

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIUSEPPE GEMIGNANI

**Sulle trasformazioni cremoniane che appartengono ad  
una reciprocità non degenerare**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 12,  
n° 4 (1958), p. 479-488*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1958\\_3\\_12\\_4\\_479\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_4_479_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SULLE TRASFORMAZIONI CREMONIANE CHE APPARTENGONO AD UNA RECIPROCIÀ NON DEGENERERE

Nota di GIUSEPPE GEMIGNANI (a Pisa)

In una Sua Memoria del 1942<sup>(1)</sup> M. VILLA dimostrava (fra l'altro) che una trasformazione monoidale (di de Jonquières) tra due piani, è rappresentata sulla loro varietà di Segre, da una superficie immersa in un iperpiano dell' $S_8$  a cui la varietà di Segre appartiene.

In quell'occasione Egli proponeva di stabilire se queste corrispondenze fossero le uniche, tra le trasformazioni cremoniane, godenti di questa proprietà; cioè, se una trasformazione tra due piani godente di questa proprietà, debba essere necessariamente del tipo di de Jonquières.

In una Sua Nota<sup>(2)</sup> MURACCHINI rispondeva affermativamente al quesito nel caso in cui l'ordine della trasformazione fosse non inferiore a quattro.

Nel presente lavoro, servendosi di una osservazione relativa ad una equazione diofantea di forme (v. n. 1), si dimostra che le uniche trasformazioni cremoniane tra due spazi di dimensione  $r$  ( $r \geq 2$ ) appartenenti ad una reciprocità non degenerere, sono quelle rappresentate, sulla varietà di Segre dei due spazi, da una  $V_r$  ottenuta secondo la varietà di Segre con uno spazio lineare di dimensione opportuna; ciò significa che una trasformazione cremoniana  $\tau$  tra due spazi  $S_r$  e  $S'_r$ , che appartiene ad una reciprocità non degenerere, appartiene ad  $r$  linearmente indipendenti. Nel caso particolare del piano le uniche trasformazioni soddisfacenti a questa condizione sono quindi quelle quadratiche.

---

<sup>(1)</sup> M. VILLA, *Superficie della  $V_4^6$  di Segre e relative trasformazioni puntuali*, Mem. Acc. Sci. Ist. Bologna, Serie II, t. IX.

<sup>(2)</sup> A. MURACCHINI, *Sulla superficie rappresentativa di una trasformazione cremoniana tra piani*, Boll. Un. Mat. It. Serie III Anno V, 1950.

1. — Consideriamo l'equazione diofantea

$$(1) \quad x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \dots + x_h \varphi_h \equiv 0$$

ove  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$  sono forme incognite nelle indeterminate  $x_1, x_2, \dots, x_r$  ( $r \geq h$ ) di un certo grado  $n$ .

È facile vedere<sup>(3)</sup> che: *condizione necessaria e sufficiente affinché  $h$  forme soddisfino ad essa è che tali forme siano del tipo*

$$\varphi_i \equiv \sum_{j=1}^h \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

essendo le  $\alpha_{ij}$  polinomi omogenei nelle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_r$  e tali che si abbia

$$\alpha_{ij} \equiv 0 \quad (\text{per } i = j)$$

$$\alpha_{ij} \equiv -\alpha_{ji} \quad (\text{per } i \neq j).$$

La sufficienza è evidente. Per provare la necessità osserviamo che nel caso che sia  $h = 2$ , dalla

$$(1') \quad x_1 \varphi_1 \equiv -x_2 \varphi_2$$

segue che  $\varphi_1$  è divisibile per  $x_2$  e quindi può porsi

$$\varphi_1 \equiv \alpha_{12} x_2$$

onde sostituendo nella (1') e dividendo per  $x_2$  si ha:

$$\varphi_2 \equiv -\alpha_{12} x_1.$$

Ammissa pertanto la proposizione per una equazione del tipo (1) contenente  $h' < h$  forme incognite, dimostriamola per  $h$ .

