ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

Y. THIRY

Remarques sur les équations canoniques de la mécanique

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 2 (1959), p. 205-221

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_2_205_0>

REMARQUES SUR LES EQUATIONS CANONIQUES DE LA MECANIQUE

par Y. THIRY

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon

Introduction

Le théorème de Cartan indique que les équations du mouvement d'un système dynamique à lagrangien, à n degrés de liberté, sont caractérisées par le fait d'admettre l'invariant intégral absolu de Cartan

$$\Omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i - dH \wedge dt \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Le problème canonique, qui consiste à ramener à des équations du premier ordre résolues par rapport aux dérivées premières, le système différentiel, d'ordre $2n$, aux trajectoires du système, est alors résolu en formant le système caractéristique de Ω; on obtient les équations canoniques d'Hamilton, qui admettent pour fonction génératrice l'hamiltonien H.

Nous présentons d'abord l'élaboration matricielle du système caractéristique de Ω; nous obtenons ainsi les équations canoniques d'Hamilton sous une forme matricielle condensée qui met en évidence le rôle joué par l'opérateur E, de carré $-I$, dans l'espace d'extension en phase.

Les problèmes du changement des variables se présentent sous différents aspects. Nous exposons le suivant : changement de variables indépendant du temps et ne portant que sur les variables p_i, q_i de façon à assurer le maintien de la fonction génératrice primitive. Il nous permet de mettre en évidence la signification intrinsèque du lien que les équations du mouvement établissent entre la vitesse du point figuratif du système dans l'espace d'extension en phase et le gradient en ce point de l'hamiltonien H.

Demandant ensuite à un tel changement de variables de conserver le caractère canonique aux équations du mouvement, nous présentons la « condition canonique » sous une forme matricielle. Les aspects classiques de cette condition en découlent immédiatement. En particulier, les crochets de Lagrange et les parenthèses de Poisson s'introduisent de façon naturelle et maniable.

Le quatrième paragraphe est destiné à montrer comment la méthode matricielle s'adapte à la méthode de la variation des constantes. Le rôle joué pas les constantes canoniques est ainsi aisément mis en évidence.

Le but de ces quatre premiers paragraphes n'est que de montrer, sans faire un exposé général et cohérent, que la méthode matricielle constitue non seulement un procédé d'exposition agréable, mais encore un instrument de recherche bien adapté à ce genre de questions. C'est ainsi que nous nous sommes limités aux changements de variables précités et que nous nous contentons de faire remarquer l'intérêt de la méthode matricielle dans les problèmes de vibrations, linéaires ou non, d'un système à un nombre quelconque de degrés de liberté et dans tout travail mené jusqu'à l'exploitation numérique à l'aide de machines à calculer.

Le dernier paragraphe relève de préoccupations différentes. Dans le cas où la fonction génératrice ne dépend pas du temps, le système différentiel aux trajectoires du système est ramené à un système différentiel d'ordre $2n - 2$ et à une quadrature. Dans le cas où la fonction génératrice dépend du temps, on est amené à considérer le temps comme une $n + 1$ ième variable q^{n+1} et à lui associer une variable conjuguée p_{n+1}. En considérant alors a priori une nouvelle fonction génératrice, qui se trouve être égale à $H + p_{n+1}$ (1), on obtient avec les $2n + 2$ variables q^α, p_α $(\alpha = 1, 2, \ldots n + 1)$ un résultat analogue à celui obtenu avec les $2n$ variables q^i, p_i dans le cas où la fonction génératrice ne dépend pas du temps.

Nous montrons comment on peut procéder à la construction effective de la nouvelle fonction génératrice. C'est le ds^2 d'Eisenhart (2) qui fournit cette construction. C'est dans ce cadre, faisant intervenir une $n + 2$ ième variable q^0, que le fait que la variable canoniquement conjugée du temps est $-H$ apparaît clairement.

I.

Formation du système caractéristique de l'invariant intégral de Cartan $\Omega = dp_i \wedge dq_i - dH \wedge dt$.

La forme Ω étant fermée, son système caractéristique se réduit au système simplement associé, que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées de

---

(1) POINCARÉ, *Leçons de Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, 1905, tome I, p. 14. CHAZY, *Mécanique Céleste*, Collection Euclide, P. U. F., 1953 p. 35.

