ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

VINICIO VILLANI

Un criterio per l'estensione di applicazioni olomorfe

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 2 (1960), p. 141-150

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_2_141_0>

UN CRITERIO PER L'ESTENSIONE DI APPLICAZIONI OLOMORFE

VINICIO VILLANI (Pisa)

Introduzione.

Dati due spazi complessi [1] X, S ed un aperto $A \subset X$, si presenta il problema di assegnare condizioni sufficienti affinchè ogni applicazione olomorfa $\sigma : A \to S$ possa estendersi ad un'applicazione olomorfa $\varrho : X \to S$, di tutto X in S. Una condizione sufficiente perchè questo fatto si verifichi è espressa dal seguente teorema, che dimostreremo nel § 1.

TEOREMA 1. *Sia S uno spazio complesso olomorficamente separato; se $\pi : X' \to X$ è una modificazione propria dello spazio complesso X, tale che la restrizione di π a $\pi^{-1}(A)$ sia un omeomorfismo analitico, e se σ può estendersi ad un'applicazione olomorfa $\varrho' : X' \to S$, allora esiste un'applicazione olomorfa $\varrho : X \to S$, che estende σ a tutto X.*

Se X ed X' sono varietà complesse, l'ipotesi che S sia olomorficamente separato può essere sostituita con l'ipotesi che *S ammetta un rivestimento analitico mediante uno spazio complesso olomorficamente separato* (Teorema 2).

Dal teorema 2 si traggono alcune conseguenze. Nel § 2 è provata la

PROPOSIZIONE 1. *Sia data una modificazione propria*

$$\pi : X' \to X$$

tra la varietà complessa X e la varietà complessa X'; sia G un gruppo di Lie complesso; indicato con G_X il fascio dei germi delle applicazioni olomorfe di X in G, l'applicazione

$$\tilde{\pi} : H^1(X, G_X) \to H^1(X', G_{X'}),$$

indotta naturalmente da π, è iniettiva.

---

[1] Gli spazi complessi considerati nel presente lavoro si intendono tutti *normali*.

Da questa proposizione si deduce facilmente il seguente corollario, dimostrato nel § 3 :

COROLLARIO 1. *Si consideri la classe di equivalenza tra spazi fibrati analitici, definita da* $\xi \in H^1(X, G_X)$; *se in* $\tilde{\pi}(\xi)$ *esiste un rappresentante, avente come gruppo strutturale il sottogruppo di Lie chiuso* $G' \subset G$, *e se* G/G', *spazio delle classi laterali (sinistre), ammette un rivestimento analitico mediante uno spazio complesso olomorficamente separato, esiste già in* ξ *un rappresentante avente come gruppo strutturale* G'.

Osserviamo che il teorema 1 rappresenta una generalizzazione della ben nota

PROPOSIZIONE 2. *Dato uno spazio complesso* X *ed una modificazione propria*

$$\pi : X' \to X ,$$

ad ogni funzione olomorfa f' *su* X' *si può associare una funzione olomorfa* f *su* X, *tale che sia* $f' = f \circ \pi$ (per la dimostrazione cfr. ad es. [3], Teorema 8).

Varie altre condizioni, sufficienti per l'estendibilità di applicazioni olomorfe, si trovano in [1]. I teoremi 1 e 2 di questa nota si differenziano dalle condizioni date in [1] sostanzialmente per il fatto che, avendo supposto l'estendibilità di σ ad uno spazio X', modificazione propria di X, non occorre richiedere che S (o un suo rivestimento analitico) sia uno spazio di Stein.

Per la terminologia usata senza alcun riferimento esplicito si rinvia a [1].

§ 1. Diremo che lo spazio complesso X è *olomorficamente separato* se, dati due punti $x, y \in X$, $x \neq y$, esiste una funzione f, olomorfa su tutto X, per la quale sia $f(x) \neq f(y)$.

Per la definizione di *modificazione propria* si veda ad es. [3]. Dal Teorema 7, pag. 288 di tale lavoro, risulta : se $\pi : X' \to X$ è una modificazione propria di uno spazio complesso X, esiste un aperto $V \subset X$ ed un aperto $W \subset X'$, con $X - V$ insieme analitico di Codim $(X - V) \geq 2$, e con $X' - W$ insieme analitico di Codim $(X' - W) \geq 1$, tali che la restrizione di π a W sia un omeomorfismo analitico di W su tutto V (2).