Poichè la  $\varphi_1$  non può possedere termini che non contengano almeno una delle variabili  $x_2, x_3, \dots, x_h$  (perchè altrimenti vi sarebbero nel primo membro della (1) termini che non potrebbero elidersi con altri), può porsi:

$$(2) \quad \varphi_1 \equiv \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \dots + \alpha_{1h} x_h$$

da cui sostituendo nella (1) si ottiene l'altra

$$(2') \quad (\varphi_2 + \alpha_{12} x_1) x_2 + (\varphi_3 + \alpha_{13} x_1) x_3 + \dots + (\varphi_h + \alpha_{1h} x_1) x_h \equiv 0.$$

---

<sup>(3)</sup> Cfr. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva negli iperspazi*, Messina, Principato, 1923, Cap. XII, n. 16, pag. 329 II Ed.

Ma per quanto ammesso nel caso di  $h - 1$  forme si ha:

$$(2^*) \quad \varphi_i \equiv -\alpha_{1i} x_1 + \sum_{j=2}^h \alpha_{ij} x_j \quad (i = 2, 3, \dots, r)$$

le quali insieme alla (2) provano l'asserto.

2. — Consideriamo una trasformazione cremoniana  $\tau$  tra due spazi  $S_r(x_0, x_1, \dots, x_r)$  ed  $S'_r(y_0, y_1, \dots, y_r)$ . Siano

$$\varrho y_i = \varphi_i(y_0, y_1, \dots, y_r) \quad [i = 0, 1, \dots, r]$$

le equazioni della corrispondenza, essendo le  $\varphi_i$  forme di un certo grado  $n$ , linearmente indipendenti e tali che il sistema lineare di equazione

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i \varphi_i = 0$$

sia omaloidico.

Supponiamo che esista una reciprocità non degenera  $\omega$  tra i punti di  $S_r$  e gli iperpiani di  $S'_r$  la quale goda della proprietà che detto  $P$  un punto generico di  $S_r$ ,  $P'$  il suo corrispondente nella  $\tau$ ,  $\alpha'$  l'iperpiano corrispondente a  $P$  nella  $\omega$ ,  $P'$  ed  $\alpha'$  si appartengano<sup>(4)</sup>.

Cambiando opportunamente la piramide fondamentale ed il punto unità in  $S'_r$ , l'equazione della  $\omega$  assume la forma

$$\sum_{i=0}^r x_i y_i = 0$$

e quindi, per l'ipotesi fatta sulla  $\tau$ , sussisterà l'identità rispetto alle variabili  $x_0, x_1, \dots, x_r$

$$(1'') \quad \sum_{i=0}^r x_i \varphi_i(x_0, x_1, \dots, x_r) \equiv 0.$$

Per quanto osservato nel n. 1 le  $\varphi_i$  hanno espressioni del tipo

$$\varphi_i \equiv \sum_{j=0}^r \alpha_{ij} x_j \quad [i = 0, 1, \dots, r]$$

(4) Nel seguito quando una trasformazione cremoniana  $\tau$  ed una reciprocità  $\omega$  godranno di questa proprietà, diremo brevemente che  $\tau$  appartiene ad  $\omega$ ; è da notare che se si considera la varietà di Segre dei due spazi  $S_r$  ed  $S'_r$ , la sottovarietà che rappresenta la  $\tau$  giace nella sezione iperpiana che rappresenta la  $\omega$ , ma non appartiene necessariamente all'iperpiano secante.

essendo le  $\alpha_{ij}$  opportune forme di grado  $n - 1$  e tali che

$$\alpha_{ij} \equiv 0 \quad \text{per } i = j \quad \text{e} \quad \alpha_{ij} \equiv -\alpha_{ji} \quad \text{per } i \neq j.$$

