ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANTONIO CHIFFI

Sulla esistenza degli integrali curvilinei. Applicazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 2 (1960), p. 195-205

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_2_195_0>

SULLA ESISTENZA DEGLI INTEGRALI CURVILINEI. APPLICAZIONI

ANTONIO CHIFFI (Pisa)

In un precedente lavoro (1) abbiamo dimostrato, nella ipotesi che F e G siano funzioni μ_e-quasi continue (vedi il seguente N. 1) e limitate in un insieme chiuso e limitato H del piano (x, y), che l'integrale:

$$\mathcal{I}_{F,G}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} F\,dx + G\,dy$$

è una funzione continua in ogni classe $\mathfrak{F}$ di curve continue e rettificabili $\mathcal{C}$ per le quali siano equi-assolutamente continui gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach (vedi il N. 1) ad esse associate.

Nel presente lavoro si dimostra l'esistenza e la continuità dell'integrale $\mathcal{I}_{F,G}(\mathcal{C})$ in più generali ipotesi (N. 2 e 3); in particolare nella ipotesi che F sia μ_e^1-quasi continua e G sia μ_e^2-quasi continua in H (per la definizione vedi il N. 1) ed entrambe limitate.

I precedenti risultati si rivelano utili per stabilire (N. 4) la validità della formula di Green nella ipotesi che F sia μ_e^1-quasi continua e G sia μ_e^2-quasi continua in $\bar{A} = A \cup FA$, anzichè entrambe μ_e-quasi continue, come precedentemente era stato fatto (2).

N. 1. — Definizioni preliminari.

Indichiamo con μ_e^1 [rispettivamente: μ_e^2] la *misura esterna* (3) definita nell'insieme $\mathfrak{L}$ degli insiemi limitati del piano (x,y) associando ad ogni

---

(1) A. CHIFFI: *Sulla continuità degli integrali curvilinei.* Rend. Sem. Mat. di Padova, vol. 29 (1959); pp. 411-430; prop. 2,5 a pag. 426.

(2) A. CHIFFI: *Sulla formula di Green nel piano.* Ricerche di Matematica, vol. IX (1960). pp. 3-19.

(3) Cfr. ad es., F. CAFIERO: *Misura e Integrazione.* Monografie Matematiche del CNR, n. 5; ed. Cremonese, Roma, 1959. Cap. IV, § 3, pag. 230 e sgg.

$I \in \mathfrak{I}$ il numero:

$$\mu_e^1(I) = mis_e(pr_1 I)$$

$$[\text{rispettivamente}: \mu_e^2(I) = mis_e(pr_2 I) \text{ ovvero}: \mu_e(I) = \mu_e^1(I) + \mu_e^2(I)]$$

dove con mis_e abbiamo indicato la misura esterna ordinaria e con $pr_1\, I$ e $pr_2\, I$ le proiezioni di I sull'asse delle x e sull'asse delle y rispettivamente.

Una funzione F reale, definita in un insieme chiuso e limitato H del piano (x, y) si dirà *μ_e^1-quasi continua* [rispettivamente: *μ_e^2-quasi continua;* ovvero: *μ_e-quasi continua*] in H quando ad ogni numero $\varepsilon > 0$ si può associare un insieme I aperto su H, di misura esterna μ_e^1 [rispett.: μ_e^2; ovvero: μ_e] minore di ε e tale che la restrizione di F ad $H - I$ sia continua [4]. Se F è μ_e-quasi continua è anche μ_e^1 e μ_1^2-quasi continua.

Sia f una funzione reale definita in un insieme I di numeri reali e sia J un sottoinsieme di I. Detta f_J la restrizione di f al sottoinsieme J di I, sia $N(t, f_J)$ la funzione reale che ad ogni t appartenente all'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali associa lo zero, il numero dei punti del sottoinsieme $\{x : f_J(x) = t\}$ di J oppure $+\infty$, a seconda che il sottoinsieme $\{x : f_J(x) = t\}$ sia vuoto, finito, oppure non finito.

