

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

M. BERGER

Les variétés riemanniennes $(1/4)$ -pincées

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 14,
n° 2 (1960), p. 161-170

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_2_161_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES VARIETES RIEMANNIENNES (1/4)-PINCEES.

M. BERGER (Strasbourg)

1. Introduction.

Une variété riemannienne V est dite δ -pincée si sa courbure μ vérifie $\delta \leq \rho(\mu) \leq 1$ pour tout plan tangent μ à V . Il est classique que dans le cas $\delta = 1$, c'est à dire celui où V est à courbure constante, V est localement isométrique à la sphère $S_{\dim V}(1)$ de dimension égale à celle de V et de courbure constante 1. D'autre part, les espaces projectifs complexes, quaternioniens et le plan projectif des octaves de Cayley, munis de leur métrique canonique d'espace symétrique, sont exactement (1/4)-pincés; les sphères et ces espaces projectifs constituent la classe des espaces symétriques compacts simplement connexes et à courbure strictement positive. Dans cet article, nous démontrons d'abord le :

THÉORÈME 1. — *Soit V une variété riemannienne compacte simplement connexe de dimension paire. Si V est δ -pincée avec $\delta > 1/4$, alors V est homéomorphe à la sphère $S_{\dim V}$.*

La restriction sur la dimension provient uniquement de ce que la démonstration utilise essentiellement un théorème de Klingenberg (théorème 3 ci-dessous) qui n'est valable qu'en dimension paire. Dans deux articles antérieurs ([2], [3]), ces variétés étaient étudiées à l'aide la théorie de Morse; on pouvait alors seulement montrer que V avait même homologie entière que $S_{\dim V}$.

Le cas $\delta = 1/4$ peut être aussi traité complètement; on est conduit au résultat de classification et de rigidité suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit V une variété riemannienne compacte simplement connexe de dimension paire. Si V n'est pas homéomorphe à $S_{\dim V}$ et est (1/4)-pincée, alors V est un espace symétrique, muni de sa métrique canonique.*

La démonstration des théorèmes 1 et 2 a été résumée dans une note aux Comptes-Rendus : [1].

2. Définitions et notations.

Ce sont celles de [2] et [3] que nous résumons brièvement. La variété V sera toujours supposée indéfiniment différentiable ; $T(V)$ (resp. T_p) désignera l'espace des vecteurs de V (resp. vecteurs de V d'origine $p \in V$). Par $\| \cdot \|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on désignera la norme définissant la structure riemannienne considérée et le produit scalaire associé. Pour tout point p de V , on notera $R(X, Y)$ la forme bilinéaire antisymétrique définie sur T_p à valeurs dans les endomorphismes de T_p , qui est définie par le tenseur de courbure de la structure riemannienne considérée. On note $P(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 2 des T_p (p parcourant V). Si $\mu \in P(V)$ et si X, Y sont deux vecteurs de T_p qui engendrent μ , on appelle courbure de V dans μ le nombre réel :

$$\varrho(\mu) = \varrho(X, Y) = - \langle R(X, Y)X, Y \rangle (\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2)^{-1}.$$

Soit δ un nombre réel ; la variété riemannienne V est dite δ -pincée s'il existe un nombre réel positif Δ tel que l'on ait :

$$\delta \Delta \leq \varrho(\mu) \leq \Delta \text{ pour tout } \mu \in P(V).$$

Dans toute la suite, on supposera, ce qui n'est pas une restriction, avoir normé la structure riemannienne de V de façon que l'on ait $\Delta = 1$, c'est à dire $\delta \leq \varrho(\mu) \leq 1$ quel que soit $\mu \in P(V)$. Si V est δ -pincée avec $\delta > 0$, on dit encore que V est à courbure strictement positive.

Si p, q sont deux points de V , on notera $d(p, q)$ la distance de p à q dans la structure d'espace métrique sur V canoniquement associée à la structure riemannienne donnée sur V . Si la variété V est compacte, on notera $\bar{d}(V)$ son diamètre, c'est à dire la borne supérieure des $d(p, q)$ lorsque p et q parcourent V . Les géodésiques de V seront toujours supposées paramétrées par la longueur de l'arc à partir de l'origine ; si $\Gamma = \{\gamma(s)\}$ ($0 \leq s \leq l$) est une géodésique ainsi paramétrée, on notera $\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}$ son vecteur tangent en $\gamma(s)$, et l'on aura donc $\|\gamma'(s)\| = 1$ quel que soit s , tandis que l sera égale à la longueur de Γ . Par $\| \| p, q \| \|$ on désignera l'ensemble des géodésiques d'extrémités p, q et dont la longueur est égale à $d(p, q)$; le théorème classique de Hopf-Rinow assure que si V est topologiquement complète, l'ensemble $\| \| p, q \| \|$ n'est jamais vide. Ce sera ici toujours le cas car toutes les variétés riemanniennes V considérées seront compactes. Rap-

pelons le résultat classique : le diamètre d'une variété riemannienne compacte δ -pincée, si $\delta > 0$, vérifie $d(V) \leq \pi\delta^{-(1/2)}$.