Mostriamo innanzitutto che le  $\binom{r+1}{2}$  forme  $\alpha_{ij}$  ( $i < j$ ) possono essere scelte in modo che esista, per generici valori delle  $x$ , una retta per  $P$  avente le  $\alpha_{ij}$  come coordinate grassmanniane radiali. A tale scopo consideriamo il sistema

$$(3) \quad \sum_{j=0}^r (x_i z_j - x_j z_i) x_j = \varphi_i(x_0, \dots, x_r) \quad [i = 0, \dots, r].$$

Come si verifica con semplice calcolo, le matrici completa ed incompleta del sistema, hanno la caratteristica  $r$ <sup>(5)</sup>; pertanto il sistema ammette soluzioni, il che prova l'esistenza di una retta per  $P$  avente le  $\alpha_{ij}$  come coordinate grassmanniane radiali. Sia  $\sigma$  la corrispondenza che associa a  $P$  la retta di coordinate  $\alpha_{ij}$ .

Se  $z_0(x_0, \dots, x_r)$ ,  $z_1(x_0, \dots, x_r)$ ,  $\dots$ ,  $z_r(x_0, \dots, x_r)$  è una soluzione del sistema (3), i coefficienti dell'equazione di un generico iperpiano passante per la retta corrispondente a  $P(x_0, x_1, \dots, x_r)$  per la  $\sigma$ , verificano il sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_r x_r = 0 \\ \xi_0 z_0(x) + \xi_1 z_1(x) + \dots + \xi_r z_r(x) = 0. \end{cases}$$

Siano

$$\begin{array}{cccc} (\xi'_0 & , & \xi'_1 & , \dots , \xi'_r) \\ (\xi''_0 & , & \xi''_1 & , \dots , \xi''_r) \\ \dots & & \dots & & \dots \\ (\xi^{(r-1)}_0 & , & \xi^{(r-1)}_1 & , \dots , \xi^{(r-1)}_r) \end{array}$$

$r - 1$  soluzioni del sistema (4), linearmente indipendenti. Senza alterare la generalità si può senz'altro supporre che le  $\xi_k^{(i)}$  siano forme di un certo grado  $m$  nelle variabili  $x_0, x_1, \dots, x_r$ . I minori di ordine  $r - 1$  estratti

---

<sup>(5)</sup> Dette  $k$  e  $k'$  la caratteristica della matrice incompleta e della completa rispettivamente, si ha  $k \leq r$ ,  $k' \leq r$  come si verifica moltiplicando la  $i$ -esima riga della matrice completa per  $x_i$  e sommando rispetto all'indice  $i$ . Inoltre il minore di ordine  $r$  formato dalle prime  $r$  righe e dalle prime  $r$  colonne non è identicamente nullo perchè il coefficiente di  $x_r^{2r}$  è  $(-1)^r$ .

dalla matrice

$$E = \begin{vmatrix} \xi'_0 & \xi'_1 & \dots & \xi'_r \\ \xi''_0 & \xi''_1 & \dots & \xi''_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_0^{(r-1)} & \xi_1^{(r-1)} & \dots & \xi_r^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

sono proporzionali, a meno del segno, alle  $\alpha_{ij}$ ; si ha cioè

$$(5) \quad \varrho \alpha_{i_0 i_1} = (-1)^{i_0+i_1+1} q_{i_2 i_3 \dots i_r}$$

essendo  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_r$ , una permutazione dei numeri  $0, 1, \dots, r$  con  $i_0 < i_1$  e  $i_2 < i_3 < \dots < i_r$  e  $q_{i_2, i_3, \dots, i_r}$  il minore della matrice  $E$  ottenuto prendendo le  $r-1$  colonne  $i_2$ -esima,  $i_3$ -esima,  $\dots$ ,  $i_r$ -esima.