Sia $\mathcal{C}$ una curva continua e rettificabile di equazioni parametriche:

$$x = f(s), \quad y = g(s), \qquad 0 \leq s \leq l \tag{1}$$

date in funzione dell'ascissa curvilinea s. Le funzioni $N(t, f)$ e $N(t, g)$ si dicono *funzioni di Banach* associate a $\mathcal{C}$.

Indicheremo con $T_\mathcal{C}$ l'applicazione continua di $[0, l]$ nel piano (x, y) che ad ogni punto $s \in [0, l]$ associa il punto di coordinate: $(f(s), g(s))$. Indicheremo con $\overset{-1}{T}_\mathcal{C}(I)$ l'immagine reciproca di un insieme I secondo $T_\mathcal{C}$.

N. 2. — Esistenza dell'integrale: $\mathcal{I}_{F,G}(\mathcal{C}) = \int_\mathcal{C} F\,dx + G\,dy$.

Si ha la proposizione seguente:

I. *Sia F [rispettivamente: G] una funzione reale, definita e limitata nell'insieme chiuso e limitato H del piano (x, y) e sia $\mathcal{C}$ una curva continua e*

---

(4) Cfr. G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto a una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.* Rend. Sem Matem. Padova, vol. 17 (1948), pp. 102-106; E. BAIADA: *Sulle funzioni continue rispetto alle variabili separatamente e gli integrali curvilinei.* Ibidem, pp. 201-218.

rettificabile contenuta in H, di equazioui parametriche (1); *fissato* $\sigma > 0$ *si possa in corrispondenza a questo determinare un insieme* I *aperto su* H, *tale che la restrizione di* F [*risp.* G] *ad* $H - I$ *risulti continua e tale che, posto:* $E = \overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(I)$ *si abbia:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_E)\, dt < \sigma \tag{2}$$

$$\left[\textit{rispett.} \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_E)\, dt < \sigma \right]. \tag{3}$$

In tali ipotesi la funzione:

$$\Phi(s) = F[f(s), g(s)] f'(s)$$

$$[\textit{rispett.}\ \Psi(s) = G[f(s), g(s)]\, g'(s)]$$

risulta misurabile e limitata in $[0, l]$ *e conseguentemente ha senso l'integrale:*

$$\mathcal{I}_F^1(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} F\, dx = \int_0^l \Phi(s)\, ds \tag{4}$$

$$\left[\textit{rispettivamente:}\ \mathcal{I}_F^2(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} G\, dy = \int_0^l \Psi(s)\, ds \right]. \tag{5}$$

Sia $(\sigma_n)_{n \in N}$ una successione di numeri maggiori di zero, non crescente e convergente a zero. Ad ognuno di essi si potrà associare, a norma delle ipotesi fatte, un insieme I_n aperto su H, tale che la restrizione di F a $H - I_n$ risulti continua e tale che per esso valga la (2). Gli insiemi I_n si possono scegliere in modo tale che la successione (I_n) risulti non crescente. L'insieme $E_n = \overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(I_n)$ è un insieme di Borel e, per una proposizione già nota [5], si ha:

$$V_f(E_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_{E_n})\, dt < \sigma_n \tag{6}$$

---

[5] Loc. cit. [1], prop. 1,5 a pag. 414.

dove si è indicata con $V_f(E_n)$ la variazione totale di f su E_n. Posto: $E = \bigcap_{n \in N} E_n$ si ha, per l'assoluta continuità della f e per la (6):

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} |f'(s)|\, ds = \int_E |f'(s)|\, ds = 0 . \tag{7}$$

Da ciò segue che $f'(s)$ e, di conseguenza $\Phi(s)$, sono nulle quasi ovunque in E. La restrizione della funzione $F[f(s), g(s)]$ all'insieme chiuso $[0, l] - E_n$ è continua; pertanto la funzione $\Phi_n(s)$ così definita:

$$\Phi_n(s) = \begin{cases} \Phi(s) & \text{per } s \in [0, l] - E_n \\ 0 & \text{per } s \in E_n \end{cases}$$

è misurabile in $[0, l]$. Si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(s) = \begin{cases} \Phi(s) & \text{per } s \in [0, l] - E \\ 0 & \text{per } s \in E . \end{cases}$$

La funzione Φ è quasi ovunque nulla in E e pertanto essa risulta misurabile in $[0, l]$ perchè limite quasi ovunque di funzioni misurabili (6). Inoltre Φ è limitata, perchè lo sono F e $f'(s)$.