3. Rappel des résultats utilisés.

La démonstration des théorèmes 1 et 2 utilise essentiellement, d'une part les :

THÉORÈME 3. — (Klingenberg : [4], théorème 1, p. 655). — Soit V une variété riemannienne compacte simplement connexe de dimension paire et à courbure strictement positive. Soient p, q deux points de V tels que $d(p, q) < \pi$; alors l'ensemble $\| \| p, q \| \|$ a un élément et un seul; en particulier : $d(V) \geq \pi$.

THÉORÈME 4. — (Klingenberg : [4], p. 664-666). — Soit V une variété riemannienne vérifiant les deux conditions suivantes : a) — quels que soient les deux points r, s de V vérifiant $d(r, s) < \pi$, l'ensemble $\| \| r, s \| \|$ a un élément et un seul; b) — il existe deux points p et q de V tels que, quel que soit $r \in V$, on a : $d(r, p) < \pi$ ou $d(r, q) < \pi$. Alors V est homéomorphe à $S_{dim V}$.

D'autre part, le théorème de comparaison de Rauch pour une variété δ -pincée (théorème 6 de [2], p. 96) et l'amélioration globale suivante, due à Toponogov :

THÉORÈME 5. — (Toponogov : [6], théorème 1, p. 719). — Soient V une variété riemannienne compacte δ -pincée avec $\delta > 0$, p, q, r trois points et $\Gamma = \{\gamma(s)\}$, $\Lambda = \{\lambda(s)\}$ deux géodésiques de V telles que : $\Gamma \in \| \| p, q \| \|$, $\Lambda \in \| \| p, r \| \|$, $\lambda(0) = \gamma(0) = p$. Désignons par $S_2(\delta)$ la sphère à deux dimensions et de courbure constante δ et par $\widehat{p}, \widehat{q}, \widehat{r}$ un triangle de $S_2(\delta)$ tel que les longueurs $\widehat{d}(\widehat{p}, \widehat{q}), \widehat{d}(\widehat{p}, \widehat{r})$ de ses deux côtés $\widehat{p}\widehat{q}$ et $\widehat{p}\widehat{r}$ vérifient $\widehat{d}(\widehat{p}, \widehat{q}) = d(p, q)$, $\widehat{d}(\widehat{p}, \widehat{r}) = d(p, r)$ et que l'angle $\widehat{\alpha}$ en \widehat{p} vérifie $\cos \widehat{\alpha} = \langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle$. Alors, si $\widehat{d}(\widehat{q}, \widehat{r})$ désigne la longueur du troisième côté du triangle $\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}$ de $S_2(\delta)$, on a l'inégalité : $d(q, r) \leq \widehat{d}(\widehat{q}, \widehat{r})$.

Les notations étant celles de l'énoncé du théorème 5, on en déduit les :

COROLLAIRE 1. — Si $\delta > 1/4$, $d(p, q) \geq \pi$, $d(p, r) \geq \pi$, $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle \geq 0$, on a alors : $d(q, r) < \pi$.

COROLLAIRE 2. — Si $\delta = 1/4$, $d(p, q) > \pi$, $d(p, r) > \pi$ (resp. $d(p, r) = \pi$), $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle \geq 0$, on a alors : $d(q, r) < \pi$ (resp. $d(q, r) \leq \pi$).

