Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

G. Vranceanu

Spazi a connessione affine e le algebre di numeri ipercomplessi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 1-2 (1958), p. 5-20
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_5_0>

SPAZI A CONNESSIONE AFFINE E LE ALGEBRE DI NUMERI IPERCOMPLESSI

di G. VRANCEANU (Bucarest)

SUNTO. *Nella prima parte di questo lavoro si mostra come nello studio degli spazi A_n, che io ho chiamato a connessione affine costante, si possono utilizzare risultati del campo delle algebre di numeri ipercomplessi ed inversamente. Nella seconda parte si considera una riduzione alla forma canonica degli spazi A_n (o delle algebre $\mathfrak{A}_n$), per cui il vettore associato non è nullo e il tensore covariante quadratico associato è non degenere e si determinano tutte le algebre $\mathfrak{A}_3$ aventi questa proprietà. Nella terza parte si mostra come si può associare ad uno spazio a connessione affine A_n qualunque una algebra generale, le cui unità variano da punto a punto.*

I

È ben noto che si chiama spazio a connessione affine A_n, uno spazio a n dimensioni $x^1, \dots x^n$, che possiede un sistema di n^3 funzioni Γ^i_{jk} delle variabili $x^1, \dots, x^n$, che hanno la proprietà che per una trasformazione di coordinate

$$x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n) \tag{1}$$

si trasformano secondo le formule (¹)

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ik} \frac{\partial x'^i}{\partial x^s} \tag{2}$$

dove Γ'^i_{rs} sono funzioni delle variabili $x'^1, \dots, x'^n$ e costituiscono le componenti della connessione affine dello spazio A_n, nelle variabili $x'^1, \dots, x'^n$.

Diciamo che lo spazio A_n è a connessione affine costante se esiste un sistema di variabili per il quale le componenti della connessione sono delle

---

(¹) Altri autori prendono le Γ^i_{jk} con segno cambiato.

costanti e si mostra facilmente che una condizione necessaria e sufficiente perchè uno spazio A_n sia a connessione affine costante è che esso abbia un gruppo di trasformazioni in sè semplicemente transitivo ed abeliano.

Se le coordinate nelle quali la connessione è costante sono le variabili $x^1, \dots, x^n$, dunque se le componenti Γ^i_{jk} sono delle costanti, allora lo spazio ammette come gruppo di trasformazioni in sè il gruppo delle traslazioni

$$x'^i = x^i + a^i . \tag{3}$$

Infatti se nelle formule (2) consideriamo Γ'^i_{jk} altresì costanti e uguali rispettivamente alle Γ^i_{jk} e cioè consideriamo Γ'^i_{jk} la connessione dello stesso spazio A_n, le formule (2) ammettano come soluzioni le (3) qualunque siano le a^i, ciò che dimostra che le (3) costituiscono un gruppo di trasformazioni dello spazio A_n a connessione costante in sè stesso.

Inversamente se le (3) sono trasformazioni in sè di uno spazio A_n, questo spazio è a connessione affine costante. Infatti tenendo conto delle (3), le (2) diventano

$$\Gamma^i_{jk}(x') = \Gamma^i_{jk}(x)$$

che non possono aver luogo che se le Γ^i_{jk} sono delle costanti.

Possiamo osservare che nelle variabili $x^1, \dots, x^n$ lo spazio a connessione affine costante è definito in tutto lo spazio euclideo $E_n(x^1, \dots, x^n)$ e la proprietà si conserva per una trasformazione affine delle variabili $x^1, \dots, x^n$. Le variabili $x^1, \dots, x^n$ possono chiamarsi coordinate cartesiane dello spazio a connessione affine costante. Per una trasformazione affine di coordinate

$$x'^i = a^i_j x^j + a^i \tag{3'}$$

le quantità Γ^i_{jk} si trasformano come un tensore perchè le (2) diventano

$$\Gamma'^i_{rs} a^r_j a^s_k = \Gamma^s_{jk} a^i_s \tag{4}$$

Possiamo altresì considerare uno spazio a connessione affine costante realizzato non solo nello spazio euclideo $E_n(x^1, \dots, x^n)$ ma anche in spazi toroidali e cioè nei quali una o più delle variabili x^i sono degli angoli, e perciò determinate a meno di un multiplo di 2π. Questo fatto equivale a considerare come spazio un prodotto diretto di un certo numero di rette e un certo numero di cerchi. In particolare possiamo considerare lo spazio a connessione affine costante definito sopra il toro a n dimensioni per il quale tutte le variabili sono definite a meno di un multiplo di 2π.