Scambiando poi l'ufficio delle variabili si dimostra l'altra parte della proposizione.

II. *Se* F [*rispettivamente* G] *è una funzione* μ_e^1-*quasi continua* [*risp.* μ_e^2-*quasi continua*] *e limitata in* H *e* $\mathcal{C}$ *è una curva continua, di equazioni parametriche* (1), *rettificabile e contenuta in* H, *risulta verificata la condizione espressa dalla* (2) [*risp. dalla* (3)] *e conseguentemente ha senso l'integrale* (4) [*risp.* (5)] (7).

Fissato $\sigma > 0$ ad arbitrio si potrà determinare (8) un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni insieme misurabile D di misura minore di ε si abbia:

$$\int_D N(t, f)\, dt < \sigma . \tag{8}$$

---

(6) Cfr., ad es., F. CAFIERO, loc. cit. (3), cap. IV, § 1, prop. 15 a pag. 293.

(7) Cfr. sull'argomento E. BAIADA: loc. cit. (4) a pag. 211 e: J. CECCONI: *Un complemento al teorema di Stokes.* Rend. Sem. Mat. di Padova, vol. 22 (1953), pp. 23-37; n. 8 a pag. 30.

(8) Cfr. S. BANACH: *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie.* Fundamenta Mathematicae, vol. 7 (1925), pp. 225-236; théor. 2 a pag. 228.

Sia I un insieme aperto su H, di misura esterna μ_e^1 minore di ε e tale che la restrizione di F a $H - I$ risulti continua e sia D_1 un insieme lineare aperto contenente la proiezione di I sull'asse delle x e avente misura minore di ε. Posto: $E = \overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(I)$ e: $E_1 = \overset{-1}{f}(D_1)$, dalla relazione di inclusione: $E \subseteq E_1$, segue:

$$\int_{D_1} N(t, f)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_{E_1})\, dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_E)\, dt$$

e risulta verificata per la (8) la condizione espressa dalla (2).

Scambiando poi l'ufficio delle variabili x e y si dimostra l'altra parte della proposizione. È evidente che la proposizione II sussiste se F e G si suppongono μ_e-quasi continue.

Diremo che la curva $\mathcal{C}$, assegnata mediante le sue equazioni parametriche in funzione di un parametro u:

$$(9) \qquad x = f_1(u), \quad y = g_1(u), \quad a \leq u \leq b,$$

è *semirettificabile* se le funzioni f_1 e g_1 sono continue in $[a, b]$ e soltanto la funzione f_1 a variazione limitata.

III. *Sia $\mathcal{C}$ una curva continua e semirettificabile, contenuta nell'insieme chiuso e limitato H. Sia F [risp. G] una funzione reale, definita e limitata in H; fissato $\sigma > 0$ si possa in corrispondenza determinare un insieme I aperto su H, tale che la restrizione di F [risp. G] ad $H - I$ sia continua e tale che, posto: $E = \overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(I)$ si abbia:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_{1E})\, dt < \sigma$$

$$\left[risp: \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, g_{1E})\, dt < \sigma \right].$$

In tali ipotesi la funzione di u: $\Phi_1(u) = F[f_1(u), g_1(u)] f_1'(u)$ [risp.: $\Psi_1(u) = G[f_1(u), g_1(u)] g_1'(u)$] risulta sommabile in $[a, b]$. In particolare le precedenti ipotesi sono verificate se $\mathcal{C}$ è continua e semirettificabile e F μ_e^1-quasi continua [risp.: G μ_e^2-quasi continua] e limitata; oppure μ_e-quasi continua e limitata in H.

