIO I. Lo spazio T/Γ è uno spazio analitico complesso normale.

Questo segue da 5) e da un teorema di H. Cartan [9]. Dimostrazioni essenzialmente diverse sono dovute a Röhrl [12] e Baily [4]. Baily ha anche dimostrato che T/Γ è un aperto di Zariski di una varietà algebrica. Lo spazio T/Γ è, com'è ovvio, lo spazio delle classi di superficie di Riemann di genere g conformemente equivalenti (cfr. 12)).

COROLLARIO II. Lo spazio M/G è una varietà complessa, l'applicazione naturale $M/G \to T$ è olomorfa, l'immagine inversa di $\tau \in T$ è una sottovarietà regolarmente immersa in M/G e conformemente equivalente a $S(\tau)$.

In modo analogo si possono costruire dei fissati complessi su T per i quali la fibra su τ è $S(\tau) \times \ldots \times S(\tau)$ ovvero la varietà di Jacobi di $S(\tau)$.

§ 2. — **Osservazioni.**

Descriveremo in questo § gli elementi necessarii alla dimostrazione.

A) Notazioni. La lettera S denoterà una superficie di Riemann astratta. Si dirà che S è eccezionale se S ammette automorfismi non identici conformi omotopi all'automorfismo identico. Una S *non eccezionale* si può rappresentare come U/G ove U è il semipiano di Poincaré e G è un gruppo Fuchsiano privo di trasformazioni ellittiche; diremo che S è di *prima specie* se i punti fissi di G sono densi sull'asse reale.

In particolare sia S *di tipo* (g, n), cioè ottenuta da una superficie di Riemann chiusa di genere $g \geq 0$ sopprimendovi $n \geq 0$ punti distinti. Allora S non è eccezionale (e di prima specie) se $3g - 3 + n > 0$.

Sia m un differenziale di tipo $(-1, 1)$ su S_0. Localmente $m = \mu(\xi)\, d\bar{\xi}/d\xi$ ove μ è una funzione misurabile e ξ una uniformizzazione locale. Poichè $|\mu|$ è uno scalare possiamo definire $\|m\| =$ estremo superiore essenziale di $|\mu|$. Se $\|m\| < 1$ scriveremo $m \in B(S_0)$ e diremo che m è un *differenziale di Beltrami.* In tal caso S_0^m denota la superficie S_0 munita della struttura conforme definita dalla condizione: ogni soluzione dell'*equazione di Beltrami* $\xi_{\bar{\xi}} = \mu \xi_{\xi}$ è una funzione olomorfa su S_0^m (Si richiede che la soluzione sia continua ed abbia derivate generalizzate localmente a quadrato integrabile). L'applicazione naturale $S_0^m \to S_0$ si noterà con l.

Un omeomorfismo $S \xrightarrow{f} S_0$ si dice *quasi-conforme* se può essere fattorizzato nel modo seguente $S \xrightarrow{h} S_0^m \xrightarrow{l} S_0$, h essendo conforme. Supponiamo f quasiconforme e sia $[f]$ la classe d'omotopia di f. Diremo che $(S, [f], S_0)$ è una *coppia pari.* Due tali coppie $(S, [f], S_0)$ ed $(S', [f'], S_0')$ si diranno equivalenti se esistono applicazioni conformi $S' \xrightarrow{h} S$, $S_0' \xrightarrow{h_0'} S_0$ tali che $[h_0^{-1} f h] = [f']$; fortemente equivalenti se $S_0' = S_0$, mentro h_0 può essere assunta eguale all'identità. Oggi coppia pari è equivalente ad una del tipo $(S_0^m, [l], S_0)$. Per abuso di linguaggio identificheremo spesso coppie con le corrispondenti classi di equivalenza.

B) Sia S_0 non eccezionale. L'insieme delle classi di equivalenza forte di coppie pari $(S, [f], S_0)$ è lo *spazio di Teichmüller* $T(S_0)$. La *distanza di Teichmüller* tra $(S, [f], S_0)$ ed $(S', [g], S_0)$ è data da $\log \{(1+k)/(1-k)\}$ ove

$$k = \inf \| m \| \qquad \text{per} \qquad m \in B(S),$$

$(S^m, [l], S)$ fortemente equivalente a $(S', [f^{-1}g], S)$. Questa distanza definisce una topologia su $T(S_0)$.