LEMMA 1. *Siano* X, X' *due varietà complesse, e sia* $\pi : X' \to X$ *una modificazione propria. I gruppi di omotopia* $\pi_1(X)$, $\pi_1(X')$ *sono isomorfi.*

(2) Per *codimensione* si intenderà sempre la *codimensione complessa.*

DIMOSTRAZIONE: I) Si ha omomorfismo naturale surgettivo

$$p : \pi_1(X') \to \pi_1(X).$$

II) L'omomorfismo naturale

$$s : \pi_1(V) \to \pi_1(X)$$

è un isomorfismo, poichè $\operatorname{Codim}(X - V) \geq 2$.
III) Per come sono stati definiti V e W si ha un isomorfismo naturale

$$i : \pi_1(V) \to \pi_1(W).$$

IV) L'omomorfismo naturale

$$q : \pi_1(W) \to \pi_1(X')$$

è surgettivo, poichè $\operatorname{Codim}(X' - W) \geq 1$.

Pertanto sussiste il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 & & \\
\pi_1(X') \arrow[u] \arrow[r, "p"] & \pi_1(X) \arrow[r] \arrow[d, "s^{-1}"] \arrow[dl, "r : i \circ s^{-1}"'] & 0 \\
\pi_1(W) \arrow[u, "q"] & \pi_1(V) \arrow[l, "i"] &
\end{tikzcd}$$

dal quale si riconosce che è

$$p \circ (q \circ r) = \text{Identità su } X,$$

$$(q \circ r) \circ p = \text{Identità su } X'.$$

Ciò prova che p è un isomorfismo.

Facciamo vedere che *dato uno spazio olomorficamente separato S ed una modificazione propria*

(1) $$\pi : X' \to X$$

tra lo spazio complesso X e lo spazio complesso X', per ogni applicazione olomorfa

$$\varrho' : X' \to S$$

esiste un'applicazione olomorfa

$$\varrho : X \to S$$

tale che

$$\varrho \circ \pi = \varrho' . \tag{2}$$

Ciò proverà il teorema 1, pur di identificare canonicamente W con V e di interpretare $\varrho' : X' \to S$ come estensione a tutto X' dell'applicazione $\sigma : A \to S$ (si osservi che, per ipotesi, $A \subset V$ e quindi A è sottoinsieme di X').

Per ogni $x \in X$, sia x' un punto di $\pi^{-1}(x)$. Poniamo

$$\varrho(x) = \varrho'(x') ; \tag{3}$$

la (3) definisce un'applicazione di X in S: occorre provare che $\varrho(x)$ non dipende dal particolare $x' \in \pi^{-1}(x)$ scelto, occorre mostrare cioè che

$$\varrho'(x_1') \neq \varrho'(x_2')$$

implica

$$\pi(x_1') \neq \pi(x_2') .$$

Poichè S è olomorficamente separato, esiste su S una funzione olomorfa f, con

$$f(\varrho'(x_1')) \neq f(\varrho'(x_2')) . \tag{4}$$

Sia g' la funzione olomorfa, definita su X' come immagine reciproca di f

$$g'(x') = f(\varrho'(x')) \qquad (x' \in X') ;$$

(4) implica

$$g'(x_1') \neq g'(x_2') .$$

Se fosse

$$\pi(x_1') = \pi(x_2')$$

non potrebbe esistere quindi alcuna funzione g, olomorfa su X, tale che $g' = g \circ \pi$; poichè viceversa l'esistenza di una funzione siffatta è assicurata dalla proposizione 2, si conclude

$$\pi(x_1') \neq \pi(x_2') ,$$

come volevasi.

Per il modo stesso in cui è definita, l'applicazione ϱ soddisfa la (2).

Resta ancora da dimostrare che l'applicazione ϱ ora definita è olomorfa. L'applicazione ϱ è continua: sia infatti C un insieme chiuso di S: in quanto ϱ' è olomorfa, anche $(\varrho')^{-1}(C) \subset X'$ è chiuso. L'applicazione π è chiusa, onde anche $\pi((\varrho')^{-1}(C)) \subset X$ è chiuso. In conclusione, dato un insieme chiuso $C \subset S$, è chiuso pure $\varrho^{-1}(C) = \pi((\varrho')^{-1}(C))$; ciò prova la continuità di ϱ. Inoltre l'applicazione ϱ è olomorfa in tutti i punti di V. L'insieme analitico $X - V$ è non denso in X (anzi addirittura $\operatorname{Codim}(X - V) \geq 2$); ma è noto che un'applicazione continua di X in S, la quale è olomorfa in tutti i punti di X, esclusi al più i punti di un sottoinsieme analitico non denso di X, è olomorfa su tutto X (Teorema di Riemann, cfr. ad es. [6], pag. 343). Con ciò resta dunque provato il teorema 1.