(2) EISENHART, *Dynamical trajectories and geodesics*, Ann. of Math. 1929. LICHNEROWICZ, *Eléments de Calcul tensoriel*, A. Colin, 1950, p. 146. Y. THIRY, Journ. de Math., t. XXX, Fasc. 3, 1951, p. 303.

la forme Ω par rapport à dp_i, dq_i, dt. Ces dérivées, dont la définition et l'expression matricielle peuvent être d'abord données pour un seul terme d'une forme quadratique extérieure, sont aisément calculées à partir de l'expression matricielle de la valeur de cette forme pour deux différentiations d et δ.

En explicitant les calculs dans les cas où le nombre de paramètres de position est 2, nous écrivons :

$$\Omega(d,\delta) = [dp_1\, dp_2\, dq_1\, dq_2 - dH\, dt] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ -\delta H \\ \delta t \end{bmatrix}$$

Pour expliciter δH, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ -\delta H \\ \delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -H_{p_1} & -H_{p_2} & -H_{q_1} & -H_{q_2} & 0 & -H_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ -- \\ \delta t \end{bmatrix}.$$

La suppression de l'avant-dernière ligne de la dernière matrice correspond au fait que le système caractéristique ne sera formé que de $2n+1$ équations.

Par transposition on a :

$$[dp_1\, dp_2\, dq_1\, dq_2 - dH\, dt] = [dp_1\, dp_2\, dq_1\, dq_2 \mid dt] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -H_{p_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -H_{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -H_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -H_{q_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -H_t & 1 \end{bmatrix}$$

et $\Omega(d, \delta)$ s'écrit :

$$[dp_1\, dp_2\, dq_1\, dq_2 \mid dt] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -H_{p_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -H_{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -H_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -H_{q_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -H_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -H_{p_1} & -H_{p_2} & -H_{q_1} & -H_{q_2} & 0 & -H_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ -\,- \\ \delta t \end{bmatrix}$$

$$= [dp_1\, dp_2\, dq_1\, dq_2 \mid dt] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{p_1} \\ H_{p_2} \\ H_{q_1} \\ H_{q_2} \end{bmatrix} \delta t \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_{p_1}\delta p_1 + H_{p_2}\delta p_2 + H_{q_1}\delta q_1 + H_{q_2}\delta q_2 \end{bmatrix}$$

Cette expression met en évidence la matrice uni-colonne des dérivées de Ω par rapport à $dp_1, dp_2, dq_1, dq_2, dt$, si bien que le système caractéristique cherché s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{p_1} \\ H_{p_2} \\ H_{q_1} \\ H_{q_2} \end{bmatrix} \delta t = 0 \\ H_{p_1}\delta p_1 + H_{p_2}\delta p_2 + H_{q_1}\delta q_1 + H_{q_2}\delta q_2 = 0 . \end{array} \right.$$

On sait d'ailleurs que, le rang de Ω étant $2n$, la dernière équation est une conséquence des précédentes.

Nous obtenons donc les équations canoniques d'Hamilton pour un système à lagrangien à n degrées de liberté sous la forme :

$$\begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_p \\ H_q \end{bmatrix}$$

I et O représentant respectivement la matrice unité et la matrice nulle à n lignes et n colonnes, $\dot{p}$ et $\dot{q}$ les matrices uni-colonnes des dérivées par rapport au temps des p_i et des q_i, H_p et H_q les matrices uni-colonnes des dérivées partielles de H par rapport aux p_i et aux q_i.

On peut encore écrire, avec des notations qui s'expliquent d'elles-mêmes :

$$E \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_p \\ H_q \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} H_q \\ H_p \end{bmatrix}, \quad \dot{Q} = E \,\mathrm{grad}_Q H.$$

La matrice E représente dans l'espace d'extension en phase rapporté au système de coordonnées locales p_i, q_i un opérateur de carré $-I$, et l'on a :

$$E = -E' = -\overset{-1}{E},$$

l'accent désignant la transposition.

Pour un système à un seul degré de liberté, cet opérateur représente dans un plan rapporté au système de coordonnées rectangulaires q et p, la rotation de $-\dfrac{\pi}{2}$.