Una funzione continua Φ a valori complessi su $T(S_0)$ sarà chiamata *analitica-complessa* o *olomorfa* se, per ogni insieme $(m_1, \dots, m_r) \subset B(S)$, ove $(S_1 [f], S_0) \in T(S_0)$, la rappresentazione di un intorno di $0 \in C^r$ in C espressa dalla

$$(\xi_1, \dots, \xi_r) \to p\,(S^{\xi_1 m_1 + \cdot\cdot + \xi_r m_r}, [f], S_0) \to \Phi(p)$$

è olomorfa. In modo analogo definiremo l'*analiticità reale.*

Una rappresentazione quasi conforme $S_1 \xrightarrow{g} S_0$ induce una « rappresentazione lecita » g^* di $T(S_1)$ su $T(S_0)$:

$$g^*((S, [f], S_1)) = (S, [gf], S_0);$$

g^* dipende soltanto da $[g]$ e *conserva* la distanza di Teichmüller e l'analiticità reale e complessa. Il gruppo delle rappresentazioni lecite di $T(S_0)$ in sè sarà denotato con $\Gamma(S^0)$.

Ricorrendo all'uniformizzazione mediante gruppi Fuchsiani si dimostra che $T(S_0)$ è uno *spazio metrico completo*; se il gruppo fondamentale di S_0 è generato in modo finito, $\Gamma(S_0)$ è *propriamente discontinuo*; le funzioni analitiche reali su $T(S_0)$ *separano i punti.* In base al nuovo teorema di uniformizzazione enunciato nel § 3 si dimostra che: se S_0 è di *prima specie,* le funzioni olomorfe su $T(S_0)$ *separano i punti.*

c) Se S_0 è di tipo (g, n) scriveremo $T(S_0) = T_{g,n}$ $\Gamma(S_0) = \Gamma_{g,n}$. Questa notazione è giustificata dal fatto che due qualunque superficie di tipo (g, n) sono *quasi-conformemente equivalenti.* Porremo $\varrho = 3g - 3 + n$, ed assumeremo $\varrho > 0$.

La teoria di Teichmüller [1, 5, 13, 14] delle rappresentazioni quasi conformi estremali implica che $T_{g,n}$ *sia una* 2ϱ*-cella.* Inoltre è noto che $T_{g,n}$ è una *varietà analitica complessa* (ciò è stato dimostrato per la prima volta da Ahlfors [2]; cfr. anche [6, 10, 11, 15]).

Nel nostro teorema fondamentale, T, Γ e M tengono il luogo, rispettivamente, di $T_{g,0}$, $\Gamma_{g,0}$ e $T_{g,1}$. Le osservazioni precedenti giustificano alcuni dei nostri enunciati. L'esistenza della rappresentazione descritta in (6), (13) segue, ad esempio, dalla formula variazionale di Rauch [11].

d) nell'enunciato del nostro teorema, $T = T_g$ non appare come una varietà analitica complessa astratta ma come un dominio limitato. Questo è un caso particolare di un risultato più generale: $T_{g^{\prime}n}$ è (olomorficamente equivalente ad) *un dominio limitato in* C^{ϱ}. La dimostrazione (indicata sommariamente in [7] è piuttosto complicata. Essa è basata sulla possibilità di uniformizzare ogni superficie di Riemann chiusa mediante gruppi di Schottky, ed involge una analisi geometrica dettagliata dello spazio di Schottky » di cui T_g è il ricoprimento universale. La dimostrazione procede per induzione su g e su n; in tale induzione le superficie iperellittiche rivestono un ruolo particolare.

e) la rappresentazione di $T_{g,1}$ nella forma M, cioè nella forma descritta negli enunciati 8) e 9) e la costruzione del gruppo G avente le proprietà 4), 10), 11) è basata sul teorema di uniformizzazione del § 3.

Supponendo di aver compiuto le tappe precedenti, non é difficile concludere la dimostrazione, cioè costruire le funzioni F_j aventi le proprietà 7), 14). Fissiamo un insieme di generatori A_j, B_j di G (cfr. 10)), e definiamo su ogni $S(\tau)$ una base di omologia, che denotiamo con le stesse lettere. Sia ω_j il differenziale abeliano di prima specie avente periodo δ_{jk} su A_k (sicchè, fra l'altro, il periodo di ωj su B_k è l'elemento Z_{jk} di $Z(\tau)$). Sia Ω_{jk} il differenziale abeliano di terza specie su $S(\tau)$ avente periodi 0 sugli A_j e tale che in ogni punto di $S(\tau)$ il residuo di Ω_{jk} eguagli l'ordine di ω_j/ω_k. L'insieme delle funzioni $\{\omega_j/\omega_k, \Omega_{jk}/\omega_l, j, k, e = 1, 2, \ldots, g\}$, considerate come funzioni $\mathcal{D}(\tau)$ ha le proprietà richieste.

Osservazione. Il teorema del § 1 è sfortunatamente di carattere piuttosto « esistenziale ». Sarebbe utile avere espressioni esplicite per i dominî e le funzioni descritte. Io esito ad affermare che vi sia molta speranza di ottenere tali formule.