Al teorema 2 premettiamo il seguente lemma:

LEMMA 2. *Sia S uno spazio complesso, il quale ammetta un rivestimento analitico, costituito da uno spazio complesso T, olomorficamente separato.*

Siano X, X' due spazi complessi, con X' semplicemente connesso, e sia

$$\pi : X' \to X$$

una modificazione propria.

Per ogni applicazione olomorfa

$$\lambda' : X' \to S$$

esiste un applicazione olomorfa

$$\lambda : X \to S$$

tale che

$$\lambda \circ \pi = \lambda' . \tag{5}$$

DIMOSTRAZIONE: Sia τ l'applicazione olomorfa di T su S, che definisce il dato rivestimento analitico di S. Avendo supposto X' semplicemente connesso, è ben definibile un'applicazione olomorfa

$$\varrho' : X' \to T,$$

con

$$\tau \circ \varrho' = \lambda' .$$

In virtù del teorema 1 esiste un'applicazione olomorfa

$$\varrho : X \to T,$$

con

$$\varrho \circ \pi = \varrho' .$$

L'applicazione olomorfa

$$\lambda = \tau \circ \varrho$$

rende commutativi tutti i triangoli del diagramma

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\rho'"] \arrow[ddr, "\lambda'"'] & & X \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[ddl, "\lambda"] \\ & T \arrow[d, "\tau"] & \\ & S & \end{tikzcd}$$

Ciò prova precisamente il lemma 2.

Facciamo vedere ora che, se X, X' sono varietà complesse, nel lemma 2 è superflua l'ipotesi che X' sia semplicemente connesso. Adopereremo per brevità la notazione seguente: data la modificazione $\pi : X' \to X$ e dato un aperto $U \subset X$, scriveremo U' in luogo di $\pi^{-1}(U)$. Con tale convenzione è chiaro che la restrizione della modificazione propria π ad un aperto U' del tipo detto è sempre una modificazione propria

$$\pi : U' \to U .$$

Dato uno spazio complesso qualsiasi X, esiste sempre un ricoprimento $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X mediante aperti contrattili (e quindi semplicemente connessi). Data la modificazione propria $\pi : X' \to X$, sia $\mathfrak{U}' = \{U_i'\}_{i \in I}$ il corrispondente ricoprimento di X'. In virtù del lemma 1, anche gli aperti U_i' risultano tutti semplicemente connessi.

Sia $\lambda' : X' \to S$ un'applicazione olomorfa di X' in uno spazio complesso S, il quale ammetta un rivestimento analitico mediante lo spazio complesso T, olomorficamente separato. Con λ_i' si indichi la restrizione di λ' ad U_i'. Da quanto precede è chiaro che il lemma 2 è applicabile alla modificazione propria $\pi : U_i' \to U_i$ ed all'applicazione olomorfa λ_i'. Quindi per ogni $i \in I$ esiste un'applicazione $\lambda_i : U_i \to S$, con $\lambda_i' = \lambda_i \circ \pi$.

Nei punti $p \in U_i \cap U_j$ si ha

$$\lambda_i = \lambda_j ,$$

in quanto per ogni $p \in U_i \cap U_j$

$$\lambda_i(p) = \lambda_i'(\pi^{-1}(p)) = \lambda_j'(\pi^{-1}(p)) = \lambda_j(p) ;$$

quindi è ben definita un'applicazione olomorfa $\lambda : X \to S$, con le

$$\lambda|_{U_i} = \lambda_i \qquad (i \in I),$$

come volevasi.

Si è dunque provato il

TEOREMA 2. *Siano X, X' due varietà complesse, $\pi : X' \to X$ una modificazione propria di X. Sia poi S uno spazio complesso, il quale ammetta un rivestimento analitico mediante uno spazio complesso olomorficamente separato. Data una qualunque applicazione olomorfa*

$$\lambda' : X' \to S ,$$

esiste sempre un'applicazione olomorfa

$$\lambda : X \to S ,$$

tale che

$$\lambda' = \lambda \circ \pi .$$

§ 2. Sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 3. *Un gruppo di Lie complesso G, il cui gruppo fondamentale sia finito, è una varietà algebrica affine* (3).