Restando alla prima interpretazione e cioè dello spazio A_n a connessione costante Γ^i_{jk} realizzato in tutto lo spazio euclideo $E_n(x^1, \ldots x^n)$, possiamo associare allo spazio A_n l'algebra $\mathcal{A}_n$ di numeri ipercomplessi

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n \tag{5}$$

dove $e_1, \ldots, e_n$ sono delle unità ipercomplesse dell'algebra $\mathcal{A}_n$, la loro legge di moltiplicazione essendo data dalle formule

$$e_j e_k = \Gamma^i_{jk} e_i \tag{6}$$

Infatti una trasformazione di unità ipercomplesse

$$e_i = a^s_i e'_s \tag{7}$$

dove a^s_i sono dei numeri reali a determinante $|a^s_i|$ non nullo è equivalente ad una trasformazione lineare e omogenea delle variabili dello spazio A_n

$$x'^s = a^s_i x^i \tag{7'}$$

con le stesse costanti a^s_i e le quantità Γ^i_{jk} si trasformano secondo le formule (4), sia che teniamo conto dalle (7) nelle formule (6), sia che teniamo conto dalle (7′) nelle formule (2).

Abbiamo così il teorema:

A qualunque spazio A_n a connessione costante si può associare un'algebra $\mathcal{A}_n$ di numeri ipercomplessi e inversamente.

Ne risulta dunque che le proprietà dello spazio A_n a connessione costante Γ^i_{ik} e dell'algebra $\mathcal{A}_n$ dipendono come ci mostrano le (4), da un tensore Γ^i_{ik} costante contravariante nell'indice i e covariante negli indici i, k.

Una prima osservazione che possiamo fare è che lo spazio A_n è senza torsione se l'algebra $\mathcal{A}_n$ è commutativa ed inversamente. Infatti le componenti del tensore di torsione dello spazio A_n sono date dalle formule

$$\overset{i}{T}_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$$

Ne risulta che T^i_{jk} sono nulle se Γ^i_{jk} sono simmetriche in i, k ossia se il prodotto $e_j e_k$ è eguale à $e_k e_j$, ossia se l'algebra $\mathcal{A}_n$ è commutativa. Abbiamo evidentemente le formule

$$(e_l e_j) e_k - e_l (e_j e_k) = (\Gamma^s_{lj} \Gamma^i_{sk} - \Gamma^i_{ls} \Gamma^s_{jk}) e_i .$$

Ne risulta che l'algebra $\mathfrak{A}_n$ è associativa se abbiamo le formule

$$\Gamma^i_{sk}\,\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{ls}\,\Gamma^s_{jk} = 0 \,.$$

Tenendo conto altresì delle formule che ci forniscono le componenti del tensore di curvatura dello spazio A_n, ne risulta che questo tensore è nullo:

$$\Gamma^i_{sk}\,\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\,\Gamma^s_{jk} = 0 \tag{8}$$

se l'algebra $\mathfrak{A}_n$ è nello stesso tempo commutativa ed associativa.

Abbiamo così il teorema:

Se $\mathfrak{A}_n$ è commutativa ed associativa lo spazio A_n è localmente euclideo ossia il suo tensore di torsione e di curvatura sono nulli. Inversamente se A_n è localmente euclideo, la $\mathfrak{A}_n$ è commutativa e associativa.

Si sa che tra le algebre più studiate, vi sono quelle che possiedono un modulo e cioè nelle quali esiste un numero (2)

$$\varepsilon = \varepsilon^1\, e_1 + \dots + \varepsilon^n\, e_n$$

che ha la proprietà

$$x\,\varepsilon = x$$

per qualunque numero x di $\mathfrak{A}_n$. Abbiamo dunque

$$x^i\, e_i\, \varepsilon^j\, e_j = x^r\, e_r \,,$$

formula che possiamo scrivere tenendo conto dalle (3)

$$x^i\, \varepsilon^j\, \Gamma^r_{ij}\, e_r = x^r\, e_r$$

dunque dobbiamo avere le condizioni

$$\Gamma^r_{ij}\,\varepsilon^j = \delta^r_i \begin{pmatrix} = 1\,, & r = i \\ = 0\,, & r \neq i \end{pmatrix} \tag{9}$$

Se facciamo $r = i$ e sommiamo, otteniamo le formule

$$\varepsilon^j\,\Gamma_j = n \qquad (\Gamma_j = \Gamma^i_{ij})\,,$$

(2) E. STUDY et E. CARTAN, *Nombres complexes,* Encyclopédie des sciences math. ed. française, 15, 1908 o B. SEGRE, *La teoria delle algebre ed alcune questioni di realtà.* Rend. di Mat. e delle sue applicazioni, Roma 1954, 13, 157-169.

dove Γ_j è quello che si chiama la connessione contratta, o il vettore di connessione. Abbiamo dunque il teorema:

Una condizione necessaria perchè l'algebra $\mathfrak{A}_n$ abbia un modulo è che la connessione contratta Γ_j non sia nulla.

