M. Berger

Pincement riemannien et pincement holomorphe

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 2 (1960), p. 151-159
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_2_151_0>

PINCEMENT RIEMANNIEN ET PINCEMENT HOLOMORPHE

M. Berger (Strasbourg)

1. Introduction.

Dans cet article on démontre que toute variété kählérienne compacte V, de dimension réelle 4 et à courbure strictement positive, est telle que $\dim H^2(V, R) = 1$, ce qui avait été annoncé dans [1], p. 292, sans démonstration. A cet effet, on est amené à améliorer dans le cas kählérien les majorations données dans la deuxième partie de [2] dans le cas riemannien. On peut alors préciser le rapport entre pincement riemannien et pincement holomorphe (proposition 1) et démontrer le résultat annoncé (proposition 3). Cette méthode donne aussi des résultats en dimensions plus grandes que 4, mais beaucoup plus faibles (proposition 4).

Depuis la démonstration de la proposition 3, nous avons appris que Andreotti et T. Frankel ont démontré, dans un article à paraître, qu'une variété kählérienne compacte, de dimension réelle 4 et à courbure strictement positive, est homéomorphe à l'espace projectif complexe de même dimension; leur démonstration utilise le théorème de plongement de Kodaira et la classification des surfaces algébriques.

2. Pincements riemannien et holomorphe.

On rappelle d'abord brièvement les définitions et notations concernant une variété riemannienne V qui seront utilisées (voir [2] par exemple). Par $T(V)$ (resp. T_p) on désigne l'espace des vecteurs de V (resp. vecteurs de V d'origine p), par $\| \ \|$, $\langle \ , \ \rangle$ la norme définissant la structure riemannienne considérée et le produit scalaire correspondant. Pour tout point p de V, on désigne par $R(X, Y)$ la forme bilinéaire antisymétrique sur T_p à valeurs dans les endomorphismes de T_p, qui est définie par le tenseur de courbure de la structure riemannienne considérée. On note $P(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 2 des T_p (p parcourant V); si $\mu \in P(V)$ et si X, Y sont deux vecteurs de T_p qui engendrent μ, on appelle courbure de V dans μ le nombre réel

$$\varrho(\mu) = \varrho(X, Y) = -\langle R(X, Y)X, Y\rangle (\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2)^{-1}.$$

Soit δ un nombre réel; *la variété riemannienne V est dite δ*-pincée *s'il existe un nombre réel positif Δ tel que l'on ait*

$$\delta\Delta \leq \varrho(\mu) \leq \Delta \qquad \text{quel que soit} \qquad \mu \in P(V).$$

On peut toujours normer la structure riemannienne de V de façon que $\Delta = 1$.

Supposons maintenant que la structure riemannienne de V soit celle induite par une structure de variété *kählérienne* donnée sur V; par J, on désignera l'automorphisme de carré -1 de $T(V)$ qui définit la structure presque complexe de V. Un élément μ de $P(V)$ est dit *holomorphe* si $J(\mu) = \mu$; on notera $H(V)$ le sous ensemble de $P(V)$ constitué par les éléments holomorphes. Soit λ un nombre réel; *la variété kählérienne V est dite* λ-holomorphiquement pincée *s'il existe un nombre réel positif Ξ tel que*

$$\lambda\Xi \leq \varrho(\mu) \leq \Xi \qquad \text{quel que soit } \mu \in H(V).$$

On peut normer la structure kählérienne de V de façon que $\Xi = 1$. Lorsque V est de dimension réelle 2, on a $P(V) = H(V)$ et les notions de pincement riemannien et pincement holomorphe sont les mêmes. Pour les dimensions supérieures, les rapports entre ces deux notions sont fournis par la :

PROPOSITION 1. *Soit V une variété kählérienne de dimension réelle supérieure à 2. Si V est* δ-pincée, *il est nécessaire que $\delta \leq 1/4$ et V est* $\delta(8\delta + 1)(1 - \delta)^{-1}$-holomorphiquement pincée. *Si V est λ* holomorphiquement pincée, *avec $\lambda \geq 0$, alors V est* $((3\lambda - 2)/4)$-pincée.

(On vérifie facilement que les relations affirmées par la proposition 1 sont les meilleures possibles. On remarquera que la fonction $\delta(8\delta + 1)(1 - \delta)^{-1}$ vaut 1 pour $\delta = 1/4$ et pour $\delta = 0$ est tangente à la fonction δ).