Les corollaires 1 et 2 résultent de calculs directs de géométrie sphérique. Dans le cas $\delta = 0$, l'analogue du théorème 5 est une comparaison avec le plan euclidien R^2 , que l'on peut énoncer sous la forme :

THÉORÈME 6. — (Toponogovov: [5], p. 674). — *Quels que soient les trois points p, q, r de la variété V à courbure positive ou nulle et les géodésiques $\Gamma = \{\gamma(s), \Lambda = \{\lambda(s)\}$ telles que $\Gamma \in \|\| p, q \|\|, \Lambda \in \|\| p, r \|\|, \lambda(0) = \gamma(0) = p$, on a l'inégalité:*

$$d(q, r)^2 \leq d(p, q)^2 + d(p, r)^2 - 2d(p, q)d(p, r)\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle.$$

4. Réalisation du diamètre de V .

La démonstration des théorèmes 1 et 2 repose sur l'utilisation d'un couple de points p, q de V , tel que $d(p, q) = d(V)$. Pour un tel couple, on a le :

LEMME 1. — *Soient p, q deux points d'une variété riemannienne compacte V , à courbure positive, tels que $d(p, q) = d(V)$. Alors, quel que soit $X \in T_p$, il existe une géodésique $\Lambda = \{\lambda(s)\}$ telle que : $\Lambda \in \|\| p, q \|\|, \lambda(0) = p, \langle \lambda'(0), X \rangle \geq 0$.*

Soit donné un vecteur unitaire $X \in T_p$; fixons une géodésique $\Gamma = \{\gamma(s)\}$ ($s \geq 0$) telle que : $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = X$. Pour tout $s > 0$, choisissons une géodésique $\Lambda(s) = \{\lambda(t, s)\}$ ($0 \leq t \leq d(q, \gamma(s)), s > 0$) telle que : $\Lambda(s) \in \|\| \gamma(s), q \|\|, \lambda(0, s) = \gamma(s)$. D'après le théorème 6, on a :

$$d(p, q)^2 \leq d(p, \gamma(s))^2 + d(q, \gamma(s))^2 + 2d(p, \gamma(s))d(q, \gamma(s))\langle \gamma'(s), \lambda'_t(0, s) \rangle.$$

Mais, par hypothèse : $d(p, q) = d(V) \geq d(q, \gamma(s))$ quel que soit s . On a donc, puisque $d(p, \gamma(s)) = s$:

$$s + 2d(q, \gamma(s))\langle \gamma'(s), \lambda'_t(0, s) \rangle \geq 0 \quad \text{quel que soit } s > 0.$$

De l'ensemble des géodésiques $\Lambda(s)$ ($s > 0$), on peut extraire une suite $\Lambda(s(n))$ ($s(n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$) convergeant vers une géodésique $\Lambda = \{\lambda(t)\}$; on a $\Lambda \in \|\| p, q \|\|, \lambda(0) = p$ et $\langle \lambda'(0), X \rangle = \lim \langle \lambda'_t(0, s), \gamma'(s) \rangle$ ($n \rightarrow \infty$). Pour s assez voisin de 0, on a $d(q, \gamma(s)) > 0$, d'où $\langle \gamma'(s), \lambda'_t(0, s) \rangle \geq -s(d(q, \gamma(s)))$. Et, lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\langle \lambda'(0), X \rangle = \lim \langle \gamma'(s), \lambda'_t(0, s) \rangle \geq \lim (-s(d(q, \gamma(s)))) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Démonstration du théorème 1.

LEMME 2. — *Soit V une variété riemannienne compacte δ -pincée, telle que $\delta > 1/4$ et $d(V) \geq \pi$; soient p, q deux points de V tels que $d(p, q) = d(V)$. Alors, quel que soit $r \in V$, on a : $d(r, p) < \pi$ ou $d(r, q) < \pi$.*

Soit $\Gamma = \{\gamma(s)\}$ une géodésique de V telle que : $\Gamma \in \|\| p, r \|\|$, $\gamma(0) = p$. D'après le lemme 1, il existe une géodésique $\Lambda = \{\lambda(s)\}$ telle que : $\Lambda \in \|\| p, q \|\|$, $\lambda(0) = p$, $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle \geq 0$. Si $d(r, p) < \pi$, le lemme est démontré; si $d(r, p) \geq \pi$, comme $d(p, q) = d(V) \geq \pi$, le corollaire 1 du théorème 5 montre que $d(r, q) < \pi$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour démontrer le théorème 1, il suffit maintenant de choisir deux points p, q de V tels que $d(p, q) = d(V)$. La réunion du théorème 3, du lemme 2 et du théorème 4 entraîne alors que V est homéomorphe à $S_{\dim V}$.

6. Quelques lemmes.

La démonstration du théorème 2 se décompose en deux parties : dans la première, on montre que si $d(V) > \pi$, la variété V est encore homéomorphe à $S_{\dim V}$. Dans la deuxième, on montre que $d(V) = \pi$ entraîne que V est un espace symétrique muni de sa métrique canonique. La démonstration de la première partie est analogue à la démonstration du théorème 1 mais nécessite les quelques lemmes ci-dessous.