Il rivestimento universale di ogni gruppo di Lie complesso, essendo semplicemente connesso, è quindi una varietà affine; in particolare è uno spazio complesso olomorficamente separato. Ai gruppi di Lie complessi è pertanto applicabile il teorema 2.

Tenuto anche conto della convenzione fatta nel paragrafo precedente, possiamo dunque enunciare la

PROPOSIZIONE 4. *Sia G un gruppo di Lie complesso. Data una modificazione propria $\pi : X' \to X$ (X, X' varietà complesse) in corrispondenza ad ogni aperto $U' \subset X'$ e ad ogni applicazione olomorfa*

$$\sigma' : U' \to G$$

esiste un'applicazione olomorfa

$$\sigma : U \to G$$

tale che

$$\sigma' = \sigma \circ \pi .$$

Inoltre, se σ_1', σ_2', σ_3' sono tre applicazioni olomorfe di U' in G, tali che

$$\sigma_3'(u') = \sigma_1'(u')\,\sigma_2'(u') \qquad (u' \in U'), \tag{6}$$

anche le tre applicazioni olomorfe corrispondenti σ_1, σ_2, σ_3 sono tali che

$$\sigma_3(u) = \sigma_1(u)\,\sigma_2(u) \qquad (u \in U). \tag{7}$$

---

(3) Questo enunciato mi è stato gentilmente comunicato da R. REMMERT. La dimostrazione comparirà in [7].

Sia sempre G un gruppo di Lie complesso; sia poi $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento (aperto) di X, $\mathfrak{U}' = \{U_i'\}$ il corrispondente ricoprimento di X'. In virtù della proposizione 4 è chiaro che si ha corrispondenza biunivoca naturale tra l'insieme degli $\mathfrak{U}$-cocicli $Z^1(\mathfrak{U}, G_X)$ e l'insieme degli $\mathfrak{U}'$-cocicli $Z^1(\mathfrak{U}', G_{X'})$. Inoltre, in virtù dell'equivalenza tra (6) e (7), due $\mathfrak{U}'$-cocicli, elementi di $Z^1(\mathfrak{U}', G_{X'})$, sono tra loro equivalenti allora e solo che sono tra loro equivalenti i due $\mathfrak{U}$ cocicli corrispondenti. Si ha quindi una corrispondenza naturale bigettiva $\pi^{\mathfrak{u}}$ tra $H^1(\mathfrak{U}, G_X)$ ed $H^1(\mathfrak{U}', G_{X'})$. Poichè ogni ricoprimento di X individua un ricoprimento di X', ma in generale non è vero il viceversa, per passaggio al limite diretto su $H^1(\mathfrak{U}, G_X)$ e su $H^1(\widetilde{\mathfrak{U}}, G_{X'})$ al variare di $\mathfrak{U}$ nell'insieme di tutti i ricoprimenti di X ed al variare di $\widetilde{\mathfrak{U}}$ nell'insieme di tutti i ricoprimenti di X' (quindi $\widetilde{\mathfrak{U}}$ può denotare anche ricoprimenti di X' i quali non provengono da alcun ricoprimento di X) si viene a definire un'applicazione naturale

$$\widetilde{\pi} : H^1(X, G_X) \to H^1(X', G_{X'}) . \tag{8}$$

Dimostriamo che vale la proposizione 1, enunciata nell'introduzione: *l'applicazione* (8) *è iniettiva.*

Siano ξ_1, ξ_2 due elementi di $H^1(X, G_X)$ con

$$\widetilde{\pi}(\xi_1) = \widetilde{\pi}(\xi_2) . \tag{9}$$

Indichiamo con $\mathfrak{U}$ un ricoprimento di X, tanto fine che sia possibile rappresentare ξ_1 e ξ_2 mediante due elementi $\xi_{1,\mathfrak{u}}$, $\xi_{2,\mathfrak{u}}$ di $H^1(\mathfrak{U}, G_X)$. Se è

$$\xi_{1,\mathfrak{u}} \neq \xi_{2,\mathfrak{u}} \tag{10}$$

dev'essere anche

$$\pi^{\mathfrak{u}}(\xi_{1,\mathfrak{u}}) \neq \pi^{\mathfrak{u}}(\xi_{2,\mathfrak{u}}) . \tag{11}$$

Ricordando che, dati due ricoprimenti $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$ di uno spazio topologico T, con $\mathfrak{V}$ raffinamento di $\mathfrak{U}$, e detto F un fascio qualunque sopra T, l'applicazione naturale

$$H^1(\mathfrak{U}, F) \to H^1(\mathfrak{V}, F)$$

è iniettiva, si riconosce che (11) contraddice (9), vera per ipotesi. Pertanto non può essere vera (10); risulta quindi

$$\xi_1 = \xi_2 ,$$

che è precisamente la tesi della proposizione 1.