Nous énoncerons le résultat sous la forme suivante :

La valeur pour d et δ de l'invariant intégral absolu $dp_i \wedge dq_i$ de Poincaré (obtenu en « tronquant » celui de Cartan) s'écrivant

$$[dp' \; dq'] \, E \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \end{bmatrix},$$

les équations canoniques d'Hamilton s'écrivent à l'aide de la même matrice E sous la forme

$$E \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_p \\ H_q \end{bmatrix}. \tag{I-1}$$

II.

Changement des variables.

Effectuons un changement de variables (indépendant du temps) dans l'espace d'extension en phase en définissant les anciennes variables p_i et q_i en fonction de nouvelles variables dont les n premières seront désignées par r_i et les n dernières par s_i, sans qu'il soit question pour l'instant de relation de conjuguaison entre les r_i et les s_i. Gardons de plus la même fonction génératrice H.

J désignant la matrice jacobienne des fonctions p_i, q_i des r_i, s_i on a

$$\begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \\ -\delta H \\ \delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & O \\ O & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta s \\ -\delta H \\ \delta t \end{bmatrix},$$

où dans le second membre on a remplacé dans H les p_i, q_i en fonction des r_i, s_i. Par trasposition, on a

$$[dp' \; dq' \; - dH \; dt] = [dr' \; ds' \; - dH \; dt] \begin{bmatrix} J' & O \\ O & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix},$$

si bien que

$$\Omega(d, \delta) = [dp' \; dq' \; - dH \; dt] \begin{bmatrix} E & O \\ O & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \\ -\delta H \\ \delta t \end{bmatrix}$$

s'ecrit

$$[dr' \; ds' \; - dH \; dt] \begin{bmatrix} J' & O \\ O & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ O & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & O \\ O & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta s \\ -\delta H \\ \delta t \end{bmatrix}.$$

Pour la valeur pour d et δ de l'invariant intégral tronqué, nous avons:

$$[dp'\ dq']\ E \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \end{bmatrix} = [dr'\ ds']\ J'\ E\ J \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta s \end{bmatrix}.$$

En explicitant dH et δH comme précédemment, il vient:

$$\Omega(d, \delta) = [dr'\ ds' \mid dt] \begin{bmatrix} I & \begin{matrix} -H_r \\ -H_s \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} 0 \\ -H_t \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J' & O \\ O & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ O & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} J & O \\ O & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -H_r\ -H_s & 0\ -H_t \\ O & 0\ \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta s \\ -- \\ \delta t \end{bmatrix}.$$

Le calcul à l'aide des sous-matrices donne:

$$[dr'\ ds' \mid dt] \begin{bmatrix} J'\ E\ J \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_r \\ H_s \end{bmatrix} \delta t \\ \cdots\cdots\cdots \\ H_r\, \delta r + H_s\, \delta s \end{bmatrix}.$$

si bien que le système caractéristique de Ω s'écrit en variables r_i, s_i:

$$\text{(II-1)} \qquad J'\ E\ J \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_r \\ H_s \end{bmatrix}.$$

Cette étude nous fournit la signification intrinsèque du lien que les équations du mouvement établissent entre la dérivée par rapport au temps du point représentatif du système dynamique dans l'espace d'extension en phase et le gradient en ce point de l'hamiltonien H: si A désigne la matrice antisymétrique qui permet d'exprimer la valeur pour d et δ de l'invariant intégral de Poincaré attaché aux trajectoires du système sous la forme

$$[dr'\ ds']\ A \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta s \end{bmatrix},$$

les équations du mouvement s'écrivent à l'aide de la même matrice sous la forme :

$$A \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_r \\ H_s \end{bmatrix} .$$

Exprimons ce résultat sous forme tensorielle :

Supposons l'espace d'extension en phase rapporté à un système de coordonnées locales quelconques x^α $(\alpha = 1, 2, \ldots 2n)$; soit $F_{\alpha\beta}$ le tenseur antisymétrique qui permet d'exprimer la valeur pour d et δ de l'invariant intégral de Poincaré sous la forme

$$F_{\alpha\beta}\,(dx^\alpha\,\delta x^\beta - \delta x^\alpha\,dx^\beta) \qquad (\alpha < \beta) ;$$

les équations du mouvement s'écrivent alors

$$F_{\alpha\beta}\,V^\alpha = \mathrm{grad}_\beta\,H \quad \text{ou} \quad V^\alpha = F^{\alpha\beta}\,\mathrm{grad}_\beta\,H \qquad (F^{\alpha\varrho}F_{\beta\varrho} = \delta^\alpha_\beta) ,$$

V^α désignant le vecteur vitesse du point figuratif du système.