LEMME 3. — Soit V une variété riemannienne compacte simplement connexe de dimension paire, telle que : $0 < \rho(\mu) \leq 1$ quel que soit $\mu \in P(V)$. Soient p, q deux points de V tels que $d(p, q) = \pi$ et $\Theta = \{\theta(s)\}$, $\Theta_1 = \{\theta_1(s)\}$ deux géodésiques de V telles que : $\Theta \in \|\| p, q \|\|$, $\Theta_1 \in \|\| p, q \|\|$, $\theta(0) = \theta_1(0) = p$, $-1 < \langle \theta'(0), \theta_1'(0) \rangle < 1$. Alors : $\rho(\theta'(0), \theta_1'(0)) = 1$. En outre, désignons par $\Theta(k, h) = \{\theta(s; k, h)\}$ ($0 \leq s < \infty$) la géodésique de V définie par : $\theta(0; k, h) = p$ et $\theta'_s(0; k, h) = (k\theta'(0) + h\theta_1'(0)) / (\|k\theta'(0) + h\theta_1'(0)\|)^{-1}$. Alors, on a : $\theta(\pi; k, h) = q$ quel que soit $k \geq 0, h \geq 0$.

Posons $\theta(\pi/2) = r$, $\theta_1(\pi/2) = s$; la condition $\langle \theta'(0), \theta_1'(0) \rangle < 1$ assure que Θ, Θ_1 sont distinctes, ce qui, d'après le théorème 3, entraîne $r \neq s$. La condition $\langle \theta'(0), \theta_1'(0) \rangle > -1$ assure que l'angle de Θ et Θ_1 en p n'est pas un angle plat; un résultat classique de géométrie riemannienne dit que l'on a alors, pour tout $x \in \Theta_1$, l'inégalité stricte : $d(r, x) < d(r, p) + d(p, x)$. Si l'on prend x sur Θ_1 entre p et s , on aura $d(p, x) \leq \pi/2$, donc $d(r, x) < \pi$. D'après le lemme 2 de [3], l'angle de Θ et Θ_1 en q ne peut pas être plat. On a donc aussi $d(r, x) < \pi$ si le point x est sur Θ_1 entre s et q . Finalement : $d(r, x) < \pi$ quel que soit $x \in \Theta_1$.

Soit B la boule ouverte de T_r définie par : $B = \{X \in T_r / \|X\| < \pi\}$. Les hypothèses du lemme permettent d'appliquer le théorème 3, qui entraîne que l'application exponentielle $\exp(r) : B \rightarrow V$, qui est toujours différentiable, est alors de plus bijective. On vient de voir que $\Theta_1 \subset \exp(r)(B)$; il existe donc une famille $\Omega(t) = \{\omega(s, t)\}$ ($0 \leq s \leq d(r, \theta_1(t)), 0 \leq t \leq \pi$) de géodésiques de V , famille qui est différentiable et telle que : $\Omega(t) \in \|\| r, \theta_1(t) \|\|$, $\omega(0, t) = r$

quel que soit t . Le théorème 6 de [2] affirme que la courbe lieu des extrémités des $\Omega(t)$ (courbe qui n'est autre que Θ_1 par construction) est de longueur supérieure ou égale à celle de la courbe obtenue dans la sphère $S_{\dim V}(1)$ (de même dimension que V et courbure constante 1) par la correspondance explicitée dans [2], p. 96. Mais les points p, q de $S_{\dim V}(1)$ qui correspondent à p, q sont deux antipodes de $S_{\dim V}(1)$; leur distance dans $S_{\dim V}(1)$ est donc π ; d'où: $\text{long}(\Theta_1) \geq \pi$. Mais, par hypothèse: $\text{long}(\Theta_1) = \pi$; on est donc dans le cas où, dans la conclusion du théorème 6 de [2], l'égalité est atteinte. On procède alors comme dans la démonstration du lemme 10 de [3]: le fait que l'égalité est atteinte entraîne alors que la structure riemannienne, induite par celle de V , sur la sous variété W à deux dimensions de V engendrée par les $\Omega(t)$, est isométrique à celle d'une sphère $S_2(1)$ à deux dimensions et de courbure constante 1. En particulier: $\rho(\theta'(0), \theta'_1(0)) = 1$.