§ 3. — Un nuovo teorema di uniformizzazione.

Un gruppo G di trasformazioni di Möbius sarà chiamato *quasi Fuchsiano* se esiste sulla sfera di Riemann una curva di Jordan orientata γ_G tale che γ_G sia invariante rispetto a G, e quest'ultimo sia privo di punti fissi e propriamente discontinuo nei domini $I(\gamma_G)$ e $E(\gamma_G)$ rispettivamente interno ed esterno a γ_G.

Teorema I. Siano S_1 e S_2 due superficie di Riemann. Supponiamo che S_1 e S_2 abbiano superficie di ricoprimento universale iperboliche, e che S_1 sia *quasi conformemente* equivalente all'immagine speculare $\overline{S}_2$ di S_2. In queste ipotesi, esiste un gruppo quasi-fuchsiano G tale che $I(\gamma_G)/G$ sia *conformemente equivalente* a S_1 e $E(\gamma_G)/G$ a S_2.

Osservazione. $\overline{S}$ è definita sostituendo ciascuna uniformizzazione locale ξ su S con la sua complessa coniugata $\overline{\xi}$. Le ipotesi per il teorema 1 sono soddisfatte se S_1 e S_2 sono chiuse e dello stesso genere > 1.

Dimostrazione. Poniamo $S_0 = \overline{S}_2$. Ne segue che $S_1 = S_0^m$ per un opportuno $m \in B(S_0)$. Per ipotesi $S_0 = \mathcal{U}/G_0$, ove $\mathcal{U}$ è il semipiano superiore e G_0 è un gruppo fuchsiano privo di punti uniti. Pertanto $L/G_0 = \overline{S}_0$, L essendo il semipiano inferiore. Poniamo $\mu(z) \equiv 0$ per $\mathfrak{Im}\, z \leq 0$, e definiamo $\mu(z)$ per $\mathfrak{Im}\, z > 0$ mediante la condizione: $\mu(z)\overline{dz}/dz = m$. Risulta $|\mu(z)| \leq k < 1$, e

$$\mu(A(z)) = \mu(z)\,\overline{A'(z)} \qquad \text{per} \qquad A \in G_0 .$$

Esiste uno ed uno solo omeomorfismo ω_μ del piano in sè che lascia 0 e 1 invarianti ed è μ-conforme, ossia è una soluzione dell'equazione di Beltrami.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} = \mu(z)\,\frac{\partial \omega}{\partial z} .$$

Se $A \in G_0$, l'equazione funzionale per μ implica che $\omega^\mu(A(z))$ è un automorfismo μ-conforme della sfera di Riemann, di guisa che

$$A^\mu = \omega^\mu A\,(\omega^\mu)^{-1}$$

è una trasformazione di Möbius. Si verifica che $G = \omega^\mu G_0 (\omega^\mu)^{-1}$ è il gruppo quasi fuchsiano richiesto.

Indicheremo con ι la rappresentazione naturale di S_0 su $\overline{S}_0$. Un omeomorfismo $S \xrightarrow{h} \overline{S}_0$ è detto anti-quasiconforme se può essere fattorizzato nel modo seguente: $S \xrightarrow{h} S_0^m \xrightarrow{\iota} \overline{S}_0$, h essendo conforme. Un f siffatto definisce una *coppia dispari* $(S, [f], \overline{S}_0)$. Ogni coppia dispari è equivalente, nel senso del § 2, *a*), ad una coppia della forma $(S_0^m, [\iota], S_0)$.

Sia G un gruppo quasi-fuchsiano, e poniamo $A = A_1/A_0$, ove A_1 è il gruppo degli automorfismi di G e A_0 è il sottogruppo degli automorfismi interni. Poichè G può essere identificato ai gruppi fondamentali di $I(\gamma_G)/G$ e di $E(\gamma_G)/G$, ogni omeomorfismo

$$I(\gamma_G)/G \xrightarrow{\Phi} E(\gamma_G)/G$$

induce un elemento $\lambda(\Phi)$ di Λ, e $\lambda(\Phi) = \lambda(\psi)$ se, e soltanto se, $[\Phi] = [\psi]$. Se $\lambda(\Phi) = 1$ e se Φ è anti-quasiconforme, diremo che G *rappresenta* la coppia $(I(\gamma_G)/G, [\Phi], E(\gamma_G)/G)$ ed ogni coppia equivalente a quest'ultima.

