ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIUSEPPE GEMIGNANI

Sulle trasformazioni cremoniane che appartengono ad una reciprocità non degenere

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 4 (1958), p. 479-488

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_4_479_0>

SULLE TRASFORMAZIONI CREMONIANE CHE APPARTENGONO AD UNA RECIPROCITÀ NON DEGENERE

Nota di GIUSEPPE GEMIGNANI (a Pisa)

In una Sua Memoria del 1942 (1) M. VILLA dimostrava (fra l'altro) che una trasformazione monoidale (di de Jonquières) tra due piani, è rappresentata sulla loro varietà di Segre, da una superficie immersa in un iperpiano dell' S_8 a cui la varietà di Segre appartiene.

In quell'occasione Egli proponeva di stabilire se queste corrispondenze fossero le uniche, tra le trasformazioni cremoniane, godenti di questa proprietà; cioè, se una trasformazione tra due piani godente di questa proprietà, debba essere necessariamente del tipo di de Jonquières.

In una Sua Nota (2) MURACCHINI rispondeva affermativamente al quesito nel caso in cui l'ordine della trasformazione fosse non inferiore a quattro.

Nel presente lavoro, servendosi di una osservazione relativa ad una equazione diofantea di forme (v. n. 1), si dimostra che le uniche trasformazioni cremoniane tra due spazi di dimensione r ($r \geq 2$) appartenenti ad una reciprocità non degenere, sono quelle rappresentate, sulla varietà di Segre dei due spazi, da una V_r ottenuta secando la varietà di Segre con uno spazio lineare di dimensione opportuna; ciò significa che una trasformazione cremoniana τ tra due spazi S_r e S'_r, che appartiene ad una reciprocità non degenere, appartiene ad r linearmente indipendenti. Nel caso particolare del piano le uniche trasformazioni soddisfacenti a questa condizione sono quindi quelle quadratiche.

---

(1) M. VILLA, *Superficie della V_4^6 di Segre e relative trasformazioni puntuali,* Mem. Acc. Sci. Ist. Bologna, Serie II, t. IX.

(2) A. MURACCHINI, *Sulla superficie rappresentativa di una trasformazione cremoniana tra piani,* Boll. Un. Mat. It. Serie III Anno V, 1950.

1. — Consideriamo l'equazione diofantea

$$x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \dots x_h \varphi_h \equiv 0 \tag{1}$$

ove $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_h$ sono forme incognite nelle indeterminate $x_1, x_2 \dots x_r$ $(r \geq h)$ di un certo grado n.

È facile vedere (3) che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè h forme soddisfino ad essa è che tali forme siano del tipo*

$$\varphi_i \equiv \sum_{j=1}^{h} \alpha_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2 \dots h)$$

essendo le α_{ij} polinomi omogenei nelle variabili $x_1, x_2 \dots x_r$ e tali che si abbia

$$\alpha_{ij} \equiv 0 \qquad (\text{per } i = j)$$

$$\alpha_{ij} \equiv -\alpha_{ji} \qquad (\text{per } i \neq j).$$

La sufficienza è evidente. Per provare la necessità osserviamo che nel caso che sia $h = 2$, dalla

$$x_1 \varphi_1 \equiv -x_2 \varphi_2 \tag{1'}$$

segue che φ_1 è divisibile per x_2 e quindi può porsi

$$\varphi_1 \equiv \alpha_{12} x_2$$

onde sostituendo nella (1') e dividendo per x_2 si ha:

$$\varphi_2 \equiv -\alpha_{12} x_1 .$$

Ammessa pertanto la proposizione per una equazione del tipo (1) contenente $h' < h$ forme incognite, dimostriamola per h.

Poichè la φ_1 non può possedere termini che non contengano almeno una delle variabili $x_2, x_3, \dots, x_h$ (perchè altrimenti vi sarebbero nel primo membro della (1) termini che non potrebbero elidersi con altri), può porsi:

$$\varphi_1 \equiv \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \dots \alpha_{1h} x_h \tag{2}$$

da cui sostituendo nella (1) si ottiene l'altra

$$(\varphi_2 + \alpha_{12} x_1) x_2 + (\varphi_3 + \alpha_{13} x_1) x_3 + \dots (\varphi_h + \alpha_{1h} x_1) x_h \equiv 0. \tag{2'}$$

(3) Cfr. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva negli iperspazi*, Messina, Principato, 1923, Cap. XII, n. 16, pag. 329 II Ed.