III.

La condition canonique.

L'étude précédente montre d'une manière immédiate qu'il revient au même de demander que les nouvelles variables soient canoniques, c'est-à dire qu'elles se séparent en deux séries r_i et s_i et que les équations transformées (II-1) de (I-1) soient les équations canoniques engendrées per la fonction génératrice H ou de demander que l'invariant de Poincaré s'écrive en nouvelles variables sous la forme $dr_i \wedge ds_i$.

Ainsi, la « condition canonique » s'écrit :

(III-1) $$J'\,E\,J = E$$

De cette forme condensée de la condition canonique, on tire les interprétations classiques et les remarques suivantes :

a) La condition (III-1) traduit le fait que

$$[dp'\;dq']\;E\begin{bmatrix}\delta\,p\\ \delta\,q\end{bmatrix} = [dr'\;ds']\;E\begin{bmatrix}\delta r\\ \delta s\end{bmatrix}$$

soit

$$dp_i \wedge dq_i - dr_i \wedge ds_i = 0$$

c'est-à-dire le fait que

$$p\,dq - r\,ds$$

est une différentielle totale exacte.

Les changements de variables du paragraphe précédent ne tenaient pas compte de la structure d'espace fibré de l'espace d'extension en phase et nous ont fourni une interprétation des équations du mouvement indépendante de cette structure. Ici au contraire cette structure joue un rôle essentiel : les changements de variables qui sont canoniques sont caractérisés parmi les précédents par le fait qu'ils respectent cette structure.

b) Si l'on désigne par $K = \overset{-1}{J}$ la matrice jacobienne des nouvelles variables r_i, s_i définies en fonction des anciennes variables p_i, q_i, la condition canonique peut s'écrire sous l'une ou l'autre des quatre formes suivantes :

$$J' E J = J E J' = E \tag{III-2}$$

$$K \overset{-1}{E} K' = K' \overset{-1}{E} K = \overset{-1}{E} \tag{III-3}$$

(on a d'ailleurs aussi $K' E K = K E K' = E$).

c) L'explicitation de la condition canonique sous la forme (III-2) conduit immédiatement à la formation des crochets de Lagrange.

Un calcul simple montre en effet que $J' E J$ n'est autre que la matrice L des crochets de Lagrange. Pour l'exprimer commodément il est préférable de désigner par une même lettre ϱ_α les variables r_i, s_i qui ne sont pas encore séparées en deux séries distinctes. L'élément de L placé à l'intersection de la α ième ligne et de la β ième colonne est le crochet de Lagrange :

$$L_{\alpha\beta} = \sum_i \frac{D(p_i, q_i)}{D(\varrho_\alpha, \varrho_\beta)} \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, \dots n) \\ (\alpha, \beta = 1, 2, \dots 2n)\end{matrix}$$

et la condition canonique

$$L = E$$

se traduit par $n(2n - 1)$ conditions portant sur les crochets de Lagrange.

d) De même, l'explicitation de la condition canonique sous la forme (III-3) conduit à la formation des parenthèses de Poisson dont la matrice P a pour élément général

$$P_{\alpha\beta} = \sum_i \frac{D(\varrho_\beta, \varrho_\alpha)}{D(p_i, q_i)}$$

et la condition canonique s'écrit

$$P = \overset{-1}{E}.$$

Les relations qui existent entre les crochets de Lagrange et les parenthèses de Poisson sont d'ailleurs immédiatement données dans notre terminologie par

$$LP = (J'\,E\,J)\,(K\,\overset{-1}{E}\,K') = I$$

et le fait que

$$\det L = (\det P)^{-1} = (\det J)^2 = (\det K)^{-}$$

y est évident.

IV.

Variation des constantes.

a) Considérons le système différentiel :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1(x_i\,,\,t) \\ F_2(x_i\,,\,t) \\ \vdots \\ F_n(x_i\,,\,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(x_i\,,\,t) \\ G_2(x_i\,,\,t) \\ \vdots \\ G_n(x_i\,,\,t) \end{bmatrix}$$

que nous écrirons

$$\text{(IV-1)} \qquad \dot{X} - F = G$$

et supposons que nous connaissions le solution générale du système sans second membre $\dot{X} - F = 0$, dépendant effectivement de n constantes arbitraires z_i.