Les relations de la proposition 1 proviennent essentiellement de ce que le tenseur de courbure d'une variété kählérienne vérifie

$$(2.1) \qquad R(X, Y) = R(JX, JY) \qquad \text{quel que soient } X \text{ et } Y.$$

Rappelons quelques notations employées dans [2]: si X_i, X_j, X_k, X_h sont quatre vecteurs quelconques de T_p, on pose $\varrho(i, j) = \varrho(X_i, X_j)$ et $R(i, j, k, h) = \langle R(X_i, X_j) X_k, X_h \rangle$. Danr le cas kählérien, nous poserons $X_{i*} = JX_i$. Soit maintenant $\{X, JX, Y, JY\}$ un sous-ensemble orthonormé de T_p; de (2.1) et des identités de BIANCHI (voir, par exemple, la deuxième partie de [2]), on déduit les relations:

$$\varrho(X, Y) = \varrho(JX, JY); \qquad \varrho(X, JY) = \varrho(JX, Y) \tag{2.2}$$

$$\langle R(X, JX) Y, JY \rangle = -\varrho(X, Y) - \varrho(JX, Y). \tag{2.3}$$

3. La variété V est δ-pincée.

Dans ce n⁰, on suppose que la variété V est kählérienne, de dimension réelle supérieure à 2, δ-pincée, et l'on veut montrer que $\delta \le 1/4$ et que V est $\delta(8\delta + 1)(1 - \delta)^{-1}$-holomorphiquement pincée. Pour ce faire, on majore d'abord les $\varrho(X, Y)$ pour lesquels $\langle X, Y \rangle = \langle JX, Y \rangle = 0$ (deux tels X, Y n'existent que si la dimension est supérieure à 2); sous ces conditions, l'ensemble $\{X, JX, Y, JY\}$ est orthonormé, donc, d'après la formule (7) de [2], on a

$$|\langle R(X, JX) Y, JY \rangle| \le (2/3)(1 - \delta).$$

Mais comme $\varrho(JX, Y) \ge \delta$, on déduit de (2.3) la majoration:

$$\varrho(X, Y) \le (2 - 5\delta)/3. \tag{3.1}$$

De (3.1) et de $\varrho(X, Y) \ge \delta$, on tire bien $\delta \le 1/4$.

La démonstration utilise maintenant l'inégalité:

$$|R(i, j, k, h)| \le (1/3)\,((PS)^{1/2} + (QR)^{1/2}) \tag{3.2}$$

où $\{X_i, X_j, X_k, X_h\}$ est orthonormé et où:

$$P = 2\varrho(i, j) - 2\delta \qquad R = \varrho(j, k) + \varrho(j, h) - 2\delta$$

$$Q = \varrho(i, k) + \varrho(i, h) - 2\delta \qquad S = 2\varrho(k, h) - 2\delta.$$

Cette inégalité n'est pas celle qui figure dans la deuxième partie de [2], mais elle se démontre de façon analogue. La signification de G étant celle de [2], si l'on pose:

$$L = G(a, i; b, k; c, j; d, h) + G(a, i; b, h; c, j; -d, k),$$

on trouve : $L = Pa^2c^2 + Qa^2d^2 + Rb^2c^2 + Sb^2d^2 + 6R(i, j, k, h)\, abcd$, d'où (voir [2]), la majoration (3.2).

Appliquons (3.2) avec $j = i^*$ et $h = k^*$; compte tenu des relations (2.2) et (2.3), on obtient :

$$\varrho(i, j) + \varrho(i, j) \leq \dots$$

$$\dots \leq (1/3)\,(2\,(\varrho(i, i^*) - \delta)^{1/2}(\varrho(j, j^*) - \delta)^{1/2} + \varrho(i, j) + \varrho(i, j^*) - 2\delta)$$

soit :

$$(\varrho(i, i^*) - \delta)^{1/2}(\varrho(j, j^*) - \delta)^{1/2} \geq \varrho(i, j) + \varrho(i, j^*) + \delta .$$

De $\varrho(i,i) \geq \delta, \varrho(i,j^*) \geq \delta, \varrho(j,j^*) \leq 1$, on déduit bien que $\varrho(i,i^*) \geq \delta(8\delta + 1)(1 - \delta)^{-1}$, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE. *Soit V une variété, topologiquement complète, kählérienne, δ-pincée avec $\delta > 0$ et soit $d(V)$ le diamètre de V. Dans ces conditions, on a : $d(V) \leq \pi(1 - \delta)^{1/2}(8\delta^2 + \delta)^{-(1/2)}$.*