Mais, de plus, p, q étant des antipodes de $S_2(1)$, il existe une famille de géodésiques de $S_2(1)$, d'extrémités \dot{p}, \dot{q} et de longueur π . Par l'isométrie entre W et $S_2(1)$, on obtient dans V une famille de courbes $\Psi(k, h)$, qui ont toutes pour extrémités p, q , sont de longueur π et dont les vecteurs tangents initiaux en p sont les $(k\theta'(0) + h\theta'_1(0))/\|k\theta'(0) + h\theta'_1(0)\|^{-1}$ ($k \geq 0$ et $h \geq 0$). Comme $d(p, q) = \text{long}(\Psi(k, h)) = \pi$, c'est que les $\Psi(k, h)$ coïncident nécessairement avec les géodésiques $\Theta(k, h)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 4. Soit V une variété riemannienne compacte (1/4)-pincée, telle que $d(V) > \pi$ et p, q deux points de V tels que $d(p, q) = d(V)$. Alors, quel que soit $r \in V$, on a: $d(r, p) < \pi$ ou $d(r, q) < \pi$ ou $d(r, p) = d(r, q) = \pi$.

Soit $r \in V$ tel que $d(r, p) > \pi$ (resp. $d(r, p) = \pi$) et $\Gamma = \{\gamma(s)\}$ une géodésique telle que: $\Gamma \in \|\| p, r \|\|$, $\gamma(0) = p$. D'après le lemme 1, il existe une géodésique $\Lambda = \{\lambda(s)\}$ telle que: $\Lambda \in \|\| p, q \|\|$, $\lambda(0) = p$, $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle \geq 0$. D'après le corollaire 2 du théorème 5, on a $d(r, q) < \pi$ (resp. $d(r, q) \leq \pi$), ce qui démontre le lemme.

LEMME 5. Soit V une variété riemannienne (1/4)-pincée, de diamètre tel que $\pi < d(V) < 2\pi$; soient p, q, r trois points et $\Gamma = \{\gamma(s)\}$, $\Lambda = \{\lambda(s)\}$ deux géodésiques de V , tels que: $d(p, r) = d(q, r) = \pi$, $d(p, q) = d(V)$, $\Gamma \in \|\| p, r \|\|$, $\Lambda \in \|\| p, q \|\|$, $\gamma(0) = \lambda(0) = p$, $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle \geq 0$. Posons $s = \lambda(d(V)/2)$. Dans ces conditions, on a d'abord: $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle = 0$. En outre il existe deux géodésiques $\Omega = \{\omega(s)\}$, $\Theta = \{\theta(s)\}$ telles que: $\Omega \in \|\| s, r \|\|$, $\Theta \in \|\| q, r \|\|$, $\omega(\pi) = \theta(\pi) = r$, $\rho(\gamma'(\pi), \theta'(\pi)) = 1/4$, $\langle \gamma'(\pi), \theta'(\pi) \rangle = \cos(d(V)/2)$, $\gamma'(\pi) + \theta'(\pi) = 2 \cos(d(V)/4) \omega'(\pi)$.

Supposons $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle > 0$. Il est classique qu'il existe alors des points x de Λ , voisins de p , tels que: $d(x, r) < d(p, r)$. Le raisonnement

de la démonstration du lemme 4 de [3] conduit alors à la contradiction : $d(p, r) < \pi$ ou $d(q, r) < \pi$. On a donc bien : $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle = 0$.

Au triangle p, q, r de V , dont deux côtés sont Γ et Λ , faisons correspondre le triangle analogue $\widehat{p}, \widehat{q}, \widehat{r}, \widehat{\Gamma}, \widehat{\Lambda}$ (et le point \widehat{s}) de la sphère $S_{dim V}(1/4)$ de même dimension que V et de courbure constante $1/4$ (ou doit avoir $\text{long}(\widehat{\Gamma}) = \text{long}(\Gamma)$, $\text{long}(\widehat{\Lambda}) = \text{long}(\Lambda)$ et l'angle de $\widehat{\Gamma}, \widehat{\Lambda}$ en \widehat{p} doit être égal à l'angle de Γ et Λ en p). Désignons par $\widehat{\Theta}$ (esp. $\widehat{\Omega}$) la géodésique de $S_{dim V}(1/4)$ qui joint \widehat{q} à \widehat{r} (resp. \widehat{s} à \widehat{r}); on a $\text{long}(\widehat{\Omega}) = \text{long}(\widehat{\Theta}) = \pi$. Notons $\widehat{\Lambda}(t)$ la famille de géodésiques de $S_{dim V}(1/4)$ d'origine \widehat{p} et dont l'extrémité parcourt $\widehat{\Theta}$. Par $\Lambda(t), \Theta, \Omega$, on désignera les géodésiques de V correspondant respectivement à $\widehat{\Lambda}(t), \widehat{\Omega}, \widehat{\Theta}$. Le théorème 6 de [2] affirme que : $\text{long}(\Theta) \leq \text{long}(\widehat{\Theta}) = \pi$. Mais, puisque Θ a pour extrémités q, r et que $d(q, r) = \pi$, on a $\text{long}(\Theta) \geq \pi$. Nous sommes donc dans le cas où, dans la conclusion du théorème 6 de [2], l'égalité est atteinte. On sait alors, d'après la démonstration du lemme 10 de [3], que la structure riemannienne, induite par celle de V , sur la sous-variété à deux dimensions W , engendrée par la famille $\Lambda(t)$, est isométrique à celle de la sphère $S_2(1/4)$ à deux dimensions et de courbure constante $1/4$. On en déduit, en particulier : $\rho(\gamma'(\pi), \theta'(\pi)) = 1/4, \langle \gamma'(\pi), \theta'(\pi) \rangle = \cos(d(V)/2), \gamma'(\pi) + \theta'(\pi) = 2 \cos(d(V)/4) \omega'(\pi)$.