Che la condizione non è sufficiente lo mostra l'esempio di una algebra $\mathfrak{A}_2$ avente le formule di struttura

$$e_1^2 = e_1\,, \quad e_1\, e_2 = 0\,, \quad e_2^2 = 0 \tag{10}$$

la cui connessione contratta è data da $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 0$, ma l'algebra (10) non ha un modulo perchè le formule (9) non hanno soluzioni. Ne risulta che le algebre per cui Γ_i non è nullo contengono tutte le algebre con modulo, ma non inversamente e cioè esistono delle algebre con Γ_i non nullo e che non hanno un modulo.

Si può dimostrare ([3]) che un'algebra commutativa ed associativa per la quale le Γ_i sono tutte nulle è un'algebra nilpotente e cioè un'algebra per la quale l'equazione caratteristica ha solamente delle radici nulle. Per la dimostrazione si introducono i tensori covarianti di diversi ordini

$$\Gamma_{jk} = \Gamma^{h}_{js}\, \Gamma^{s}_{kh}\,, \ldots, \quad \Gamma_{j_1 \ldots j_p} = \Gamma^{s_1}_{j_1 s_2}\, \Gamma^{s_2}_{j_2 s_3} \ldots \Gamma^{s_p}_{j_p s_1} \tag{11}$$

e si mostra che per un'algebra commutativa ed associativa, questi tensori sono nulli se è nullo il vettore Γ_j. Infatti se nelle formule (8) facciamo $i = k$ e sommiamo ne risulta

$$\Gamma_s\, \Gamma^s_{ij} = \Gamma_{ij} \tag{12}$$

formule che dimostrano la proprietà per il tensore quadratico. In modo analogo se nell'espressione di $\Gamma_{j_1 \ldots j_p}$ data dalle (11) poniamo in virtù delle (8), al posto dei primi termini $\Gamma^{s_1}_{j_1 s_2}\, \Gamma^{s_2}_{j_2 s_3}$ le quantità $\Gamma^{s_1}_{s_3 s_2}\, \Gamma^{s}_{j_1 j_2}$, ne risultano le formule

$$\Gamma_{j_1 \ldots j_p} = \Gamma^{s}_{j_1 j_2}\, \Gamma_{s j_3 \ldots j_p}\,.$$

Queste formule associate alle (12) ci mostrano che se per una algebra

([3]) P. Mocanu, *Spatii cu conexiune afină constantă echivalente în mare cu spatiul euclidian,* Comunicările Acad. R. P. R., Bucuresti, 2, 1952, pp. 389-395.

commutativa ed associativa uno dei tensori covarianti

$$\Gamma_i\,,\ \Gamma_{jk}\,,\ldots,\Gamma_{j_1\ldots j_p}\,,\ldots \tag{12'}$$

è nullo, sono nulli anche i tensori di ordine superiore. Le algebre nilpotenti sono caratterizzate dal fatto che tutti i tensori covarianti (13) sono nulli.

II.

Supponiamo adesso che il vettore $\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}$ non sia nullo. Esso si può allora sempre ridurre alla forma canonica

$$\Gamma^i_{i1} = \ldots = \Gamma^i_{i\,n-1} = 0\,,\ \Gamma^i_{in} = n\,. \tag{13}$$

Questa forma canonica è conservata solamente dalle trasformazioni lineari della forma

$$x'^i = a^i_j\, x^j + a^i_n\, x^n + a^i\,,\ x'^n = x^n + a^n\,. \tag{14}$$

D'altra parte tenendo conto delle (12), abbiamo

$$\Gamma_{ij} = n\, \Gamma^n_{ij}$$

dunque le componenti Γ^n_{ij} costituiscono un tensore del secondo ordine covariante. Ne risulta che la forma quadratica

$$\Phi = \Gamma^n_{ij}\, dx^i\, dx^j + 2\, \Gamma^n_{ni}\, dx^i\, dx^n + \Gamma^n_{nn}\, (dx^n)^2 \tag{14'}$$

è un invariante del problema rispetto alle trasformazioni (14).