Ma per quanto ammesso nel caso di $h-1$ forme si ha:

$$\varphi_i \equiv -\alpha_{1i}\, x_1 + \sum_{j=2}^{h} \alpha_{ij}\, x_j \qquad (i = 2, 3, \ldots r) \tag{2*}$$

le quali insieme alla (2) provano l'asserto.

2. — Consideriamo una trasformazione cremoniana τ tra due spazi $S_r(x_0, x_1, \ldots x_r)$ ed $S'_r(y_0, y_1, \ldots y_r)$. Siano

$$\varrho\, y_i = \varphi_i(y_0, y_1, \ldots, y_r) \qquad [i = 0, 1, \ldots, r]$$

le equazioni della corrispondenza, essendo le φ_i forme di un certo grado n, linearmente indipendenti e tali che il sistema lineare di equazione

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i\, \varphi_i = 0$$

sia omaloidico.

Supponiamo che esista una reciprocità non degenere ω tra i punti di S_r e gli iperpiani di S'_r la quale goda della proprietà che detto P un punto generico di S_r, P' il suo corrispondente nella τ, α' l'iperpiano corrispondente a P nella ω, P' ed α' si appartengano (⁴).

Cambiando opportunamente la piramide fondamentale ed il punto unità in S'_r, l'equazione della ω assume la forma

$$\sum_{i=0}^{r} x_i\, y_i = 0$$

e quindi, per l'ipotesi fatta sulla τ, sussisterà l'identità rispetto alle variabili $x_0, x_1, \ldots, x_r$

$$\sum_{i=0}^{r} x_i\, \varphi_i(x_0, x_1, \ldots x_r) \equiv 0\,. \tag{1''}$$

Per quanto osservato nel n. 1 le φ_i hanno espressioni del tipo

$$\varphi_i \equiv \sum_{j=0}^{r} \alpha_{ij}\, x_j \qquad [i = 0, 1, \ldots, r)$$

(⁴) Nel seguito quando una trasformazione cremoniana τ ed una reciprocità ω godranno di questa proprietà, diremo brevemente che τ appartiene ad ω; è da notare che se si considera la varietà di Segre dei due spazi S_r ed S'_r, la sottovarietà che rappresenta la τ giace nella sezione iperpiana che rappresenta la ω, ma non appartiene necessariamente all'iperpiano secante.

essendo le α_{ij} opportune forme di grado $n-1$ e tali che

$$\alpha_{ij} \equiv 0 \quad \text{per} \quad i = j \qquad \text{e} \qquad \alpha_{ij} \equiv -\alpha_{ji} \quad \text{per} \quad i \neq j .$$

Mostriamo innanzitutto che le $\binom{r+1}{2}$ forme α_{ij} $(i < j)$ possono essere scelte in modo che esista, per generici valori delle x, una retta per P avente le α_{ij} come coordinate grassmanniane radiali. A tale scopo consideriamo il sistema

$$\sum_{j=0}^{r} (x_i z_j - x_j z_i) x_j = \varphi_i (x_0 , \ldots r_r) \qquad [i = 0 , \ldots , r] . \tag{3}$$

Come si verifica con semplice calcolo, le matrici completa ed incompleta del sistema, hanno la caratteristica r (5); pertanto il sistema ammette soluzioni, il che prova l'esistenza di una retta per P avente le α_{ij} come coordinate grassmanniane radiali. Sia σ la corrispondenza che associa a P la retta di coordinate α_{ij}.