Ne segue che le coordinate  $y_0, y_1, \dots, y_r$  del punto  $P'$  corrispondente a  $P$  nella  $\tau$ , sono soluzioni del sistema:

$$(6) \quad \begin{cases} x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_r y_r = 0 \\ \xi'_0 y_0 + \xi'_1 y_1 + \dots + \xi'_r y_r = 0 \\ \dots \\ \xi_0^{(r-1)} y_0 + \xi_1^{(r-1)} y_1 + \dots + \xi_r^{(r-1)} y_r = 0 \end{cases}$$

come si vede immediatamente tenendo conto della (1'') e della (5). Mediante le (6) il sistema degli iperpiani di  $S_r$  viene riferito omograficamente ai sistemi lineari di ipersuperficie  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \dots, \Sigma^{(r-1)}$  di equazioni rispettivamente

$$\sum_{k=1}^r \lambda'_k \xi'_k = 0, \quad \sum_{k=0}^r \lambda''_k \xi''_k = 0, \dots, \sum_{k=0}^r \lambda_k^{(r-1)} \xi_k^{(r-1)} = 0$$

in guisa tale che ai punti variabili comuni ad un iperpiano ed alle  $r-1$  forme corrispondenti in  $\Sigma^{(1)}, \dots, \Sigma^{(r-1)}$  per la (6) corrisponde in  $S_r$  per la  $\tau$  lo stesso punto  $P' \equiv (q'_0, q'_1, \dots, q'_r)$ . Essendo la  $\tau$  birazionale ed essendo il sistema degli iperpiani di  $S_r$  privo di punti fissi, il punto  $P = \tau^{-1} P'$  è soluzione  $m^{r-1}$ -pla (nel senso del teorema di Bezout) del sistema (6), per generici valori delle  $y_0, y_1, \dots, y_r$ .

Supponiamo, per assurdo,  $m > 1$ . Allora gli iperpiani tangenti nel punto  $P = \tau^{-1} P'$  alle ipersuperficie  $\sum_{k=1}^r \xi_k^{(i)} y_k = 0$  e l'iperpiano  $\sum_{k=0}^r x_k y_k = 0$

sarebbero per generici valori delle  $y$ , linearmente dipendenti. In tal caso il punto  $P$  sarebbe, per generici valori delle  $y$ , soluzione multipla del sistema

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_r y_0 - \varphi_0 y_r = 0 \\ \varphi_r y_1 - \varphi_1 y_r = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_r y_{r-1} - \varphi_{r-1} y_r = 0 \end{array} \right.$$

i cui primi membri sono combinazioni lineari dei primi membri del sistema (6).

Pertanto nel punto  $P$  le ipersuperficie del sistema omaloidico  $\sum \lambda_i \varphi_i = 0$  passanti per  $P$  avrebbero una tangente comune; e ciò è manifestamente assurdo. Si deve quindi concludere che è  $m = 1$ ; pertanto le (6) rappresentano  $r$  reciprocità linearmente indipendenti alle quali la  $\tau$  appartiene.

Risulta così provato che: *le uniche trasformazioni cremoniane fra due spazi di dimensione  $r$  appartenenti ad una reciprocità non degenera, sono quelle generate mediante  $r$  reciprocità linearmente indipendenti e rappresentate quindi, sulla varietà di Segre dei due spazi, dalla intersezione con uno spazio lineare  $S_{r(r+1)}$  (7).*

3. — Le trasformazioni cremoniane studiate al n. 2 hanno evidentemente ordine  $r$  (e così pure le loro inverse). È legittimo chiedersi se ogni trasformazione cremoniana tra due spazi di dimensione  $r$ , avente ordine  $r$