Riesaminando la dimostrazione del Teorema I si vede che di fatto abbiamo dimostrato la prima parte del

TEOREMA II. Ogni coppia dispari $(S, [f], \overline{S}_0)$ può essere *rappresentata* da un gruppo quasi fuchsiano G, purchè S_0 abbia una superficie di ricoprimento universale iperbolica. Se S_0 è di *prima specie, ogni* gruppo quasi-fuchsiano G_1 rappresentante questa coppia è della forma $G_1 = QGQ^{-1}$, Q essendo una trasformazione di Möbius.

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato possiamo supporre che sia $S = S_0^m$, $f = \iota$, e che G sia il gruppo costruito dianzi. L'ipotesi fatta su G_1 implica l'esistenza di omeomorfismi conformi

$$I(\gamma_G) \cup \gamma_G \xrightarrow{\Phi} I(\gamma_{G_1}) \cup \gamma_{G_1}, \quad E(\gamma_G) \cup \gamma_G \xrightarrow{\psi} E(\gamma_{G_1}) \cup \gamma_{G_1}$$

con

$$\Phi\, A\, \Phi^{-1} = \psi\, A\, \psi^{-1} \qquad \text{su } \gamma_G \qquad \text{su } A \in G.$$

L'ultima relazione implica che $\Phi = \psi$ in tutti i punti fissi di G e quindi, per continuità, in ogni punto di γ_G. Poniamo $Q(z) = \Phi(z)$ per $z \in I(\gamma_G) \cup \gamma_G$, $Q(z) = \psi(z)$ per $z \in E(\gamma_G)$. Q è un automorfismo del piano e $G_1 = QGQ^{-1}$.

Resta da dimostrare che $Q(z)$ è olomorfo. Questo sarebbe immediato se γ_G fosse rettificabile. Nelle attuali circostanze, tuttavia, dobbiamo considerare $Q(z)$ come funzione di $\xi = \omega^\mu(z)$ ed utilizzare le proprietà di ω^μ date, ad esempio, in [3]. Da queste proprietà si trae che mis $\gamma_G = 0$ e che $Q(z)$ ha derivate generalizzate in L_2 in un intorno di γ_G. Poichè $\dfrac{\partial Q}{\partial \bar{\xi}} = 0$ fuori di γ_G, la analicità di Q ovunque segue da ben note considerazioni.

Siamo ora in grado di costruire il dominio M descritto nel § 1. Nella dimostrazione del Teorema I, sia S_0 una superficie prefissata, chiusa e di genere $g > 1$. Supponiamo che per ogni

$$(S_0^m, [f], S_0) = \tau \in T_g = T(S_0),$$

ω^μ, A^μ e G abbiano lo stesso significato di prima. Se scegliamo S_0 in guisa che $0, 1, \omega$ siano punti fissi, la parte del Teorema II relativa all'unicità mostra che A e G dipendono soltanto da τ e non dalla scelta particolare di m. Possiamo porre $G = G(\tau)$, $\gamma_G = \gamma(\tau)$, $I(\gamma_G) = D(\tau)$. Vale la 11), e $\sigma(t,\tau) = \omega^\mu(t)$. Il fatto che A^μ e σ dipendano olomorficamente da τ segue da un risultato provato in [3]: se μ dipende olomorficamente da parametri complessi, altrettanto accade per $\omega^{\mu}(z)$.

Concludiamo enunciando due problemi: Ogni gruppo quasi-funchsiano rappresenta una coppia? È possibile dimostrare il Teorema I «classicamente», cioè usando soltanto trasformazioni conformi?

BIBLIOGRAFIA

1. L. V. AHLFORS, Journ. d'Analyse Math., 3 (1945), pp. 1-58.
2. L. V. AHLFORS, Analytic functions, Princeton Univ. Press (1959), 45-66.
3. L. V. AHLFORS e L. BERS, In corso di stampa.
4. W. L. BAILY. In corso di stampa.
5. L. BERS, *Analytic functions*, Princeton Univ. Press, (1959), pp. 89-119.
6. L. BERS, Proc. Int. Congr. Math. Edinburg 1958, pp. 309-361.
7. L. BERS, Bull. Amer. Math Soc., 66 (1960), pp. 98-103.
8. L. BERS, ibid., pp. 94-97.
9. H. CARTAN, Lefschetz Volume, Princeton Univ. Press (1957), pp. 90-108.
10. K. KODAIRA e D. C. SPENCER, Ann. of Math., 70 (1959), pp. 145-166.
11. R. H. RAUCH, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 41 (1955), pp. 42-49.
12. R. RÖHRL, In corso di stampa.
13. O. TEICHMÜLLER, Preussische Akad., 22 (1940).
14. O. TEICHMÜLLER, Ibid. 4 (1943).
15. A. WEIL, Seminaire Bourbaki 1958 (No. 168).