LEMME 6. Soit V une variété riemannienne δ -pincée, avec $\delta < 1, p$ un point de V et X, Y, Z trois vecteurs unitaires de T_p , tels que : $Y \neq Z, \langle X, Y \rangle = \langle X, Z \rangle > 0, \rho(X, Y) = \rho(X, Z) = \delta$. Alors : $\rho(Y, Z) < 1$.

Construisons un ensemble orthonormé $\{X, P, Q\}$ de T_p , tel que : $Y = aX + bP, Z = a'X + cP + dQ$. Les hypothèses entraînent : $a = \langle X, Y \rangle = \langle X, Z \rangle = a' > 0$; puis : $\rho(X, Y) = \rho(X, P) = \delta, \rho(X, Z) = \rho(X, cP + dQ) = \delta$. D'après les majorations données dans la deuxième partie de [3], les deux relations de courbure ci-dessus et le fait que V est δ -pincée entraînent : $\langle R(X, P)X, U \rangle = \langle R(P, X)P, U \rangle = 0$ pour tout U tel que $\langle X, U \rangle = \langle P, U \rangle = 0$. D'où alors : $\rho(X, Q) = \delta$. D'où encore : $\langle R(X, Q)X, U \rangle = \langle R(Q, X)Q, U \rangle = 0$ pour tout U tel que $\langle Q, X \rangle = \langle Q, U \rangle = 0$.

Par définition : $\rho(Y, Z) = -\langle R(Y, Z)Y, Z \rangle (\|Y\|^2 \|Z\|^2 - \langle Y, Z \rangle^2)^{-1}$. On a : $\|Y\|^2 \|Z\|^2 - \langle Y, Z \rangle^2 = (a^2 + b^2)(a^2 + c^2 + d^2) - (a^2 + bc)^2 = \dots = a^2 d^2 + b^2 d^2 + a^2(c - b)^2$. Et : $\langle R(Y, Z)Y, Z \rangle = -a^2(c - b)^2 \rho(X, P) - \dots - a^2 d^2 \rho(X, Q) - b^2 d^2 \rho(P, Q) + 2a^2 d(c - b) \langle R(X, P)X, Q \rangle + \dots + 2a b d(c - b) \langle R(X, P)P, Q \rangle + 2a b d^2 \langle R(X, Q)P, Q \rangle$. D'où, compte tenu des relations obtenues ci-dessus : $\rho(Y, Z) = (\delta^2 a^2(c - b)^2 + \delta^2 a^2 d^2 + \dots + b^2 d^2 \rho(P, Q)) (a^2(c - b)^2 + a^2 d^2 + b^2 d^2)^{-2}$. Comme on a : $\delta \leq \rho(P, Q) \leq 1, a > 0, \delta < 1, a^2(c - b)^2 + a^2 d^2 > 0$ (car $Y \neq Z$), on a bien : $\rho(Y, Z) < 1$.

LEMME 7. Soit V une variété riemannienne simplement connexe de dimension paire; supposons V $(1/4)$ -pincée et telle que $\pi < d(V) < 2\pi$. Soient p, q deux points de V tels que $d(p, q) = d(V)$. Alors, quel que soit $r \in V$, on a : $d(r, p) < \pi$ ou $d(r, q) < \pi$.