(6) A tale scopo si moltiplichino il primo membro della prima equazione del sistema (6) per  $\alpha_{r0}$ , il primo membro della  $(i+1)$ -esima per  $\alpha_{r1,0}^{(i)} x_1 + \alpha_{r2,0}^{(i)} x_2 + \dots + \alpha_{r,r-1,0}^{(i)} x_{r-1}$  avendo indicato con  $\alpha_{i_0 i_1 l}^{(m)}$  il complemento algebrico di  $\xi_l^{(m)}$  nel minore  $q_{i_2, i_3, \dots, i_r}$  (essendo  $i_0, i_1, \dots, i_r$  una permutazione dei numeri  $0, 1, \dots, r$  con  $i_2 < i_3 < \dots < i_r$ ), moltiplicato per  $(-1)^{i_0+i_1+1}$ . Sommando membro a membro si ottiene allora la prima equazione del sistema (7). In modo analogo si ottengono le altre.

(7) Nel caso particolare in cui  $r=2$ , l'asserto può essere provato brevemente come segue. Sia  $\tau$  una trasformazione cremoniana tra due piani  $\pi$  e  $\pi'$ ,  $\omega$  una reciprocità non degenera tale che  $\tau$  appartenga ad  $\omega$ . Sia  $r$  una retta generica di  $\pi$ ;  $\tau r$  è allora una curva di ordine  $n$  di  $\pi'$ ,  $\omega r$  è un fascio di rette di  $\pi'$ .

Tra  $\tau r$  e  $\omega r$  è definita una corrispondenza biunivoca tale che elementi corrispondenti si appartengono. Ne segue che il centro del fascio  $\omega r$  è  $(n-1)$ -uplo per  $\tau r$ , onde per il primo teorema di Bertini  $n-1 \leq 1$ .

D'altra parte non può essere  $n=1$ ; se infatti  $\tau$  fosse una omografia  $\varrho y_i = x_i$ , ogni reciprocità  $\omega$  cui  $\tau$  appartiene avrebbe equazione  $\sum a_{ik} x_i y_k = 0$ , con  $a_{ik} = -a_{ki}$  se  $i \neq k$ ,  $a_{ii} = 0$  per ogni  $i$ . Pertanto  $\omega$  sarebbe degenera contro l'ipotesi. Ne segue l'asserto.

come la propria inversa, appartenga sempre ad  $r$  reciprocità linearmente indipendenti.

In effetti la risposta è affermativa soltanto per la dimensione  $r = 2$ , (oltrechè per il caso banale  $r = 1$  che, del resto, è stato escluso dalle nostre considerazioni) come prova un semplice computo di parametri.

Ma già per  $r = 3$  si hanno dei controesempi. Sia infatti  $\Gamma_{(3,3)}$  l'insieme delle trasformazioni cremoniane tra due spazi  $S_3$  ed  $S_3'$  aventi ordine 3 come le loro inverse; sia poi  $T_{(3,3)}$  il sottoinsieme di  $\Gamma_{(3,3)}$  costituito dalle trasformazioni generate da tre reciprocità linearmente indipendenti. Se  $\tau \in T_{(3,3)}$  ed  $r$  è una retta generica di  $S_3$ ,  $\tau r$  è una cubica gobba; per posizioni particolari di  $r$ ,  $\tau r$  è una cubica eventualmente spezzata o in casi eccezionali è un luogo di dimensione superiore ad uno;  $\tau r$  non è mai una cubica piana. Infatti siano  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  reciprocità non degeneri linearmente indipendenti alle quali  $\tau$  appartiene; sia  $r$  una retta di  $S_3$ ,

$$\varrho x_i = \lambda x'_i - \mu x''_i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

le sue equazioni parametriche; siano poi

$$\lambda \alpha_1 - \mu \alpha_2 = 0$$

$$\lambda \beta_1 - \mu \beta_2 = 0$$

$$\lambda \gamma_1 - \mu \gamma_2 = 0$$

le equazioni dei fasci di piani di  $S_3'$  riferiti proiettivamente ad  $r$  per le  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  rispettivamente. Allora  $\tau r$  ha le equazioni

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

ed è pertanto intersezione delle tre quadriche di  $S_3'$  aventi rispettivamente le equazioni

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

le quali non possono ovviamente intersecarsi in una cubica piana.