Supponiamo che la forma quadratica in $n-1$ differenziali dx^i

$$\Gamma^n_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i\,,\, j = 1\,,\ldots,\, n-1) \tag{14''}$$

non sia degenere. Possiamo allora scrivere la forma quadratica Φ data dalla formula (14') sotto la forma canonica

$$\Phi = \varepsilon_1\, (dx^1)^2 + \ldots + \varepsilon_{n\ 1}\, (dx)^{n-1} + \varrho\, (dx^n)^2 \tag{14'''}$$

dove $\varepsilon_1\,,\ldots,\,\varepsilon_{n-1}$ sono uguali a $+1$ o -1. Abbiamo dunque le formule

$$\Gamma^n_{ij} = \varepsilon_i\, \delta^i_j\,,\ \Gamma^n_{ni} = 0\,,\ \Gamma^n_{nn} = \varrho\,. \tag{15}$$

Supponiamo altresì che lo spazio A_n sia localmente euclideo, dunque che siano verificate le formule (8).

Consideriamo in primo luogo queste formule per $i = l = n$, j, $k < n$ e per $i = j = l$, $k < n$. Esse si scrivono tenendo conto delle (15)

$$\Gamma^{n}_{jkn} = \varepsilon_k \Gamma^{k}_{jn} - \varrho\, \varepsilon_j\, \delta^j_k = 0 \,, \; \Gamma^{n}_{nkn} = \varepsilon_k \Gamma^{k}_{nn} = 0 \tag{15'}$$

dove k, j sono indici fissi. Le prime di queste formule ci danno $\Gamma^j_{kn} = \varrho \delta^j_k$ e l'ultima formula (13) ci mostra che dobbiamo avere $\varrho = 1$. Ne risulta dunque che le formule (15′) si possono scrivere

$$\Gamma^j_{kn} = \delta^j_k \,, \; \Gamma^j_{nn} = 0 \quad (j\,,\, k < n) \tag{16}$$

Quanto alle formule (8) per $i = j = n$, l, $k < n$ si trova che esse sono identicamente verificate.

Consideriamo allora le formule (8) per $i = n$ e j, k, $l < n$. Abbiamo

$$\Gamma^{n}_{jkl} = \varepsilon_k \Gamma^{k}_{jl} - \varepsilon_l \Gamma^{l}_{jk} = 0 \tag{17}$$

dove k, l sono indici fissi.

Considerando le equazioni (8) per le quali l'indice $i < n$ ma uno o più degli indici j, k. l sono uguali a n cioè le equazioni

$$\Gamma^i_{nkl} = \Gamma^i_{sk} \Gamma^s_{nl} - \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{nk} = 0$$

$$\Gamma^i_{nnl} = \Gamma^i_{sn} \Gamma^s_{nl} - \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{nn} = 0$$

$$\Gamma^i_{jnl} = \Gamma^i_{sn} \Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{jn} = 0$$

si constata che esse sono verificate (basta tener conto dalle equazioni (15) e (16)).

Ci restano dunque da considerare le formule (8) nelle quali gli indici i, j, k, l sono tutti minori di n. Queste equazioni si scrivono

$$\Gamma^i_{jkl} = \Gamma^i_{sk} \Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{jk} + \varepsilon_j (\delta^i_k \delta^j_l - \delta^i_l \delta^j_k) = 0 \tag{18}$$

dove l'indice di sommazione s varia da 1 a $n-1$. Osserviamo altresì che l'ultima (13) è identicamente verificata dalle (15) (16) con $\varrho = 1$ e che le altre (13) si scrivono esplicitamente

$$\Gamma_k = \Gamma^1_{1k} + \ldots + \Gamma^{n-1}_{n-1n} = 0 \,, \; (k = 1, \ldots, n-1)\,; \tag{19}$$

dunque le equazioni (17), (18) e (19) costituiscono delle condizioni nelle componenti Γ^i_{jk} con indici i, j, k minori di n.

Abbiamo dunque il teorema:

Essendo dato uno spazio A_n a connessione affine costante, localmente euclideo, a vettore Γ_i non nullo (13) *e a forma quadratica* (14″) *non degenere, la connessione di questo spazio si può ridurre alla forma canonica*

$$\Gamma^n_{ij} = \varepsilon_i \delta^i_j \,, \Gamma^n_{ni} = 0 \,, \Gamma^i_{nn} = 0 \,, \Gamma^n_{nn} = 1 \,, \Gamma^i_{jn} = \delta^i_j \; (i , j < n) \tag{20}$$

dove ε_i sono uguali a ± 1 e le componenti Γ^i_{jk} $(i, j, k < n)$ soddisfano alle formule (17), (18) *e* (19).