Il suffit de montrer que, de V kählérienne, complète, λ-holomorphiquement pincée avec $\lambda > 0$, on déduit $d(V) \leq \pi\lambda^{-(1/2)}$. La méthode est celle du classique théorème 2 de [3], dont on emploiera les notations et définitions. Soit $\Gamma = \{\gamma(s)\}$ une géodésique de longueur supérieure ou égale à $\pi\lambda^{-(1/2)}$. On a $\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s) = 0$, quel que soit s, parce que Γ est une géodésique ; mais, V étant kählérienne, la dérivation covariante commute avec l'automorphisme J; on a donc aussi $\nabla_{\gamma'(s)}(J\gamma'(s)) = 0$ quel que soit s. Soit alors $\mathcal{Y}$ le champ de vecteurs le long de Γ, défini par : $Y(s) = \sin(\pi s/l)\,(J\gamma'(s))$; la formule de la variation seconde (formule (1) de [3]), appliquée au champ $\mathcal{Y}$, donne un résultat strictement négatif, ce qui montre qu'il existe des courbes voisines de Γ, de mêmes extrémités et de longueur strictement plus petite ; on a donc bien $d(V) \leq \pi\lambda^{-(1/2)}$.

4. La variété V est λ-holomorphiquement pincée.

On suppose maintenant que $\lambda \leq \varrho(X, JX) \leq 1$ quel que soit X, et l'on doit en déduire que $(3\lambda - 2)/4 \leq \varrho(X, Y) \leq 1$ quels que soient X, Y. Ecrivons que :

(4.1) $\lambda \leq \varrho(aX + bY, J(aX + bY)) \leq 1$, quels que soient a, b réels.

On peut supposer que $\langle X, Y\rangle = 0$. On a : $J(aX + bY) = a(JX) + b(JY)$, $||aX + bY||^2 = (a^2 + b^2)^2$. Compte tenu des relations (2.2) et des identités de BIANCHI, on trouve:

$$(a^2+b^2)^2\,\varrho\,(aX+bY,\,J(aX+bY))=\ldots$$

$$\ldots=a^4\varrho(X,JX)+b^4\varrho(Y,JY)+2a^2b^2(\varrho(X,Y)-3\langle R(Y,JX)Y,JX\rangle+ua^3b+vab^3.$$

En changeant a en $-a$, on se débarasse des termes en a^3b et ab^3. Quand à $\langle R(Y,JX)Y,JX\rangle$, comme Y et JX ne sont pas nécessairement orthogonaux, on posera $\langle Y,JX\rangle=\sin\omega$ et l'on aura: $\langle R(Y,JX)Y,JX\rangle=$ $=-\varrho(Y,JX)\cos^2\omega$. La condition (4.1) s'écrit donc:

$$\lambda(a^2+b^2)^2\leq a^4\varrho(X,JX)+2a^2b^2(\varrho(X,Y)+3\cos^2\omega\cdot\varrho(Y,JX))+$$

$$+b^4\varrho(Y,JY)\leq(a^2+b^2)^2$$

quels que soient a, b réels; ce qui, puisque $\varrho(X,JX)\leq 1$ et $\varrho(Y,JY)\leq 1$, entraîne:

$$2\lambda-1\leq\varrho(X,Y)+3\cos^2\omega\cdot\varrho(JX,Y)\leq 1\,. \tag{4.2}$$

En procédant de même avec la condition:

$$\lambda\leq\varrho(aX+bJY,\,J(aX+bJY))\leq 1 \qquad \text{quels que soient } a,b \text{ réels,}$$

on trouve:

$$2\lambda+2\sin^2\omega-1\leq 3\varrho(X,Y)+\cos^2\omega\cdot\varrho(JX,Y)\leq 1+2\sin^2\omega\,. \tag{4.3}$$

De (4.2) et (4.3), on déduit:

$$(3\lambda+3\sin^2\omega-2)/4\leq\varrho(X,Y)\leq(3\sin^2\omega+2-\lambda)/4\,, \tag{4.4}$$

et, en particulier: $\varrho(X,Y)\geq(3\lambda-2)/4$, quels que soient X, Y. D'où, aussi: $\varrho(JX,Y)\geq(3\lambda-2)/4$, et, en reportant ceci dans (4.3): $3\varrho(X,Y)\leq$ $\leq 1+2\sin^2\omega-\cos^2\omega(3\lambda-2)/4$, soit: $\varrho(X,Y)\leq 1-(\lambda\cos^2\omega)/4$. Ce qui, puisque $\lambda\geq 0$, achève la démonstration.