La méthode de la variation des constantes consiste à chercher la solution générale de (IV-1) en supposant ces quantités z_i fonctions de t. On a alors :

$$\dot{X} = J\,\dot{Z} + X_t\,,$$

J désignant la matrice jacobienne des fonctions x_i des z_i et X_t la matrice uni-colonne des dérivées partielles de ces fonctions x_i par rapport à t.

(IV-1) devient

$$J\dot{Z} - X_t - F = G\,.$$

Cette équation, vérifiée pour $G = 0$, $Z = $ cste, se réduit à :

(IV-2) $$J\dot{Z} = G$$

L'intégration du système $\dot{Z} = \overset{-1}{J}\, G$ à laquelle on est ainsi ramené est a priori aussi difficile que celle de (IV-1). Aussi bien la méthode n'est-elle utilisée que dans des cas spéciaux ; nous ne disons quelques mots que de deux d'entre eux.

b) Une équation différentielle d'ordre n linéaire peut s'écrire sous la forme

(IV-3) $$\dot{Y} + P\,Y = R$$

où

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \overset{(n)}{y} \end{bmatrix};$$

P et R sont des matrices, carrée et uni-colonne respectivement, dont les éléments sont des fonctions connues de la variable t.

Supposons que nous connaissions n solutions particulières y_i indépendantes de l'équation sans second membre. Nous en formerons la « matrice wronskienne » :

$$W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & & \dot{y}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{(n-1)}{y_1} & \overset{(n-1)}{y_2} & & \overset{(n-1)}{y_n} \end{bmatrix}$$

qui nous fournit la solution générale de l'équation sans second membre en ce sens que, Z étant une matrice uni-colonne de constantes arbitraires, $W\,Z$ satisfait à l'équation sans second membre :

$$\dot{W}\,Z + P\,W\,Z = 0\,.$$

Pour intégrer l'équation avec second membre, nous poserons $Y = WZ$, en supposant Z fonction de t. On a :

$$\dot{Y} = \dot{W}\,Z + W\,\dot{Z}$$

et (IV-3), qui s'écrit :

$$\dot{W} Z + W \dot{Z} + P W Z = R$$

se réduit à :

(IV-4) $$W \dot{Z} = R \qquad \text{ou} \qquad \dot{Z} = \overset{-1}{W} R .$$

C'est ainsi que pour

$$\ddot{y} + p(t)\,\dot{y} + q(t)\,y = r(t),$$

qui s'écrit sous la forme (IV-3) en posant :

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix},$$

(IV-4) donne en explicitant :

(IV-4') $$\begin{cases} \dot{z}_1\, y_1 + \dot{z}_2\, y_2 = 0 \\ \dot{z}_1\, \dot{y}_1 + \dot{z}_2\, y_2 = r ; \end{cases}$$

la « condition » imposée (IV-4') à $\dot{z}_1$ et $\dot{z}_2$ est ainsi amenée de façon plus naturelle que cela a lieu d'habitude.

c) Considérons un système d'équations canoniques sous le forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_q \\ H_p \end{bmatrix},$$

soit

$$\dot{Q} = E \operatorname{grad}_Q H ,$$

et supposons que nous en connaissions la solution générale, dépendant effectivement de $2n$ constantes arbitraires z_α.

Appliquons le méthode de la variation des constantes aux équations du mouvement troublé par des forces perturbatrices représentées par une fonction perturbatrice R, c'est-à-dire à :

$$\dot{Q} = E \operatorname{grad}_Q (H + R) .$$

(IV-2) donne

(IV-5) $$J \dot{Z} = E \operatorname{grad}_Q R ,$$

J désignant la matrice jacobienne des fonctions q_i, p_i des quantités z_a. Avec la matrice inverse K, nous avons :

$$\mathrm{grad}_Q\, R = K' \,\mathrm{grad}_Z\, R$$

et (IV-5) s'écrit :

$$\dot{Z} = K\, E\, K' \,\mathrm{grad}_Z\, R\,. \tag{IV-6}$$

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que le système différentiel aux constantes variées soit lui-même canonique est

$$K\, E\, K' = E \qquad (\text{ou} \quad J'\, E\, J = E).$$

Si les constantes intervenant dans la solution du problème non troublé satisfont à cette condition, on dit qu'elles forment un système de constantes canoniques.