Consideriamo adesso il caso in cui le ε_i sono tutte uguali a $\varepsilon = \pm 1$. In questo caso le formule (17) ci dicono che le componenti Γ^k_{jl} sono simmetriche negli indici k, l. Poichè queste componenti sono supposte già simmetriche in j, l risulta che Γ^k_{jl} sono simmetriche in tutti gli indici k, j, l. D'altra parte ponendo $i = k$ nelle formule (18) e sommando da 1 a $n - 1$ si ha per $n > 2$ e tenendo conto dalle (19)

$$- \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{ji} + \varepsilon (n - 2) \delta^j_l = 0 \,.$$

Ponendo anche $l = j$ e sommando da 1 a $n - 1$ si ottiene, tenendo conto dalla simmetria delle Γ^i_{sl},

$$\varepsilon (n - 1)(n - 2) = \Sigma (\Gamma^i_{sj})^2 \tag{20'}$$

e questa formula ci mostra che ε deve essere positivo, dunque uguale a $+1$.

Abbiamo dunque il teorema:

Se lo spazio A_n a connessione affine localmente euclideo è reale e la forma quadratica (14″) *è definita, essa è definita positiva insieme alla forma* (14′).

Tenendo conto del fatto che nel caso in cui la forma (14″) o (14′) è definita positiva, le Γ^i_{ik} sono simmetriche in tutti gli indici e che la forma canonica (14‴) è conservata solamente dalle trasformazioni (14) che sono delle trasformazioni ortogonali nelle variabili $x^1, \ldots, x^{n-1}$, ne risulta che la forma cubica

$$\psi = \Gamma^i_{jk} x^i x^j x^k \tag{21}$$

è un invariante ortogonale associato allo spazio A_n e rispetto alle trasformazioni ortogonali delle $x^1, \ldots, x^{n-1}$.

Ne risulta dunque che essendo dati due spazi a connessione costante localmente euclidei A_n e $\bar{A}_n$ le cui componenti Γ e $\bar{\Gamma}$ soddisfano rispettivamente le (20) con $\varepsilon_i = 1$ e le (17), (18) e (19), questi spazi sono equivalenti se le rispettive forme (21) sono equivalenti per una trasformazione ortogonale delle variabili $x^1, \ldots, x^{n-1}$.

Supponiamo adesso che le ε_i non siano tutte uguali a l'unità e che si abbia $\varepsilon_p = 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ e $e_\alpha = -1$ $(\alpha = m+1, \ldots, n-1)$. Le formule (17) e (18) si scrivono in questo caso

$$(21') \qquad \Gamma^{p}_{jq} = \Gamma^{q}_{jp}\,, \; \Gamma^{p}_{j\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{jp}\,, \; \Gamma^{\alpha}_{j\beta} = \Gamma^{\beta}_{j\alpha} \qquad (p\,, q \leq m).$$

$$\Gamma^{i}_{sk}\,\Gamma^{s}_{pl} - \Gamma^{i}_{sl}\,\Gamma^{s}_{pk} + \delta^{i}_{k}\,\delta^{p}_{l} - \delta^{i}_{l}\,\delta^{p}_{k} = 0$$

$$\Gamma^{i}_{sk}\,\Gamma^{s}_{\alpha l} - \Gamma^{i}_{sl}\,\Gamma^{s}_{\alpha k} - \delta^{i}_{k}\,\delta^{\alpha}_{l} + \delta^{i}_{l}\,\delta^{\alpha}_{k} = 0$$

e due algebre associative e commutative che soddisfano alle stesse formule (19), (20), (21) sono equivalenti, se per una trasformazione quasi ortogonale, che conserva la forma quadratica

$$(dx^1)^2 + \ldots + (dx^m)^2 - (dx^{m+1})^2 - \ldots (dx^n)^2$$

si può fare in modo che le due algebre abbiano le stesse componenti Γ^{i}_{jk} $(i\,, j\,, k = 1\,, \ldots, n-1)$.

Consideriamo adesso l'algebra associata allo spazio A_n. Abbiamo in virtù delle formule (20):

$$(22) \qquad e_j\,e_k = \dot{\Gamma}^{i}_{jk}\,e_i + \varepsilon_i\,\delta^{i}_{j}\,e_n$$

$$e_i\,e_n = e_i\,, \; e_n^2 = e_n\,,$$

e queste formule ci mostrano che l'unità e_n è un modulo. L'algebra associata possiede dunque un modulo. Quanto alle unità $e_1, \ldots, e_{n-1}$ esse sono determinate da una trasformazione ortogonale nel caso in cui Γ^{i}_{jk} sono simmetriche in tutti gli indici e ε_i sono tutti uguali a $+1$. La determinazione delle forme canoniche delle algebre (22) in questo caso dipende dalla riduzione ad una forma canonica della forma cubica (21) per trasformazioni ortogonali delle unità $e_1, \ldots, e_{n-1}$.