REMARQUES: 1) — en faisant $\lambda=1$ dans (4.4), c'est à dire lorsque V est à courbure holomorphe constante, on retrouve la relation classique (voir, par exemple, [4], p. 130): $\varrho(X,Y)=(1+3\sin^2\omega)/4$.

2) — supposons Y tel que $\langle X,Y\rangle=\langle JX,Y\rangle=0$; dans ce cas: $\sin\omega=0$. On déduit donc de (4.2) que:

$$\varrho(X,Y)+\varrho(JX,Y)\geq 2\lambda-1\,. \tag{4.5}$$

5. Réduction d'une 2-forme réelle de type (1, 1).

Soit $\xi: (X, Y) \to \xi(X, Y)$ une 2 forme extérieure réelle sur la variété kählérienne V; dans tout ce n^0, on suppose essentiellement que ξ est de type $(1, 1)$, c'est à dire que l'extension complexe de ξ est nulle sur les couples de vecteurs complexes holomorphes, ainsi que sur les couples de vecteurs antiholomorphes; on a donc, quels que soient X, Y réels: $\xi(X - iJX, Y - iJY) = 0$ et $\xi(X + iJX, Y + iJY) = 0$, conditions équivalentes à la condition:

$$(5.1) \qquad \xi(X, Y) = \xi(JX, JY), \qquad \text{quels que soient } X \text{ et } Y.$$

En un point p de V, on sait que T_p est somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 2, propres pour ξ et orthogonaux deux à deux. En général, ces espaces ne sont pas stables par J; soit $W \subset T_p$ un tel sous-espace et soit $\widehat{W} = W + J(W)$ son saturé par J. Par construction, $\widehat{W}$ est stable par J; d'autre part, $\widehat{W}$ est encore propre pour ξ en vertu de (5.1). L'orthogonal de $\widehat{W}$ dan T_p vérifie encore ces deux propriétés, ce qui montre que T_p est somme directe de sous-espaces du type de $\widehat{W}$, propres pour ξ, stables par J et orthogonaux deux à deux. Pour un tel $\widehat{W}$, stable par l'automorphisme J de carré -1, deux cas seulement sont possibles:

1) — $\widehat{W}$ est de dimension 2, engendré par X, JX, et l'on a alors: $\xi(X, U) = \xi(JX, U) = 0$, quel que soit U tel que $\langle X, U\rangle = \langle JX, U\rangle = 0$.

2) — $\widehat{W}$ est de dimension 4; par construction, $\widehat{W}$ est engendré par X, JX, Y, JY, où X, Y sont tels que $\xi(X, U) = \xi(Y, U) = 0$ quel que soit U tel que $\langle X, U\rangle = \langle Y, U\rangle = 0$. Posons $Y = aJX + bZ$, où Z est tel que $\langle X, Z\rangle = \langle JX, Z\rangle = 0$. Pour la restriction de ξ à $\widehat{W}$, les seules composantes qui peuvent être non nulles sont: $\xi(X, JX)$, $\xi(Z, JZ)$, $\xi(X, Z) = \xi(JX, JZ)$, puisque $\xi(X, JZ) = -\xi(JX, Z) = 0$. Et l'on a: $\xi(X, U) = \xi(JX, U) = \xi(Z, U) = \xi(JZ, U) = 0$ lorsque U appartient à l'orthogonal de $\widehat{W}$.

En résumé, pour tout p, il existe une base de T_p de la forme $\{X_i, X_{i^*}, X_{(i+1)}, X_{(i+1)^*}\} \cup \{X_l, X_{l^*}\}$ $(i = 1, 3, \ldots, 2p-1; 1 = 2p+1, \ldots, (\dim V/2))$ telle que les seules composantes de ξ qui peuvent être non nulles sont les: $\xi(i, i^*)$, $\xi((i+1), (i+1)^*)$, $\xi(i, i+1) = \xi(i^*, (i+1)^*)$, $\xi(l, l^*)$.