Se $z_0 (x_0 , \ldots , x_r)$, $z_1 (x_0 , \ldots , x_r) , \ldots , z_r (x_0 , \ldots , x_r)$ è una soluzione del sistema (3), i coefficienti dell'equazione di un generico iperpiano passante per la retta corrispondente a $P (x_0 , x_1 , \ldots , x_r)$ per la σ, verificano il sistema

$$\begin{cases} \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_r x_r = 0 \\ \xi_0 z_0 (x) + \xi_1 z_1 (x) + \ldots + \xi_r z_r (x) = 0 . \end{cases} \tag{4}$$

Siano

$$\begin{matrix} (\xi'_0 & , & \xi'_1 & , & \ldots . & \xi'_r) \\ (\xi''_0 & , & \xi''_1 & , & \ldots , & \xi''_r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\xi_0^{(r-1)} & , & \xi_1^{(r-1)} & , & \ldots , & \xi_r^{(r-1)}) \end{matrix}$$

$r-1$ soluzioni del sistema (4), linearmente indipendenti. Senza alterare la generalità si può senz'altro supporre che le $\xi_k^{(i)}$ siano forme di un certo grado m nelle variabili $x_0 , x_1 , \ldots , x_r$. I minori di ordine $r-1$ estratti

---

(5) Dette k e k' la caratteristica della matrice incompleta e della completa rispettivamente, si ha $k \leq r$, $k' \leq r$ come si verifica moltiplicando la i-esima riga della matrice completa per x_i e sommando rispetto all'indice i. Inoltre il minore di ordine r formato dalle prime r righe e dalle prime r colonne non è identicamente nullo perchè il coefficiente di x_r^{2r} è $(-1)^r$.

dalla matrice

$$\Xi = \left\| \begin{matrix} \xi'_0 & \xi'_1 & \dots & \xi'_r \\ \xi''_0 & \xi''_1 & \dots & \xi''_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_0^{(r-1)} & \xi_0^{(r-1)} & \dots & \xi_r^{(r-1)} \end{matrix} \right\|$$

sono proporzionali, a meno del segno, alle α_{ij}; si ha cioè

$$(5) \qquad \varrho\, \alpha_{i_0 i_1} = (-1)^{i_0+i_1+1}\, q_{i_2 i_3 \dots i_r}$$

essendo $i_0, i_1, i_2, \dots, i_r$, una permutazione dei numeri $0, 1, \dots, r$ con $i_0 < i_1$ e $i_2 < i_3 \dots < i_r$ e $q_{i_2, i_3, \dots i_r}$ il minore della matrice Ξ ottenuto prendendo le $r-1$ colonne i_2-esima, i_3-esima, $\dots$, i_r-esima.

Ne segue che le coordinate $y_0, y_1, \dots, y_r$ del punto P' corrispondente a P nella τ, sono soluzioni del sistema:

$$(6) \qquad \begin{cases} x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots\dots\dots\dots + x_r y_r = 0 \\ \xi'_0 y_0 + \xi'_1 y_1 + \dots\dots\dots\dots + \xi'_r y_r = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_0^{(r-1)} y_0 + \xi_1^{(r-1)} y_1 + \dots\dots + \xi_r^{(r-1)} y_r = 0 \end{cases}$$

come si vede immediatamente tenendo conto della (1″) e della (5). Mediante le (6) il sistema degli iperpiani di S_r viene riferito omograficamente ai sistemi lineari di ipersuperficie $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \dots, \Sigma^{(r-1)}$ di equazioni rispettivamente

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda'_k \xi'_k = 0\,, \quad \sum_{k=0}^{r} \lambda''_k \xi''_k = 0\,, \dots . \sum_{k=0}^{r} \lambda_k^{(r-1)} \xi_k^{(r-1)} = 0$$

in guisa tale che ai punti variabili comuni ad un iperpiano ed alle $r-1$ forme corrispondenti in $\Sigma^{(1)}, \dots \Sigma^{(r-1)}$ per la (6) corrisponde in S_r' per la τ lo stesso punto $P' \equiv (\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_r)$. Essendo la τ birazionale ed essendo il sistema degli iperpiani di S_r privo di punti fissi, il punto $P = \tau^{-1} P'$ è soluzione m^{r-1}-pla (nel senso del teorema di Bezout) del sistema (6), per generici valori delle $y_0, y_1, \dots, y_r$.