Possiamo osservare altresì che le formule (22) ci mostrano che le quantità Γ^{i}_{jk} e $\Gamma^{n}_{jk} = \varepsilon_i\,\delta^{i}_{j}$ possono essere considerate come componenti di una connessione proiettiva a $n-1$ dimensioni. Dunque alla connessione affine costante A_n si può associare una connessione proiettiva costante a $n-1$ dimensioni.

Supponiamo adesso di essere nel caso $n = 3$ e che $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. In questo caso le formule (17) e (19) si possono scrivere

$$(22) \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11}, \; \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22}$$

$$\Gamma^1_{11} = -\Gamma^1_{22}, \; \Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11}$$

e perciò tutte le componenti Γ^i_{jk} $(i, j, k = 1,2)$ si possono esprimere tramite $\Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{11}$. Quanto alle formule (18) esse si scrivono, tenendo conto di queste formule:

$$\Gamma^1_{112} = \Gamma^2_{212} = 0, \; \Gamma^1_{121} = \Gamma^{1'}_{212} = -2(\Gamma^2_{11})^2 - 2(\Gamma^1_{22})^2 + 1 = 0.$$

Ne risulta che le quantità $\Gamma^2_{11}, \Gamma^1_{22}$ sono legate dalla equazione

$$(23) \qquad (\Gamma^2_{11})^2 + (\Gamma^1_{22})^2 = \frac{1}{2}.$$

Quanto alla forma ψ essa si scrive

$$\psi = -\Gamma^1_{22}(x^1)^3 + 3\Gamma^2_{11}(x^1)^2 x^3 + 3\Gamma^1_{22} x^1 (x^3)^2 + \Gamma^2_{11}(x^3)^3.$$

Questa forma si può scrivere evidentemente come un prodotto di tre fattori dei quali almeno uno è reale. Possiamo scegliere gli assi ortogonali x^1, x^2 in modo che questo fattore reale sia x^1, dunque in modo che $\Gamma^2_{11} = 0$. In questo caso la formula (23) diviene

$$(24) \qquad \Gamma^1_{22} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ma siccome Γ^1_{22} cambia di segno con x^1 possiamo supporre sempre Γ^1_{22} positivo.

Abbiamo dunque il teorema:

Esiste una sola algebra associativa e commutativa per cui il vettore Γ_i non è nullo e il tensore quadratico è definito positivo le cui formule di moltiplicazione si scrivono

$$(25) \qquad e_1^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + e_3, \; e_1 e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, \; e_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + e_3$$

$$e_1 e_3 = e_1, \; e_2 e_3 = e_2, \; e_3^2 = e_3$$

Consideriamo adesso il caso in cui ε_1 e ε_2 sono di segni contrari. Possiamo sempre supporre $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$ e allora le equazioni (17) e (19) si scrivono

$$\Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11}, \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22} \tag{26}$$

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{11}.$$

Quanto alle equazioni (18) esse ci danno

$$2(\Gamma^1_{22})^2 - 2(\Gamma^2_{11})^2 = 1. \tag{26'}$$

Ne risulta che, purchè la connessione sia reale dobbiamo avere $|\Gamma^1_{22}| > |\Gamma^2_{11}|$. Possiamo anche in questo caso con una trasformazione iperbolica delle variabili x^1, x^2 fare in modo che $\Gamma^2_{11} = 0$ e abbiamo anche in questo caso una algebra.

Abbiamo così il teorema:

Esistono due algebre $\mathfrak{A}_3$ reali per le quali il vettore $\Gamma_i = n\,\delta^i_n$ è non nullo e la forma quadratica (14'') è non degenere.

III.

Tenendo conto del fatto che uno spazio A_n a connessione affine costante può essere realizzato non solamente sullo spazio euclideo, ma anche sugli spazi toroidali e non solamente nelle coordinate cartesiane $x^1, \dots x^n$, ma anche in coordinate curvilinee qualunque, ci si può domandare se possiamo fare la stessa cosa per l'algebra $\mathfrak{A}_n$ associata. Vogliamo far vedere che questa cosa è possibile se interpretiamo le unità $e_1, \dots, e_n$ come le derivate parziali di una funzione delle variabili $x^1, \dots, x^n$.