En Mécanique Céleste, dans l'étude du mouvement elliptique troublé, on élabore aisément un système de six constantes canoniques à partir des « éléments elliptiques » a, e, i, θ, ϖ, τ du mouvement elliptique non troublé. Les équations (IV-6) de ce cas, que l'on a intérêt à élaborer matriciellement, portent le nom d'équations de la théorie des perturbations, ou d'équations de Lagrange de le Mécanique Céleste.

V.

Nous établissons dans ce paragraphe le résultat suivant :

Dans le cas où l'hamiltonien H dépend explicitement du temps, on peut, par l'introduction d'un paramètre supplémentaire, écrire les équations du mouvement sous forme d'un système différentiel canonique d'ordre $2n + 4$, *dont l'intégration peut être ramenée à celle d'un système différentiel canonique d'ordre* $2n$ *et à une quadrature.*

L'interprétation géométrique de ce résultat est fournie par le théorème d'Eisenhart. Ce résultat permet d'appliquer au cas où H dépend du temps les propriétés des systèmes canoniques où la fonction génératrice ne dépend pas du temps.

Considérons la métrique improprement riemannienne à $n + 2$ dimensions définie à l'aide d'un paramètre supplementaire q^0 par

$$ds^2 = 2\, L\, dt^2 + 2\, dt\, dq^0\,.$$

Posons $t = q^{n+1}$ et explicitons le lagrangien L :

$$(\text{V-1}) \quad ds^2 = a_{ij}\, dq^i\, dq^j + 2b_i\, dq^i\, dq^{n+1} + 2\,(T_0 + U)\,(dq^{n+1})^2 + 2\, dq^{n+1}\, dq^0$$

$$= \gamma_{\alpha\beta}\, dq^\alpha\, dq^\beta \qquad \begin{pmatrix} i\,,\, j = \quad 1, 2, \ldots\, n \\ \alpha\,,\beta = 0,\, 1,\, 2, \ldots ,\, n + 1 \end{pmatrix}$$

Formons la fonction génératrice qui engendre les équations canoniques des géodésiques de ce ds^2, définies en fonction du paramètre s. On sait (³) que cette fonction, que nous désignerons par $\mathcal{H}$ est

$$\frac{1}{2}\, \gamma^{\alpha\beta}\, p_\alpha\, p_\beta \qquad \left(v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}\, \frac{dq^\beta}{ds}\right).$$

L'accent désignant la dérivation par rapport à l'arc s, considérons la fonction

$$F(q^i, q^{n+1}, q'^0, q'^i, q'^{n+1}) = a_{ij}\, q'^i\, q'^j + 2\, b_i\, q'^i\, q'^{n+1} + 2\,(T_0 + U)\,(q'^{n+1})^2 + 2\, q'^{n+1} q'^0.$$

Le système d'équations linéaires définissant les p_α en fonction des q'^α est

$$\begin{cases} p_0 \quad = q'^{n+1} \\ p_i \quad = a_{ij}\, q'^j + b_i\, q'^{n+1} \\ p_{n+1} = b_i\, q'^i + 2\,(T_0 + U)\, q'^{n+1} + q'^0\,. \end{cases}$$

En le résolvant par rapport aux q'^α et en portant ces valeurs dans $(V\text{-}1)$, on obtient :

$$\mathcal{H}\,(q^i\,,\, q^{n+1}\,,\, p_0\,,\, p_i\,,\, p_{n+1}) = S\,(p_0\,,\, p_i) + (T_0 + U)\, p_0^2 + p_0\, p_{n+1}\,,$$

S désignant l'expression $\dfrac{1}{2}\, a_{ij}\, q'^i\, q'^j$ où les q'^i sont supposés remplacés en fonction des p_α ; c'est donc une fonction des p_i et de p_0. D'autre part, S et $T_0 + U$ sont des fonctions des q^α à l'exclusion de q^0.

(³) CHAZY. *La théorie de la Relativité et la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, 1930, tome II, p. 145.