D'altra parte  $T_{(3,3)}$  non può esaurire  $\Gamma_{(3,3)}$ : esistono infatti in  $\Gamma_{(3,3)}$  trasformazioni che ad una retta generica di  $S_3$  fanno corrispondere una cubica piana<sup>(8)</sup>; esistono altresì trasformazioni di  $\Gamma_{(3,3)}$  che ad una retta generica

<sup>(8)</sup> Si veda ad esempio: CREMONA *Sulle trasformazioni razionali nello spazio*, Nota II. Rendiconti R. Ist. Lomb., serie II, vol. IV (1871) pag. 315, n. 7.



di  $S_3$  fanno corrispondere una cubica gobba, ma a rette particolari (ad esempio a rette di un complesso) di  $S_3$  fanno corrispondere una cubica piana<sup>(9)</sup>. D'altra parte proviamo che:

*Se  $\tau$  è una trasformazione birazionale tra due spazi  $S_3$  ed  $S_3'$  avente ordine tre come la propria inversa, tale che il sistema algebrico di cubiche di  $S_3'$  corrispondenti alle rette di  $S_3$ , non possiede cubiche piane, allora  $\tau \in T_{(3,3)}$ .*

Dim. — Osserviamo innanzitutto che il sistema omaloidico delle superficie di  $S_3'$  corrispondenti ai piani di  $S_3$  non contiene superficie rigate. Infatti il sistema delle sezioni piane di una rigata cubica razionale è contenuto in un sistema lineare  $\infty^4$  completo di cubiche gobbe, onde ogni rete di cubiche gobbe sulla superficie contiene un fascio di cubiche piane. Pertanto se  $F^3 = \tau \alpha$  ( $\alpha$  essendo un piano di  $S_3$ ) fosse rigata esisterebbe su  $\alpha$  un fascio di rette aventi per corrispondenti in  $S_3'$  cubiche piane.

Ciò premesso sia  $r$  una retta generica di  $S_3$ ,  $x_i = \lambda x'_i + \mu x''_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) le sue equazioni parametriche; da tre corde generiche  $s_1, s_2, s_3$ , della cubica  $\tau r$  si proiettino tutti gli altri punti, ottenendo tre fasci di piani riferiti proiettivamente alla  $r$ :

$$\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2 = 0, \quad \lambda \beta_1 + \mu \beta_2 = 0, \quad \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2 = 0.$$

Siano poi  $\pi_1$  e  $\pi_2$  due piani generici per  $r$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  le superficie di  $S_3'$  loro corrispondenti; infine siano  $P_1, P_2, P_3$  i tre punti in cui  $s_1, s_2, s_3$  incontrano  $\varphi_1$  fuori di  $\tau r$ . Se da  $P_1, P_2, P_3$  mandiamo le corde alle cubiche della rete di  $\varphi_1$  corrispondente al sistema delle rette di  $\pi_1$ , si ottengono tre stelle proiettive<sup>(10)</sup> tali che le intersezioni di piani omologhi generano la  $\varphi_1$ . Se  $\alpha_3 = 0$ ,  $\beta_3 = 0$ ,  $\gamma_3 = 0$  sono le equazioni di tre piani corrispondenti passanti per  $P_1, P_2, P_3$  rispettivamente, ma non per  $s_1, s_2, s_3$ , l'equazione di  $\varphi_1$  è

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

<sup>(9)</sup> Cfr. CREMONA, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio*. Ann. di Mat. pura e applicata, serie II, t. V (1871) pag. 131, n. 37.

<sup>(10)</sup> Cfr. CONFORTO, *Le superficie razionali*, Cap. II, § 11.