6. Formes harmoniques réelles sur une variété kählérienne compacte.

Lemme. *Soit V une variété kählérienne qui est, soit δ* pincée *avec $\delta > 0$, soit λ*-holomorphiquement pincée *avec $\lambda \geq 1/2$. Alors V est à courbure de* Ricci *strictement positive.*

Rappelons que la courbure de Ricci d'une variété riemannienne est la forme quadratique $\operatorname{Ric}(X, Y)$, définie comme étant la trace de la forme $Z \to -\langle R(X, Z)\, Y, Z\rangle$. Si $\{Z_i\}$ est une base orthonormée quelconque de T_p, on aura donc: $\operatorname{Ric}(X, X) = \Sigma_i\, \varrho(X, Z_i)$. Si V est à courbure strictement positive, le lemme est trivial. Si V est λ-holomorphiquement pincée avec $\lambda \geq 1/2$, prenons une base orthonormée de T_p de la forme $\{X, JX\} \cup X_i, JX_i\}$ $(i = 2, \dots, (\dim V)/2)$. On a:

$$\operatorname{Ric}(X, X) = \varrho(X, JX) + \Sigma_i\,(\varrho(X, X_i) + \varrho(X, JX_i)) \geq \varrho(X, JX) > 0\,.$$

d'après l'inégalité (4.5). Ce qui démontre le lemme.

Soit ξ une 2-forme réelle *harmonique*, sur la variété *kählérienne* compacte V; on sait, d'une part que ξ est somme de trois formes harmoniques de types respectifs $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, d'autre part que si V est à courbures de Ricci strictement positive, il n'existe pas sur V de formes harmoniques de type $(2, 0)$ ou $(0, 2)$. Si donc V est à courbure de Ricci strictement positive, ξ est nécessairement de type $(1, 1)$. Désignons par Ω la forme de Kähler de V; on sait (par exemple: [6], p. 274) que toute 2-forme harmonique ξ sur V peut s'écrire $\xi = k\,\Omega + \eta$, où k est un nombre réel et η une forme *effective,* ce qui se traduit, pour une 2-forme, par la condition $\Sigma_i\, \eta(i, i^*) = 0$ (où $\langle X_i, X_{i^*}\rangle$ est une base orthonormée quelconque). En resumé, pour étudier le deuxième groupe de cohomologie réelle $H^2(V, R)$ d'une variété kählérienne compacte, à courbure de Ricci strictement positive, il suffit d'étudier les 2-formes harmoniques réelles ξ, qui sont de type $(1, 1)$ et vérifient $\Sigma_i\, \xi(i, i^*) = 0$.

Employons la méthode utilisée dans la deuxième partie de [2]. Le cas le plus simple est celui où, dans la réduction du n^0 5, en tout point, tous les sous-espaces du type de $\widehat{W}$ sont de dimension 2, c'est à dire que en tout point p il existe une base orthonormée de T_p: $\{X_i, X_{i^*}\}$, telle que les seules composantes de ξ qui peuvent être non nulles sont les $\xi(i, i^*)$. Sous ces conditions on a la:

Proposition 2. *Soit V une variété kählérienne compacte, qui est, soit* δ-pincée *avec $\delta > 0$, soit* λ-holomorphiquement pincée *avec $\lambda > 1/2$. Soit ξ une forme harmonique réelle sur V, telle que, en tout point p de V, il existe* *une base orthonormée* $\{X_i, X_{i^*}\}$ *pour laquelle les seules composantes de* ξ *qui peuvent être non nulles sont les* $\xi(i, i^*)$. *Alors* ξ *est nécessairement proportionnelle à la forme de Kähler de V.*

On a vu que l'on peut supposer que $\Sigma_i \xi(i, i^*) = 0$. Avec les notations de la deuxième partie de [2], on a :

$$F(\xi) = \sum_i \sum_{j \neq i, i^*} (\varrho(i, j) + \varrho(i, j^*)) \xi(i, i^*)^2 + 4 \sum_{i<j} R(i, i^*, j, j^*) \xi(i, i^*) \xi(j, j^*).$$

Mais, en utilisant (2.3) :

$$F(\xi) = \sum_{i<j} (\varrho(i, j) + \varrho(i, j^*)) (\xi(i, i^*) - \xi(j, j^*))^2.$$

Dans les deux hypothèses de la proposition, on a : $\varrho(i, j) + \varrho(i, j^*) > 0$ (d'après (4.5)). C'est donc, puisque $F(\xi)$ ne peut pas être strictement positif ([5], p. 218), que l'on doit avoir : $\xi(i, i^*) = \xi(j, j^*)$ quels que soient $i \neq j$. Comme $\Sigma_i \xi(i, i^*) = 0$, on a $\xi = 0$.