D'après le lemme 4, il suffit d'exclure le cas $d(r, p) = d(r, q) = \pi$. Procédons par l'absurde, en supposant qu'il existe un tel r . Soit $\Gamma = \{\gamma(s)\}$ une géodésique de V telle que : $\Gamma \in \|\| p, r \|\|$, $\gamma(0) = p$. D'après le lemme 1, il existe une géodésique $\Lambda = \{\lambda(s)\}$ telle que : $\Lambda \in \|\| p, q \|\|$, $\lambda(0) = p$, $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle \geq 0$. Soit $s = \lambda(d(V)/2)$; d'après le lemme 5, on a $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle = 0$ et il existe deux géodésiques $\Omega = \{\omega(s)\}$, $\Theta = \{\theta(s)\}$ telles que : $\Omega \in \|\| s, r \|\|$, $\Theta \in \|\| q, r \|\|$, $\omega(\pi) = \theta(\pi) = r$, $\varrho(\theta'(\pi), \gamma'(\pi)) = 1/4$, $\langle \gamma'(\pi), \theta'(\pi) \rangle = \cos(d(V)/2)$, $\gamma'(\pi) + \theta'(\pi) = 2 \cos(d(V)/4) \omega'(\pi)$.

Montrons maintenant qu'il existe une géodésique $\Lambda_1 = \{\lambda_1(s)\}$ telle que : $\Lambda_1 \in \|\| p, q \|\|$, $\lambda_1(0) = p$, $\langle \lambda_1'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$, $\Lambda_1 \neq \Lambda$. En effet, d'après le lemme 1, quel que soit le nombre réel positif t , il existe une géodésique $\Lambda(t) = \{\lambda(s, t)\}$ ($0 \leq s \leq d(V)$, $t > 0$) telle que : $\Lambda(t) \in \|\| p, q \|\|$, $\lambda(0, t) = p$, $\langle \lambda_s'(0, t), \gamma'(0) - t\lambda'(0) \rangle \geq 0$. La démonstration du lemme 5 implique $\langle \lambda_s'(0, t), \gamma'(0) \rangle \leq 0$, d'où : $\langle \lambda_s'(0, t), \lambda'(0) \rangle \leq 0$ quel que soit $t > 0$. De la famille $\Lambda(t)$, on peut extraire une suite $\Lambda(t(n))$ ($t(n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$) convergeant vers une géodésique $\Lambda_1 = \lim \Lambda(t(n))$ ($n \rightarrow \infty$) = $\{\lambda_1(s)\}$, qui sera telle que : $\Lambda_1 \in \|\| p, q \|\|$, $\langle \lambda_1'(0), \lambda'(0) \rangle = \lim \langle \lambda_s'(0, t), \lambda'(0) \rangle$ ($n \rightarrow \infty$); ce qui montre que Λ_1 est telle que $\langle \lambda_1'(0), \lambda'(0) \rangle \leq 0$, d'où $\lambda_1'(0) \neq \lambda'(0)$, puis $\Lambda_1 \neq \Lambda$.

La géodésique Λ_1 jouit, par rapport à p, q, r et Γ , des mêmes propriétés que Λ ; appelons s_1, Θ_1, Ω_1 les éléments analogues à s, Θ, Ω , construits cette fois à partir de Λ_1 . On aura : $\Omega_1 \in \|\| s_1, r \|\|$, $\Theta_1 \in \|\| q, r \|\|$, $\varrho(\gamma'(\pi), \theta_1'(\pi)) = 1/4$, $\langle \gamma'(\pi), \theta_1'(\pi) \rangle = \cos(d(V)/2)$, $\gamma'(\pi) + \theta_1'(\pi) = 2 \cos(d(V)/4) \omega_1'(\pi)$. De plus, l'hypothèse faite sur le diamètre de V entraîne : $0 < \langle \gamma'(\pi), \theta'(\pi) \rangle < 1$ et $0 < \langle \gamma'(\pi), \theta_1'(\pi) \rangle < 1$.

Les deux points s et s_1 de V sont certainement différents, en vertu du théorème 3, parce que les deux géodésiques Λ, Λ_1 sont distinctes et que $d(p, s) = d(p, s_1) = d(V)/2 < \pi$. On a donc $\Omega \neq \Omega_1$, puis $\omega'(\pi) \neq \omega_1'(\pi)$. Ce qui entraîne finalement : $-1 < \langle \theta'(\pi), \theta_1'(\pi) \rangle < 1$. En effet, il suffit d'utiliser les relations obtenues ci-dessus pour $\gamma'(\pi), \theta'(\pi), \theta_1'(\pi), \omega'(\pi), \omega_1'(\pi)$ et leurs produits scalaires, et le fait que $d(V) < 2\pi$ entraîne $\cos(d(V)/4) > 0$.