In modo analogo possono determinarsi tre forme lineari  $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$  tali che l'equazione di  $\varphi_2$  assuma la forma

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Sia  $\tau'$  la trasformazione generata dalle tre reciprocità

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^4 \beta_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^4 \gamma_i x_i = 0;$$

è  $\tau' \in T_{(3,3)}$ . Per provare che è  $\tau = \tau'$ , a meno di una proiettività, basta far vedere che coincidono i due sistemi lineari di superficie di  $S_3'$  corrispondenti per  $\tau$  e  $\tau'$  ai piani di  $S_3$ . Intanto è evidente che coincidono le varietà base dei due sistemi (costituite dalla intersezione di  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  fuori di  $\tau r$ ); supposto pertanto che i due sistemi siano distinti, essi saranno immersi totalmente in un sistema  $\Sigma$  di dimensione superiore a tre. Secando  $\Sigma$  con  $\varphi_1$  si otterrebbe allora un sistema lineare di dimensione superiore a due contenente totalmente la rete delle cubiche gobbe corrispondenti alle rette di  $\pi_1$ , il che è assurdo. L'asserto risulta così provato.

Più complicata si rivela l'analisi per i valori di  $r$  superiori a tre. Ci limiteremo ad osservare che le trasformazioni tra due spazi  $S_r$  ed  $S_r'$ , generate da  $r$  reciprocità linearmente indipendenti, fanno corrispondere ad un generico  $S_k$  del primo spazio una varietà di ordine  $\binom{r}{k}$  il che non accade per ogni trasformazione birazionale, di ordine  $r$  insieme alla propria inversa. Inoltre la curva corrispondente ad una retta generica del primo spazio è una curva razionale normale di ordine  $r$  la quale per posizioni particolari della retta non può mai appartenere ad un sottospazio di  $S_r'$ .

4. — Le considerazioni del n. 2 sono state svolte sotto le ipotesi che la reciprocità  $\omega$ , cui appartiene la trasformazione  $\tau$ , sia non degenera. Tale ipotesi è essenziale. Infatti la trasformazione tra i due spazi  $S_3(x_0, x_1, x_2, x_3)$  ed  $S_3'(y_0, y_1, y_2, y_3)$  avente le equazioni

$$\begin{aligned} \varrho y_0 &= x_0(x_1 + x_2 + x_3) \\ \varrho y_1 &= x_2 x_3 \\ \varrho y_2 &= x_3 x_1 \\ \varrho y_3 &= x_1 x_2 \end{aligned}$$

appartiene solo alle  $\infty^1$  reciprocità (tutte degeneri):

$$a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + a_3 x_3 y_3 = 0 \quad \text{con } a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

In particolare per la dimensione  $r = 2$  possiamo affermare che:

*Se  $\tau$  è una trasformazione birazionale tra due piani  $\pi$  e  $\pi'$ , appartenente ad una reciprocità  $\omega$  degenera, allora  $\tau$  è una trasformazione di de Jonquières.*

Dim. — Intanto la nullità della matrice di  $\omega$  non può superare uno. Cambiando eventualmente in  $\pi'$  il sistema di riferimento, la  $\omega$  assume l'equazione

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 = 0.$$

Se  $\varrho y_i = \varphi_i(x)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) sono le equazioni di  $\tau$ , sussiste l'identità

$$x_0 \varphi_0 + x_1 \varphi_1 \equiv 0$$

onde per il n. 1 è

$$\varphi_0 = \alpha_{01} x_1, \quad \varphi_1 = -\alpha_{01} x_0;$$

pertanto il fascio  $\varphi_0 + \lambda \varphi_1 = 0$  (se il grado  $n$  delle  $\varphi_i$  è maggiore di uno) è formato da curve spezzate nella  $\alpha_{01} = 0$  e in una retta del fascio  $x_0 + \mu x_1 = 0$ .

Ne segue che la rete  $\sum_{i=0}^2 \lambda_i \varphi_i = 0$  possiede una curva eccezionale di ordine  $n - 1$  ed è pertanto una rete di de Jonquières.