Supponiamo, per assurdo, $m > 1$. Allora gli iperpiani tangenti nel punto $P = \tau^{-1} P'$ alle ipersuperficie $\sum_{k=1}^{r} \xi_x^{(i)} y_k = 0$ e l'iperpiano $\sum_{k=0}^{r} x_k y_k = 0$

sarebbero per generici valori delle y, linearmente dipendenti. In tal caso il punto P sarebbe, per generici valori delle y, soluzione multipla del sistema

$$(7)\qquad \begin{cases} \varphi_r\, y_0 - \varphi_0\, y_r = 0 \\ \varphi_r\, y_1 - \varphi_1\, y_r = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi_r\, y_{r-1} - \varphi_{r-1}\, y_r = 0 \end{cases}$$

i cui primi membri sono combinazioni lineari dei primi membri del sistema (6).

Pertanto nel punto P le ipersuperficie del sistema omaloidico $\Sigma\, \lambda_i\, \varphi_i = 0$ passanti per P avrebbero una tangente comune; e ciò e manifestamente assurdo. Si deve quindi concludere che è $m = 1$; pertanto le (6) rappresentano r reciprocità linearmente indipendenti alle quali la τ appartiene.

Risulta così provato che: *le uniche trasformazioni cremoniane fra due spazi di dimensione r appartenenti ad una reciprocità non degenere, sono quelle generate mediante r reciprocità linearmente indipendenti e rappresentate quindi, sulla varietà di Segre dei due spazi, dalla intersezione con uno spazio lineare* $S_{r(r+1)}$ (7).

3. — Le trasformazioni cremoniane studiate al n. 2 hanno evidentemente ordine r (e così pure le loro inverse). È legittimo chiedersi se ogni trasformazione cremoniana tra due spazi di dimensione r, avente ordine r

---

(6) A tale scopo si moltiplichi il primo membro della prima equazione del sistema (6) per α_{r0}, il primo membro della $(i+1)$-esima per $\alpha^{(i)}_{r1,0}\, x_1 + \alpha^{(i)}_{r2,0}\, x_2 + \dots + \alpha^{(i)}_{r,r-1,0}\, x_{r-1})$ avendo indicato con $\alpha^{(m)}_{i_0 i_1, l}$ il complemento algebrico di $\xi^{(m)}_l$ nel minore $q_{i_2, i_3 \dots i_r}$ (essendo $i_0, i_1, \dots i_r$ una permutazione dei numeri $0, 1, \dots r$ con $i_2 < i_3 < \dots < i_r$), moltiplicato per $(-1)^{i_0+i_1+1}$. Sommando membro a membro si ottiene allora la prima equazione del sistema (7). In modo analogo si ottengono le altre.

(7) Nel caso particolare in cui $r = 2$, l'asserto può essere provato brevemente come segue. Sia τ una trasformazione cremoniana tra due piani π e π', ω una reciprocità non degenere tale che τ appartenga ad ω. Sia r una retta generica di π; τr è allora una curva di ordine n di π', ωr è un fascio di rette di π'.

Tra τr e ωr è definita una corrispondenza biunivoca tale che elementi corrispondenti si appartengono. Ne segue che il centro del fascio ωr è $(n-1)$-uplo per τr, onde per il primo teorema di Bertini $n - 1 \leq 1$.

D'altra parte non può essere $n = 1$; se infatti τ fosse una omografia $\varrho\, y_i = x_i$, ogni reciprocità ω cui τ appartiene avrebbe equazione $\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, y_k = 0$, con $a_{ik} = -a_{ki}$ se $i \neq k$, $a_{ii} = 0$ per ogni i. Pertanto ω sarebbe degenere contro l'ipotesi. Ne segue l'asserto.

come la propria inversa, appartenga sempre ad r reciprocità linearmente indipendenti.

In effetti la risposta è affermativa soltanto per la dimensione $r = 2$, (oltrechè per il caso banale $r = 1$ che, del resto, è stato escluso dalle nostre considerazioni) come prova un semplice computo di parametri.