Si possono ripetere le dimostrazioni delle proposizioni I e II, sostituendo f_1 al posto di f e tenendo conto della sommabilità di f_1' ed anche, per ottenere l'analoga della (7), della disuguaglianza:

$$V_{f_1}(E_n) \geq \int_{E_n} |f_1'| \, du .$$

La $\Phi_1(u)$ risulta poi sommabile perchè la F è limitata e f_1' è sommabile.

Scambiando al solito l'ufficio delle variabili x e y si dimostra l'altra parte della proposizione.

IV. *Sia* $\mathcal{C}$ *una curva continua e rettificabile, contenuta in* H, *assegnata mediante le equazioni parametriche* (9) *e siano le* (1) *le sue equazioni parametriche assegnate in funzione della ascissa curvilinea. Se le funzioni* f_1 *e* g_1 *sono assolutamente continue, se* F [*risp.* G] *è una funzione definita in* H *e se la funzione:* $F[f_1(u), g_1(u)]$ [*risp.* $G[f_1(u), g_1(u)]$ *risulta misurabile e limitata in* $[a, b]$, *è:*

$$\int_0^l F[f(s), g(s)] f'(s) \, ds = \int_a^b F[f_1(u), g_1(u)] f_1'(u) \, du . \tag{10}$$

$$\left[risp. : \int_0^l G[f(s), g(s)] g'(s) \, ds = \int_a^b G[f_1(u), g_1(u)] g_1'(u) \, du \right] .$$

La funzione $s(u)$, che per ogni $u \in [a, b]$ dà la lunghezza dell'arco di $\mathcal{C}$ corrispondente per le (9) all'intervallo $[a, u]$, è assolutamente continua e pertanto si può applicare nel primo membro della (10) il teorema di integrazione per sostituzione, ottenendo:

$$\int_a^b F[f_1(u), g_1(u)] \frac{d f[s(u)]}{ds} s'(u) \, du ,$$

e immediatamente la (10). Scambiaudo x con y si ha l'altra parte della proposizione.

N. 3. — Continuità di $\mathcal{I}_F$.

V. *Sia* F [*rispettivamente:* G] *definita e limitata nell'insieme chiuso e limitato* H *e sia* $\mathfrak{F}$ *una famiglia di curve* $\mathcal{C}$ *contenute in* H, *continue, rettifi-*

cabili e aventi lunghezza egualmente limitata: fissato $\sigma > 0$ si possa in corrispondenza a questo determinare un insieme I aperto su H, tale che la restrizione di F [risp. G] a $H - I$ sia continua e tale che, posto:

$$E = \overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(I),$$

si abbia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_E)\, dt < \sigma \tag{11}$$

$$\left[\textit{rispettivamente}: \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, g_E)\, dt < \sigma \right]$$

uniformemente per $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$. Allora la funzione $\mathcal{I}^1_F$ [rispett.: $\mathcal{I}^2_G$] è continua [9] *in $\mathfrak{F}$.*

Fissato $\sigma > 0$, sia I l'insieme per il quale, a norma delle ipotesi fatte, è verificata la (11). Detto M l'estremo superiore di $|F(x, y)|$ per $(x, y) \in H$, sia $\bar{F}$ una funzione continua in H, avente restrizione a $H - I$ uguale alla restrizione di F a $H - I$ e tale che sia: $|\bar{F}(x, y)| \leq M$ per $(x, y) \in H$. La funzione $\mathcal{I}_{\bar{F}}$ è continua [10] in $\mathfrak{F}$ e pertanto per ogni curva $\mathcal{C}_0 \in \mathfrak{F}$ di equazioni parametriche:

$$x = f_0(s_0), y = g_0(s_0), \qquad 0 \leq s_0 \leq l_0$$

si può determinare un $\varrho_0 > 0$ in guisa tale che risulti:

$$|\mathcal{I}_{\bar{F}}(\mathcal{C}) - \mathcal{I}_{\bar{F}}(\mathcal{C}_0)| < \sigma$$

per ogni curva $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ che abbia distanza secondo Fréchet minore di ϱ_0 da $\mathcal{C}_0$. Si ha poi:

$$|\mathcal{I}_F(\mathcal{C}) - \mathcal{I}_F(\mathcal{C}_0)| \leq |\mathcal{I}_F(\mathcal{C}) - \mathcal{I}_{\bar{F}}(\mathcal{C})| +$$

$$+ |\mathcal{I}_{\bar{F}}(\mathcal{C}) - \mathcal{I}_{\bar{F}}(\mathcal{C}_0)| + |\mathcal{I}_{\bar{F}}(\mathcal{C}_0) - \mathcal{I}_F(\mathcal{C}_0)|$$

---

[9] La funzione $\mathcal{I}_F$ risulta *continua* nel senso che, considerata una curva $\mathcal{C}_0 \in \mathfrak{F}$ e fissato un $\sigma > 0$, si può determinare un $\varrho > 0$ tale che per ogni curva $\mathcal{C}$ avente da $\mathcal{C}_0$ distanza secondo Fréchet minore di ϱ si abbia: $|\mathcal{I}_F(\mathcal{C}) - \mathcal{I}_F(\mathcal{C}_0)| < \sigma$.

[10] Cfr. L. Tonelli: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Zanichelli, Bologna, (1921); vol. I, cap. VII, n. 108; a pag. 293.

ed anche, con evidente significato dei simboli:

$$| \mathcal{I}_F(\mathcal{C}) - \mathcal{I}_{\bar F}(\mathcal{C}) | = \left| \int_E \{F(f, g) - \bar F(f, g)\} f' \, ds \right| \leq$$

$$\leq 2M \int_E |f'| \, ds = 2M \, V_f(E) = 2M \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_E) \, dt .$$

In modo analogo si ha:

$$| \mathcal{I}_F(\mathcal{C}_0) - \mathcal{I}_{\bar F}(\mathcal{C}_0) | \leq 2M \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_{0\,E}) \, dt .$$

Si ha infine, per la (11) e le precedenti disuguaglianze:

$$| \mathcal{I}_F(\mathcal{C}) - \mathcal{I}_F(\mathcal{C}_0) | < \sigma (4M + 1),$$

che esprime quanto si voleva dimostrare.

Scambiando tra loro x e y si dimostra l'altra parte della proposizione.

VI. *Sia F [risp. G) una funzione μ_e^1-quasi continua [risp. μ_e^2-quasi continua] e limitata in H e sia $\mathfrak{F}$ una classe di curve $\mathcal{C}$ contenute in H, continue, rettificabili e di lunghezza egualmente limitata. Se gli integrali indefiniti delle funzioni $N(t, f)$ [risp. $N(t, g)$] sono equi-assolutamente continui è verificata la condizione espressa dalla* (11).

Fissato $\sigma > 0$ ad arbitrio si potrà determinare un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni insieme misurabile D di misura minore di ε si abbia:

$$\int_D N(t, f) \, dt < \sigma . \tag{12}$$

Sia A un insieme aperto su H, di misura esterna μ_e^1 minore di ε e tale che la restrizione di F ad $H - I$ risulti continua e sia A_1 un insieme lineare aperto contenente la proiezione di A sull'asse delle x e avente misura minore di ε. Detto I il prodotto cartesiano di A_1 e dell'asse delle y risulta subito verificata per la (12) la condizione espressa dalla (11). Scambiando al solito la x con la y si dimostra l'altra parte della proposizione [11].