Posons alors : $X = \gamma'(\pi)$, $Y = \theta'(\pi)$, $Z = \theta_1'(\pi)$. Les hypothèses du lemme 6 sont toutes satisfaites; donc $\varrho(Y, Z) < 1$. D'autre part, Θ et Θ_1 vérifient les hypothèses du lemme 3, donc $\varrho(Y, Z) = 1$. C'est la contradiction cherchée.

7. Démonstration du théorème 2.

Dans tout ce n^0 , V sera une variété riemannienne compacte, simplement connexe de dimension paire et (1/4)-pincée. On a rappelé à la fin du n^0 2 que l'on a $d(V) \leq 2\pi$; d'après le théorème 3: $d(V) \geq \pi$. D'où: $\pi \leq d(V) \leq 2\pi$. Si $d(V) = 2\pi$, le théorème 5 de [6], p. 720 entraîne que V est isométrique à la sphère $S_{\dim V}(1/4)$. Si $\pi < d(V) < 2\pi$, la réunion du théorème 3, du lemme 7 et du théorème 4 entraîne que V est homéomorphe à $S_{\dim V}$. Il reste seulement à étudier le cas où $d(V) = \pi$. Pour achever la démonstration du théorème 2, il suffira de démontrer que, si V est telle que $d(V) = \pi$, quel que soit $p \in V$, il existe une géodésique d'origine et d'extrémité p et de longueur 2π . C'est en effet l'affirmation du lemme 1 de [3]; or ce lemme 1 constitue le point de départ de la démonstration du théorème 1 de [3], démonstration qui n'utilise, à part la conclusion du lemme 1 de [3], que les hypothèses du théorème 2 ci-dessus.

Soient p, q deux points de V tels que $d(p, q) = \pi = d(V)$ (p peut être évidemment arbitrairement choisi). Désignons par U le sous-ensemble de T_q formé des vecteurs unitaires tangentes en q aux géodésiques de $\|p, q\|$. L'ensemble U doit satisfaire les deux conditions suivantes: a) — quels que soient $X, Y \in U$ tels que $X \neq Y$ et $X \neq -Y$, l'arc de grand cercle de la sphère des vecteurs unitaires de T_q , qui joint X à Y , doit être tout entier dans U ; b) — quel que soit $X \in T_q$, il existe $Y \in U$ tel que $\langle X, Y \rangle \geq 0$. La condition a) provient du lemme 3; la condition b) du fait que $d(p, q) = d(V)$ et du lemme 1. Ces deux conditions entraînent qu'il existe $X \in U$ tel que $-X \in U$. Supposons en effet U tel que $X \in U$ entraîne $-X \notin U$; soit \widehat{U} l'enveloppe convexe de U . L'ensemble \widehat{U} ne contient pas l'origine O de T_q , d'après la condition a). Comme U , donc \widehat{U} , sont fermés, il est classique qu'il existe alors un et un seul Z de \widehat{U} qui réalise la distance du point O à l'ensemble \widehat{U} , d'où $\langle Z, X \rangle < 0$ quel que soit $X \in \widehat{U}$, (a fortiori quel que soit $X \in U$), ou $\langle -Z, X \rangle < 0$ quel que soit $X \in U$, ce qui contredit la condition b).

Soit alors Γ (resp. Γ_1) la géodésique de $\|p, q\|$ dont le vecteur tangent en q est X (resp. $-X$); la réunion $\Gamma \cup \Gamma_1$ est bien une géodésique d'extrémité et d'origine p , de longueur 2π . Ce qu'il fallait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BERGER, *Les variétés riemanniennes (1/4)-pincées* (C. R. Acad. Sc., t. 250, 1960, p. 442-444).
- [2] M. BERGER, *Les variétés riemanniennes à courbure positive* (Bull. Soc. math. Belgique, t. 10, 1958, p. 89-104).
- [3] M. BERGER, *Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées* (Bull. Soc. math. France, t. 90, 1960).
- [4] W. KLINGENBERG, *Contributions to Riemannian geometry in the large* (Ann. of math., t. 69, 1959, p. 654-666).
- [5] V. A. TOPONOGOV, *Sur la convexité des espaces de Riemann à courbure positive* (Dokl. Nauk S. S. R., t. 115, 1957, p. 674-676).
- [6] V. A. TOPONOGOV, *Espaces de Riemann ayant leur courbure bornée inférieurement par un nombre positif* (Dokl. Akad. Nauk S. S. R., t. 120, 1958, p. 719-721).