Les équations canoniques engendrées par $\mathcal{K}$ sont :

$$\text{(V-2)} \quad \frac{d q^0}{d s} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_0} \qquad \text{(V-5)} \quad \frac{d p_0}{d s} = 0$$

$$\text{(V-3)} \quad \frac{d q^i}{d s} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_i} \qquad \text{(V-6)} \quad \frac{d p_i}{d s} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q^i}$$

$$\text{(V-4)} \quad \frac{d q^{n+1}}{d s} = p_0 \qquad \text{(V-7)} \quad \frac{d p_{n+1}}{d s} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q^{n+1}}.$$

(V-5) et (V-4) fournissent, en choisissant les constantes d'intégration de façon à obtenir l'interprétation la plus simple :

$$p_0 = 1, \qquad q^{n+1} = t = s,$$

ce qui signifie que les géodésiques considérées seront supposées décrites d'un mouvement à vitesse unitaire.

On dispose alors de l'intégrale première :

$$F(q^i, q^{n+1}, \dot{q}^0, \dot{q}^i, 1) = 1$$

qui donne :

$$\text{(V-8)} \qquad \frac{d q^0}{d t} = \frac{1}{2} - L.$$

Cette équation évite le calcul du second membre de (V-2) et sera substituée à cette équation.

Ayant ainsi établi à nouveau pour q^0 le résultat du théorème d'Eisenhart, nous pouvons nous limiter aux considérations suivantes : portons $p_0 = 1$ dans l'expression de $\mathcal{K}$; S devient alors l'expression T_2 dans laquelle les $\dot{q}^i$ sont remplacés en fonction des p_i donnés par

$$p_i = a_{ij}\, \dot{q}^j + b_i$$

et l'on posera

$$\mathcal{K}(q^i, t, p_i, p_{n+1}) = \mathcal{K}(q^i, q^{n+1}, 1, p_i, p_{n+1}) = T_2 - T_0 - U + p_{n+1} = H + p_{n+1}.$$

Les équations (V-3) et (V-6) diviennent alors les équations canoniques engendrées par H :

$$\text{(V-9)} \qquad \frac{d q^i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Quant à l'équation (V-7), qui donne p_{n+1}, elle est avantageusement remplacée par l'intégrale première

$$H + p_{n+1} = C; \tag{V-10}$$

en effet, les équations (V-2, 3, 4, 5, 6, 7) ont pour conséquence

$$\frac{d\mathcal{K}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial s}$$

et (V-7) donne alors dans notre interprétation restreinte :

$$\frac{dp_{n+1}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = -\frac{dH}{dt}.$$

En définitive, le système d'ordre $2n + 4$ constitué par les équations (V-2, 3, 4, 5, 6, 7) peut être ramené au système d'ordre $2n$ constitué par les équations (V-9) et à la quadrature (V-8). Les intégrations auxquelles nous avons procédé permettent de faire le raccord avec les équations classiques, mais ce n'est que dans le cadre de cet exposé que l'on peut interpréter clairement, à l'aide de l'intégrale première (V-10), le fait que la variable conjuguée du temps est $-H$.

Signalons encore pour terminer que les considérations développées dans ce paragraphe permettent de donner de l'équation d'Hamilton-Jacobi l'interprétation suivante [4]: cette équation apparaît comme étant l'équation aux dérivées partielles

$$\gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial q^\beta} = 1$$

dont les caractéristiques, en fonction du paramètre t, sont les géodésiques, pour la valeur 1 de l'intégrale F c'est-à-dire décrites d'un mouvement à vitesse unitaire, du ds^2 d'Eisenhart.

---

[4] Y. THIRY, Communication au Congrès de l'A.F.A.S., Tunis, 1951.

BIBLIOGRAPHIE

CHAZY - *La théorie de la Relativité et la Mécanique Céleste,* Gauthier-Villars, 1930.
» - *Mécanique Céleste,* Collection Euclide, P.U.F., 1953.

LICHNEROWICZ - *Eléments de Calcul tensoriel,* A. Colin, 1950.
» - *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme,* Masson, 1955.

POINCARÉ - *Leçons de Mécanique Céleste,* Gauthier-Villars, 1905.

THIRY - *Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ,* Journ. de Math., t. XXX, fasc. 3, 1951.

WINTNER - *The analytical foundations of Celestial Mechanics,* Princeton University Press, 1947.