---

[11] La tesi della presente proposizione sussiste se F è μ_e^1-quasi continua [rispettiva-

VII. *Sia F μ_e^1-quasi continua [risp. G μ_e^2-quasi continua] e limitata in H. Se la successione di curve $(\mathcal{C}_n)_{n\in N}$ converge in lunghezza alla curva $\mathcal{C}$, si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_F^1(\mathcal{C}_n) = \mathcal{I}_F^1(\mathcal{C}); \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_G^2(\mathcal{C}_n) = \mathcal{I}_G^2(\mathcal{C}).$$

La dimostrazione si fa in modo eguale all'analoga proposizione 2,7 del lavoro già richiamato [12], sfruttando la prop. VI anzichè la 2,5.

N. 4. — Applicazioni.

Indichiamo con $N_x(t, FA)$ e $N_y(t, FA)$ le due funzioni reali che esprimono, per ogni t reale, il numero (finito, nullo o infinito) dei punti di intersezione dell'insieme FA con le rette $x = t$ e $y = t$ rispettivamente. Indichiamo con $\bar{A}$ l'unione dell'insieme A e della sua frontiera. In un precedente lavoro abbiamo dimostrato che [13]:

VIII. *Sia A un insieme aperto del piano (x, y) non vuoto, limitato e semplicemente connesso e supponiamo che le funzioni $N_x(t, FA)$ e $N_y(t, FA)$ siano sommabili nell'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali; siano F e G funzioni definite in $\bar{A}$ ivi limitate e μ_e-quasi continue; esse soddisfino inoltre ad ipotesi atte ad assicurare la validità della formula di Green:*

$$\int_{FR} F\,dx + G\,dy = \iint_R (G'_x - F'_y)\,dx\,dy$$

per ogni rettangolo R interno a A; la funzione: $G'_x - F'_y$ esista finita quasi ovunque in A e sia ivi sommabile. Per ogni curva $\mathcal{C}$ che sia bordo orientato

---

mente: se G e μ_e^2-quasi continua] e limitata in H e, fissato $\sigma > 0$ ad arbitrio, si può determinare un insieme A aperto su H, tale che la restrizione di F a $H - A$ sia continua e tale che per ogni $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ si abbia:

$$\int_{A_1} N(t, f)\,dt < \sigma \quad \left[\text{risp}: \int_{A_1} N(t, g)\,dt < \sigma\right]$$

dove A_1 è un insieme lineare aperto contenente la proiezione di A sull'asse delle x [risp.: delle y].

[12] Loc. cit. [1], a pag. 420.

[13] Loc. cit. [2], prop. 2.I a pag. 14.

di A ha luogo la formula di Green:

$$\int_{\mathcal{C}} F\,dx + G\,dy = \iint_A (G'_x - F'_y)\,dx\,dy\,. \tag{13}$$

Le considerazioni che abbiamo svolto permettono di precisare, lasciandone inalterate le dimostrazioni, questa ed altre proposizioni del richiamato lavoro ([14]), nel modo seguente:

IX. *Se F e G, anzichè μ_e-quasi continue, si suppongono rispettivamente μ_e^1- e μ_e^2-quasi continue in $\bar{A}$ e se F e G soddisfano in A alle altre ipotesi precisate nella precedente proposizione* VIII, *ha luogo la* (13).

X. *Sia $\mathcal{C}$ una curva continua, chiusa, rettificabile e semplice e A l'insieme dei punti ad essa interni. Se F e G, anzichè μ_e-quasi continue, si suppongono rispettivamente μ_e^1 e μ_e^2-quasi continue in $\bar{A}$ e se F e G soddisfano in A alle altre ipotesi precisate nella prop.* VIII, *ha luogo la* (11).