Infatti abbiamo sempre

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \tag{27}$$

e se supponiamo che $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ sono uguali a e_i, dove e_i sono considerate delle costanti indipendenti dalle variabili $x^1, \dots, x^n$, l'equazione (27) si può integrare ed abbiamo

$$f = e_i x^i + c$$

dove c è una costante. Ne risulta che f sono i numeri dell'algebra $\mathfrak{A}_n$ astrazione fatta da una costante. Quanto alla legge di moltiplicazione (6) dell'algebra essa è data dai prodotti simbolici

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Considerando f come una funzione, si può dare un carattere invariante a queste formule rispetto a delle trasformazioni di variabili introducendo nel primo membro i termini $-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^j\,\partial x^k}$ che nel caso in cui $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ sono delle costanti sono nulli.

Consideriamo dunque le equazioni

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\,\partial x^k} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk}\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0\,.$$

Moltiplicando per e^{-f} e ponendo $u = e^{-f}$ possiamo scrivere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^j\,\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0. \tag{28}$$

Risulta così che le unità e_i di un'algebra hanno le stesse proprietà rispetto ad una trasformazione di variabili, che le derivate $\dfrac{\partial u}{\partial x^i}$, mentre il prodotto di e_k per e_j ha le proprietà di $\dfrac{\partial}{\partial x^j}\dfrac{\partial u}{\partial x^k}$ e cioè abbiamo

$$(e_j\, e_k) = \Gamma^i_{jk}\, e_i\,. \tag{29}$$

Le formule (28) diventano le formule (6) di moltiplicazione dell'algebra $\mathfrak{A}_n$ nel caso in cui le unità corrispondano alle derivate della funzione

$$u = e^{-a_i x^i}.$$

Le formule (28) hanno un carattere invariante qualunque sia la funzione u e rispetto ad una trasformazione qualunque di variabili (1), se le Γ^i_{jk} soddisfano alle formule (2) e cioè se costituiscono le componenti di una connessione affine. Tenendo conto dal fatto che le e_i hanno le proprietà delle $\dfrac{\partial u}{\partial x^i}$ risulta che rispetto ad una trasformazione (1) dobbiamo avere

$$e_s = \frac{\partial x'^i}{\partial x^s}\, e'_i\,.$$

Moltiplicando le formule (2) per e'_i e tenendo conto dalle (29) possiamo scrivere

$$(29') \qquad \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \, \partial x^k} e'_i = (e'_r \, e'_s) \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - (e_j \, e_k)$$

dove $(e_r \, e_s)'$ sono prodotti di e'_s per e'_r, dunque abbiamo

$$e'_r \, e'_s = \Gamma'^i_{rs} \, e'_i \, .$$

Le formule (29') definiscono dunque la legge di trasformazione dei prodotti $(e_j \, e_k)$ rispetto ad una trasformazione di variabili.

Partendo dalla legge di moltiplicazione (29) la legge di associazione si definisce nel modo conosciuto se le Γ^i_{jk} sono delle costanti. Altrimenti dobbiamo tener presente il fatto che $(e_j \, e_k)$ si comporta come $- \dfrac{\partial}{\partial x^j} \dfrac{\partial u}{\partial x^k}$. Dunque abbiamo

$$(29'') \qquad [e_l \, (e_j \, e_k)] = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{sl} \, \Gamma^s_{jk} \right) e_i$$

$$[(e_l \, e_j) \, e_k] = \Gamma^i_{sk} \, \Gamma^s_{jl} \, e_i$$

Possiamo considerare le cose da un punto di vista più generale e cioè supporre di avere nello spazio A_n un sistema di congruenze indipendenti (λ) i cui differenziali degli archi sono definiti dalle n forme di Pfaff

$$ds^a = \lambda^a_i \, dx^i \, , \qquad dx^i = \mu^i_a \, ds^a$$

dove λ^a_i sono i momenti e μ^i_a i parametri delle n congruenze indipendenti (λ).

Per una trasformazione di congruenze

$$(30) \qquad d\bar{s}^a = c^a_b \cdot ds^b$$

dove c^a_b sono funzioni delle variabili $x^1, \ldots, x^n$ a determinante $|c^a_b|$ diverso da zero corrisponde una trasformazione delle unità

$$(31) \qquad \frac{\partial u}{\partial s^a} = c^b_a \frac{\partial u}{\partial \bar{s}^b} \, .$$

Quanto alle formule di moltiplicazione (28) dell'algebra $\mathfrak{A}_n$ esse si scrivono