Ma già per $r = 3$ si hanno dei controesempi. Sia infatti $\Gamma_{(3,3)}$ l'insieme delle trasformazioni cremoniane tra due spazi S_3 ed S_3' aventi ordine 3 come le loro inverse; sia poi $T_{(3,3)}$ il sottoinsieme di $\Gamma_{(3,3)}$ costituito dalle trasformazioni generate da tre reciprocità linearmente indipendenti. Se $\tau \in T_{(3,3)}$ ed r è una retta generica di S_3, τr è una cubica gobba; per posizioni particolari di r, τr è una cubica eventualmente spezzata o in casi eccezionali è uu luogo di dimensione superiore ad uno; *τr non è mai una cubica piana.* Infatti siano $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ reciprocità non degeneri linearmente indipendenti alle quali τ appartiene; sia r una retta di S_3,

$$\varrho\, x_i = \lambda\, x_i' - \mu\, x_i'' \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

le sue equazioni parametriche; siano poi

$$\lambda\, \alpha_1 - \mu\, \alpha_2 = 0$$

$$\lambda\, \beta_1 - \mu\, \beta_2 = 0$$

$$\lambda\, \gamma_1 - \mu\, \gamma_2 = 0$$

le equazioni dei fasci di piani di S_3' riferiti proiettivamente ad r per le $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ rispettivamente. Allora τr ha le equazioni

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

ed è pertanto intersezione delle tre quadriche di S_3' aventi rispettivamente le equazioni

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

le quali non possono ovviamente intersecarsi in una cubica piana.

D'altra parte $T_{(3,3)}$ non può esaurire $\Gamma_{(3,3)}$: esistono infatti in $\Gamma_{(3,3)}$ trasformazioni che ad una retta generica di S_3 fanno corrispondere una cubica piana [8]; esistono altresì trasformazioni di $\Gamma_{(3,3)}$ che ad una retta generica

(8) Si veda ad esempio: CREMONA *Sulle trasformazioni razionali nello spazio,* Nota II. Rendiconti R. Ist. Lomb., serie II, vol. IV (1871) pag. 315, n. 7.

di S_3 fanno corrispondere una cubica gobba, ma a rette particolari (ad esempio a rette di un complesso) di S_3 fanno corrispondere una cubica piana (9). D'altra parte proviamo che:

Se τ è una trasformazione birazionale tra due spazi S_3 ed S_3' avente ordine tre come la propria inversa, tale che il sistema algebrico di cubiche di S_3' corrispondenti alle rette di S_3, non possieda cubiche piane, allora $\tau \in T_{(3,3)}$.

Dim. — Osserviamo innanzitutto che il sistema omaloidico delle superficie di S_3' corrispondenti ai piani di S_3 non contiene superficie rigate. Infatti il sistema delle sezioni piane di una rigata cubica razionale è contenuto in un sistema lineare ∞^4 completo di cubiche gobbe, onde ogni rete di cubiche gobbe sulla superficie contiene un fascio di cubiche piane. Pertanto se $F^3 = \tau\,\alpha$ (α essendo un piano di S_3) fosse rigata esisterebbe su α un fascio di rette aventi per corrispondenti in S_3' cubiche piane.

Ciò premesso sia r una retta generica di S_3, $x_i = \lambda x_i' + \mu x_i''$ ($i=1, 2, 3, 4$) le sue equazioni parametriche; da tre corde generiche s_1, s_2, s_3, della cubica τr si proiettino tutti gli altri punti, ottenendo tre fasci di piani riferiti proiettivamente alla r:

$$\lambda\,\alpha_1 + \mu\,\alpha_2 = 0\,, \quad \lambda\,\beta_1 + \mu\,\beta_2 = 0\,, \quad \lambda\,\gamma_1 + \mu\,\gamma_2 = 0\,.$$

Siano poi π_1 e π_2 due piani generici per r, φ_1 e φ_2 le superficie di S_3' loro corrispondenti; infine siano P_1, P_2, P_3 i tre punti in cui s_1, s_2, s_3 incontrano φ_1 fuori di τr. Se da P_1, P_2, P_3 mandiamo le corde alle cubiche della rete di φ_1 corrispondente al sistema delle rette di π_1, si ottengono tre stelle proiettive (10) tali che le intersezioni di piani omologhi generano la φ_1. Se $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$, $\gamma_3 = 0$ sono le equazioni di tre piani corrispondenti passanti per P_1, P_2, P_3 rispettivamente, ma non per s_1, s_2, s_3, l'equazione di φ_1 è

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

(9) Cfr. CREMONA, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio.* Ann. di Mat. pura e applicata, serie II, t. V (1871) pag. 131, n. 37.