XI. *Sia $\mathcal{C}$ una curva continua, chiusa e rettificabile e A l'unione delle componenti connesse e limitate dell'insieme dei punti del piano che non appartengono a $\mathcal{C}$. Se F e G, anzichè μ_e-quasi continue, si suppongono rispettivamente μ_e^1 e μ_e^2-quasi continue in $\bar{A}$ e F e G soddisfano in A alle altre ipotesi precisate nella proposizione* VIII, *esiste una famiglia finita o numerabile di curve continue, chiuse e rettificabili: $(\mathcal{C})_{n\in N}$ per le quali è:*

$$\sum_i \int_{\mathcal{C}_i} F\,dx + G\,dy = \iint_A (G'_x - F'_y)\,dx\,dy\,.$$

OSSERVAZIONE. Una funzione F, pur soddisfacendo alle ipotesi indicate nelle precedenti proposizioni IX - XI, può non risultare μ_e-quasi continua. Infatti la validità della formula di Green:

$$\int_{FR} F\,dx = -\iint_R F'_y\,dx\,dy$$

per ogni rettangolo R contenuto in A è assicurata, ad esempio, se F è assolutamente continua, considerata come funzione di y, in ogni insieme chiuso contenuto in A_x (intersezione di A con la retta i cui punti hanno ascissa uguale a x) per quasi ogni x e se la derivata F'_y è sommabile in A. Una tale funzione può risultare μ_e^1-quasi continua in A senza essere μ_e-quasi continua.

([14]) Loc. cit. ([2]), prop. 2.II e 2.III a pag. 17.

Questa ultima affermazione si può precisare osservando che: *se F è definita nell'unione $\bar{A}$ di un insieme aperto e limitato A e della sua frontiera ed è continua in $(\bar{A})_x$ per quasi ogni x e misurabile in A_y per quasi ogni y; se A è tale che l'insieme $(\bar{A})_x$ è costituito, per quasi ogni x, da un numero finito di intervalli non degeneri i punti interni dei quali sono tutti punti di A; allora la funzione F risulta μ_e^1-quasi continua in $\bar{A}$.*

Sia Q un quadrato a lati paralleli agli assi contenente $\bar{A}$ e sia $(R_n)_{n\in N}$ una successione non decrescente di plurirettangoli chiusi contenuti in A, tale che: $\lim_{n\to\infty} R_n = A$ e tale che sui lati di R_n paralleli all'asse delle x la F sia misurabile. Costruiamo la successione di funzioni (F_n) definite in Q nel modo seguente: F_n sia uguale a zero sulle rette parallele all'asse y non intersecanti R_n; sulle rette parallele all'asse delle y intersecanti R_n si definisca nel modo seguente: sugli intervalli che cadono in R_n sia uguale a F; sugli intervalli che non cadono in R_n, ma i cui estremi si trovano su R_n, sia lineare e uguale a F negli estremi; sugli intervalli che hanno un solo estremo su R_n si definisca costantemente uguale al valore di F in quell'estremo. La funzione F_n così definita è continua in Q_x per quasi ogni x e si verifica che è misurabile in Q_y per quasi ogni y. La funzione $F_0 = \lim_n F_n$ è uguale a F in ogni intervallo di $(\bar{A})_x$ i cui punti interni siano punti di A e pertanto, per le ipotesi fatte su A, è uguale a F in $(\bar{A})_x$ per quasi ogni x. Inoltre F_0 risulta misurabile in Q_y per quasi ogni y, e, sempre per le ipotesi fatte su A, continua in Q_x per quasi ogni x. Pertanto F_0 è μ_e^1-quasi continua in Q e la sua restrizione a A ivi μ_e^1-quasi continua. L'asserto risulta così dimostrato. *Le ipotesi fatte su A sono certamente verificate se A è l'insieme dei punti interni ad una curva $\mathcal{C}$ continua, rettificabile e semplice* (ipotesi della prop. X). Per quasi ogni x infatti le rette i cui punti hanno ascissa uguale a x incontrano la curva $\mathcal{C}$ in un numero finito di punti in ognuno dei quali la derivata $f'(s)$ esiste ed è diversa da zero ([15]). In un intorno di ognuno di tali punti la curva ammette una rappresentazione del tipo: $y = \varphi(x)$ e ciò esclude che si tratti di punti isolati dell'insieme $(\bar{A})_x$.

([15]) Cfr. loc. cit. ([1]), prop. 1,7 a pag. 416.