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^b \, \partial s^c} + \gamma^a_{bc} \frac{\partial u}{\partial s^c} = 0 \tag{32}$$

dove γ^a_{bc} sono le componenti della connessione sopra le congruenze (λ) ([4]). Possiamo d'altra parte considerare come unità invece di $\dfrac{\partial u}{\partial s^a}$ le componenti di un vettore covariante qualunque $u_1, \ldots, u_n$ e le formule (31) ci dicono che queste componenti subiscono una trasformazione lineare i cui coefficienti c^b_a dipendono dal punto considerato $(x^1, \ldots, x^n)$. Quanto alle formule (32) esse si possono scrivere

$$\frac{\partial u_b}{\partial s^c} + \gamma^a_{bc} u_a = 0 \, , \left(\frac{\partial}{\partial s^a} = \frac{\partial}{\partial x_i} \mu^i_a \right)$$

Moltiplicando per ds^c possiamo scrivere

$$du_b + \gamma^a_{bc} \, u_a \, ds^c = 0 \; ,$$

fatto che ci dice che il vettore u_b si trasporta dal punto $P(x^1, \ldots, x_n)$ al punto $Q(x^1 + dx^1, \ldots, x^n + dx^n)$ per parallelismo nello spazio a connessione affine A_n.

Ne risulta dunque che nell'algebra generale per cui $u_1, \ldots, u_n$ sono delle unità, il prodotto $(u_b \, u_c)$ di una unità u_c per una unità u_b è definito dalla formula

$$(u_b \, u_c) = \gamma^a_{bc} \, u_a \tag{33}$$

dunque il prodotto $(u_b \, u_c)$ è definito con l'aiuto del trasporto parallelo di A_n.

Per una trasformazione lineare (30) di congruenze, le unità $u_1, \ldots, u_n$ si trasformano secondo le formule

$$u_a = c^b_a \, \overline{u}_b \tag{34}$$

e le quantità γ^a_{bc} si trasformano secondo le formule

$$\frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} = \overline{\gamma}^a_{rs} \, c^r_b \, c^s_c - \gamma^s_{bc} \, c^a_s \, . \tag{35}$$

([4]) G. VRANCEANU, *Leçons de géométrie différéntielle,* Bucarest, vol. I, 1947, 1959, capitole IV.

Si tratta dunque di vedere come si trasformano i prodotti $(u_b\, u_c)$. Per questo osserviamo che tenendo conto dalle (34) le formule (33) si scrivono

$$(u_b\, u_c) = \gamma^s_{bc}\, c^a_s\, \overline{u}_a .$$

Moltiplicando le formule (35) per $\overline{u}_a$ possiamo scrivere

$$\frac{\partial c^a_b}{\partial s^c}\, \overline{u}_a = (\overline{u}_r\, \overline{u}_s)\, c^r_b\, c^s_c - (u_b\, u_c) \tag{36}$$

formule che ci danno la legge di trasformazione dei prodotti $(u_b\, u_c)$ della nostra algebra di unità $u_1, \ldots, u_n$ per una trasformazione qualunque di congruenze (30).

Inversamente date le equazioni (33), per le quali sono valide, rispetto ad una trasformazione (30), le formule (34) e (36), ne risultano facilmente le formule (35), dunque γ^a_{bc} sono le componenti di una connessione affine. Ne risulta dunque il teorema:

Essendo dato uno spazio a connessione affine A_n rapportato ad un sistema di congruenze (λ) si può sempre associare a questo spazio una algebra generale la cui legge di moltiplicazione è definita dalle formule (33), *dove $(u^b\, u_c)$ si trasformano per una trasformazione di congruenze* (30), *secondo le formule* (36). *Inversamente data una tale algebra ne risulta uno spazio A_n associato.*

In questa algebra generale la legge di associatività dei prodotti ha le stesse proprietà delle formule (29′′) e cioè fa intervenire le derivate delle componenti γ^a_{bc} se queste non sono costanti. Ne risulta dunque che nel caso in cui le γ^a_{cb} sono delle costanti, l'algebra associata è una vera algebra rispetto a delle trasformazioni di congruenze (30) a coefficienti c^a_b costanti.

Ne risulta dunque il teorema:

Ad uno spazio a connessione affine A_n si può associare una vera algebra, se esiste nello spazio un sistema di congruenze per il quale le componenti γ^a_{bc} della connessione siano delle costanti.

È conosciuto il fatto che uno spazio di Riemann V_n ammette un sistema di congruenze ortogonali a coefficienti di rotazioni γ^a_{bc} di Ricci costanti se lo spazio V_n ammette un gruppo semplicemente transitivo di trasformazioni in se e inversamente.

Si ha altresì che tutti gli spazi V_n a curvatura costante negativa possiedono un gruppo semplicemente transitivo, dunque a questi spazi si può associare un algebra.

Si ha altresì che gli spazi V_2 a curvatura costante positiva non possiedono un gruppo semplicemente transitivo reale, mentre gli spazi V_3 a