Si les hypothèses faites sur ξ ne sont plus valables, le calcul de $F(\xi)$ en dimension quelconque conduit à un expression assez peu maniable. Par contre, en dimension 4, on a la :

PROPOSITION 3. *Soit V une variété kählérienne compacte, de dimension réelle, qui est, soit* δ-pincée *avec* $\delta > 0$, *soit* λ holomorphiquement pincée *avec* $\lambda > 1/2$. *Alors, on a* $\dim \bar{H}^2(V, R) = 1$. (Ces bornes sont les meilleures possibles comme le montre l'exemple du produit de deux droites complexes, qui, muni de sa structure kählérienne canonique, est à courbure positive ou nulle et (1/2)-holomorphiquement pincé).

D'après le n⁰ 5, on peut trouver, pour tout p, une base $\{X_1, X_{1^*}, X_2, X_{2^*}\}$ de T_p pour laquelle les seules composantes non nulles de ξ sont $\xi(1 . 1^*)$, $\xi(2, 2^*)$, $\xi(1, 2) = \xi(1^*, 2^*)$. On a vu que l'on peut supposer que, de plus : $\xi(1, 1^*) + \xi(2, 2^*) = 0$; posons : $a = \xi(1, 1^*) = -\xi(2, 2^*)$ et $b = \xi(1, 2) = \xi(1^*, 2^*)$. Pour $F(\xi)$, on trouve

$$(1/2) F(\xi) = 4a^2 (\varrho(1,2) + \varrho(1,2^*)) + 4ab (R(1,1^*,1,2) - R(2,2^*,1,2)) + \dots$$

$$\dots + b^2 (\varrho(1, 1^*) + \varrho(2, 2^*) + 2 \varrho(1, 2^*) - 2 \varrho(1, 2)).$$

On peut relier $F(\xi)$ à la quantité suivante G :

$$G = \varrho(\alpha 1 + \beta 2^*, \alpha 2 + \beta 1^*) + \varrho(\alpha 1 + \beta 2^*, \alpha 2^* - \beta 1);$$

cette quantité est, dans les conditions de la proposition, strictement positive, d'après (4.5), dès que a et b ne sont pas nuls tous les deux. D'autre part, le calcul de G donne :

$$(\alpha^2+\beta^2)^2\, G = (\alpha^2-\beta^2)^2\,(\varrho(1\,,2)+\varrho(1\,,2^*)) + \dots$$

$$\dots + 2\alpha\beta\,(\alpha^2-\beta^2)^2\,(R(1\,,1^*,1\,,2) - R(2\,,2^*,1\,,2)) + \dots$$

$$\dots + \alpha^2\beta^2\,(\varrho(1\,,1^*)+\varrho(2\,,2^*)+2\,\varrho(1\,,2^*)-2\,\varrho(1\,,2))\,.$$

L'on aura donc $(1/2)\,F(\xi) = G\cdot(\alpha^2+\beta^2)^{-2} > 0$, si l'on peut trouver $\alpha\,,\beta$ tels que $\alpha^2-\beta^2 = 2a$ et $\alpha\beta = b$, ce qui est toujours possible car il suffit de prendre pour $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ une racine carrée de $2\,(a+\sqrt{-1}\,b)$. On a donc bien $\xi = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

En dimension 6, en utilisant la réduction du n⁰ 5 et la majoration fournie, dans la démonstration de la proposition précédente, pour $F(\xi)$ à l'aide de le quantité G, on démontre la :

PROPOSITION 4. *Soit V une variété kählérienne compacte, de dimension réelle* 6 *et* δ-pincée. *Si* $\delta > 0{,}146$, *alors* $\dim H^2(V\,,R) = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGER (M.), *Variétés riemanniennes à courbure positive* (Bull. Soc. Math. France, t. 87, 1959, p. 285-292).

[2] BERGER (M.), *Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées* (Bull. Soc. math. France, t. 88, 1960).

[3] BERGER (M.), *Les variétés riemanniennes à courbure positive* (Bull. Soc. math. Belgique, t. 10, 1958, p. 89-104).

[4] BOCHNER (S.) et YANO (K.), *Curvature and Betti numbers* (Ann. of math. studies, Princeton University Press, 1953).

[5] LICHNEROWICZ (A.), *Courbure, nombres de Betti et espaces symétriques* (Proc. intern. Cong. Math. vol. 2, Providence, Amer. math. Soc., 1952, p. 216-223).

[6] LICHNEROWICZ (A.), *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie* (Paris, 1955).