§ 3. Dimostriamo ora il corollario 1 della proposizione 1, enunciato nell'introduzione.

Ad ogni spazio fibrato principale E, con gruppo strutturale G, dato sopra la varietà complessa X, resta associato uno spazio fibrato principale $E' = \pi^* (E)$, sopra X', con lo stesso gruppo strutturale. Se E appartiene alla classe di equivalenza $\xi \in H^1 (X, G_X)$ e se E' appartiene alla classe di equivalenza $\xi' \in H^1 (X', G_{X'})$, si ha

$$\tilde{\pi} (\xi) = \xi' .$$

Indicando poi, secondo una notazione usuale, con E/G^0 lo spazio fibrato analitico ottenuto mediante identificazione dei punti di una fibra di E che possono ottenersi l'uno dall'altro mediante moltiplicazione (a destra) con un opportuno elemento di G^0, si ha la relazione

$$\pi^* (E)/G^0 = \pi^* (E/G^0) ,$$

cioè

$$E'/G^0 = \pi^* (E/G^0) .$$

La fibra tipo di E/G^0 e di E'/G^0 è lo spazio G/G^0. Per l'ipotesi fatta su tale spazio, se U è un aperto di X e se $U' = \pi^{-1} (U)$, ad ogni applicazione olomorfa

$$h_{U'} : U' \rightarrow G/G^0$$

corrisponde un'applicazione olomorfa

$$h_U : U \rightarrow G/G^0 .$$

Poichè una sezione globale di uno spazio fibrato si assegna mediante una famiglia di applicazioni locali degli aperti di un ricoprimento dello spazio base nella fibra tipo, le quali soddisfino a delle « relazioni di compatibilità », quanto precede garantisce che ad ogni sezione globale olomorfa di E'/G^0 corrisponde una sezione globale olomorfa di E/G^0. Viceversa è evidente che ad ogni sezione globale olomorfa di E/G^0 corrisponde una sezione globale olomorfa di E'/G_0 [4]; d'altra parte l'esistenza di una sezione globale olo-

---

[4] Più in generale vale la proposizione seguente: *Sia B' uno spazio fibrato sopra X', B uno spazio fibrato sopra X, con $B' = \pi^* (B)$; la fibra tipo di entrambi gli spazi fibrati sia lo spazio complesso F. Se F ammette un rivestimento analitico mediante uno spazio complesso olomorficamente separato, si ha corrispondenza biunivoca tra le sezioni globali di B e le sezioni globali di B'.*

morfa dello spazio fibrato E/G^0 è condizione necessaria e sufficiente perchè il gruppo strutturale della classe $\xi \in H^1(X, G_X)$ alla quale appartiene E sia riducibile da G a G^0 (cfr. ad es. [8], n. 7), e quindi l'aver provato che E'/G^0 ammette una sezione globale olomorfa allora e solo che lo stesso fatto è vero per E/G^0 prova il corollario 1.

Nel caso particolare in cui si prenda come G^0 il sottogruppo di G formato dal solo elemento identità, dal corollario 1 si deduce il seguente

COROLLARIO 2. *Si conservino le notazioni adoperate sopra; sia B' uno spazio fibrato analitico sopra X', avente per fibra lo spazio complesso F; B' sia indotto da uno spazio fibrato B sopra X (con la stessa fibra F). B' è equivalente allo spazio fibrato banale $X' \times F$ allora e solo che B è equivalente allo spazio fibrato banale $X \times F$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI-W. STOLL: *Extension of Holomorphic Maps.* Annals of Math. (in corso di stampa).

[2] H. GRAUERT: *Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen.* Math. Annalen **135** (1958) 263-273.

[3] H. GRAUERT-R. REMMERT: *Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume.* Math. Annalen **129** (1955) 274-296.

[4] H. GRAUERT R. REMMERT: *Komplexe Räume.* Math. Annalen **136** (1958) 245-318.

[5] F. HIRZEBRUCH: *Neue topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie.* Erg der Math., Neue Folge, H. 9, Springer 1956.

[6] R. REMMERT: *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume.* Math. Annalen **133** (1957) 328-370.

[7] R. REMMERT: *Über komplexe Liesche Gruppen.* In preparazione.

[8] N. STEENROD: *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton Math. Series, N. 14; Princeton 1951.