(10) Cfr. CONFORTO, *Le superficie razionali,* Cap. II, § 11.

In modo analogo possono determinarsi tre forme lineari $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ tali che l'equazione di φ_2 assuma la forma

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Sia τ' la trasformazione generata dalle tre reciprocità

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_i = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{4} \gamma_i x_i = 0 ;$$

è $\tau' \in T_{(3,3)}$. Per provare che è $\tau = \tau'$, a meno di una proiettività, basta far vedere che coincidono i due sistemi lineari di superficie di S_3' corrispondenti per τ e τ' ai piani di S_3. Intanto è evidente che coincidono le varietà base dei due sistemi (costituite dalla intersezione di φ_1 e φ_2 fuori di τr); supposto pertanto che i due sistemi siano distinti, essi saranno immersi totalmente in un sistema Σ di dimensione superiore a tre. Secando Σ con φ_1 si otterrebbe allora un sistema lineare di dimensione superiore a due contenente totalmente la rete delle cubiche gobbe corrispondenti alle rette di π_1, il che è assurdo. L'asserto risulta così provato.

Più complicata si rivela l'analisi per i valori di r superiori a tre. Ci limiteremo ad osservare che le trasformazioni tra due spazi S_r ed S_r', generate da r reciprocità linearmente indipendenti, fanno corrispondere ad un generico S_k del primo spazio una varietà di ordine $\binom{r}{k}$ il che non accade per ogni trasformazione birazionale, di ordine r insieme alla propria inversa. Inoltre la curva corrispondente ad una retta generica del primo spazio è una curva razionale normale di ordine r la quale per posizioni particolari della retta non può mai appartenere ad un sottospazio di S_r'.

4. — Le considerazioni del n. 2 sono state svolte sotto le ipotesi che la reciprocità ω, cui appartiene la trasformazione τ, sia non degenere. Tale ipotesi è essenziale. Infatti la trasformazione tra i due spazi $S_3\,(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ed $S_3'\,(y_0, y_1, y_2, y_3)$ avente le equazioni

$$\begin{aligned} \varrho\, y_0 &= x_0\,(x_1 + x_2 + x_3) \\ \varrho\, y_1 &= x_2\, x_3 \\ \varrho\, y_2 &= x_3\, x_1 \\ \varrho\, y_3 &= x_1\, x_2 \end{aligned}$$

appartiene solo alle ∞^1 reciprocità (tutte degeneri):

$$a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + a_3 x_3 y_3 = 0 \qquad \text{con } a_1 + a_2 + a_3 = 0 .$$

In particolare per la dimensione $r = 2$ possiamo affermare che:

Se τ è una trasformazione birazionale tra due piani π e π', appartenente ad una reciprocità ω degenere, allora τ è una trasformazione di de Jonquières.

Dim. — Intanto la nullità della matrice di ω non può superare uno. Cambiando eventualmente in π' il sistema di riferimento, la ω assume l'equazione

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 = 0 .$$

Se $\varrho y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 0, 1, 2)$ sono le equazioni di τ, sussiste l'identità

$$x_0 \varphi_0 + x_1 \varphi_1 \equiv 0$$

onde per il n. 1 è

$$\varphi_0 = \alpha_{01} x_1 , \qquad \varphi_1 = - \alpha_{01} x_0 ;$$

pertanto il fascio $\varphi_0 + \lambda \varphi_1 = 0$ (se il grado n delle φ_i è maggiore di uno) è formato da curve spezzate nella $\alpha_{01} = 0$ e in una retta del fascio $x_0 + \mu x_1 = 0$.

Ne segue che la rete $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i \varphi_i = 0$ possiede una curva eccezionale di ordine $n - 1$ ed è pertanto una rete di de Jonquières.