ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FABIO MANARESI

Sulla sommabilità $(C, 1)$ delle serie doppie di Fourier

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 1-2 (1958), p. 21-30

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_21_0>

SULLA SOMMABILITÀ $(C, 1)$ DELLE SERIE DOPPIE DI FOURIER

Nota (*) di FABIO MANARESI (a Bologna)

1. È noto che il polinomio trigonometrico di FEJÉR $\sigma_n(x)$ di una funzione $f(x)$, sommabile nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$, è convergente, per n tendente all'infinito, ad un limite $\varphi(x)$ in ogni punto x di $0 \leq x \leq 2\pi$ in cui risulta:

$$\int_0^u F(x, u)\, du = o(u), \tag{I}$$

$$\int_0^u |F(x, u)|\, du = O(u), \tag{II}$$

ove $F(x, u) = f(x + 2u) + f(x - 2u) - 2\varphi(x)$ (1).

Volendo estendere questo risultato alle serie doppie di FOURIER si incontra la difficoltà di aggiungere una ipotesi supplementare a quelle ottenute dalle (I) e (II) facendone le analoghe per le funzioni di due variabili. Il teorema, nelle forme più ristrette di LEBESGUE (2) e di FEJÉR (3), è stato dimostrato, per le funzioni di due variabili, con una condizione aggiuntiva, chiamata da TONELLI « condizione L » (4).

(*) Pervenuta in Redazione il

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

(1) Cfr. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *The Fourier series of a positive function*, « J. London Math. Soc. », 1, (1926), pp. 134-138.

(2) Cfr. L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna, (1928), p. 495.

(3) Loc. cit. in (2), p. 490.

(4) Loc. cit. in (2), p. 488.

In questa nota si estende il teorema citato in principio, cioè nella forma più generale di HARDY e LITTLEWOOD, adottando una ipotesi, la quale, come si mostrerà nel n. 3, è meno restrittiva della condizione ora menzionata, onde si ottiene anche un miglioramento dei teoremi di LEBESGUE e di FEJÉR, che sono casi particolari di quello.

Pertanto il presente lavoro può trovare applicazione in tutti i risultati, finora ottenuti e che potranno eventualmente ricavarsi in avvenire, sulle serie doppie di FOURIER, nei quali si fa uso dei citati teoremi di FEJÉR, di LEBESGUE e di HARDY e LITTLEWOOD.

In particolare, alcuni asserti, provati recentemente dall'A. [5], restano validi con ipotesi più ampie.

2. Il risultato, di cui si è fatto cenno nel n. 1, è il seguente:

Se $f(x\ ,\ y)$ è una funzione sommabile nel quadrato $Q \equiv (0 \leq x \leq 2\pi\ ,\ 0 \leq y \leq 2\pi)$, il suo polinomio trigonometrico di FEJÉR $\sigma_{m,n}(x\ ,\ y)$ *converge, per* $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$, *verso la funzione $\varphi(x\ ,\ y)$ in ogni punto $(x\ ,\ y)$ di Q in cui risulta:*

$$\lim_{\substack{u \\ v}\big\} \to 0^+} \frac{1}{u\,v} \int_0^u \int_0^v F(x\ ,\ y\ ,\ u\ ,\ v)\, du\, dv = 0\ , \tag{1}$$

$$\frac{1}{u\,v} \int_0^u \int_0^v |\, F(x\ ,\ y\ ,\ u\ ,\ v)\,|\, du\, dv \leq M \quad \text{per} \quad 0 < u \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ \ 0 < v \leq \frac{\pi}{2}\ , \tag{2}$$

ove

$$F(x\ ,\ y\ ,\ u\ ,\ v) = f(x + 2u\ ,\ y + 2v) + f(x + 2u\ ,\ y - 2v) +$$
$$+ f(x - 2u\ ,\ y + 2v) + f(x - 2u\ ,\ y - 2v) - 4\,\varphi(x\ ,\ y)$$

ed M è una costante positiva [6].

---

[5] F. MANARESI, *Alcuni teoremi sulle serie coniugate della serie di Fourier di una funzione di più variabili*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 27, (1957), pp. 181-192.

[6] Si noti che, mentre la (1) è l'analoga della (I) per le funzioni di due variabili, altrettanto non può dirsi per le (2) e (II). Invero, è manifesto che dalla (II) segue $\frac{1}{u}\int_0^u |\,F(x,u)\,|\,du \leq M$ per $0 < u \leq \frac{\pi}{2}$ e inversamente, ma la $\int_0^u\int_0^v |\,F(x,y,u,v)\,|\,du\,dv = O\,(uv)$ non implica sempre la (2), sicchè questa è più restrittiva della precedente, la quale peraltro non basta, insieme con la (1), ad assicurare la validità della tesi dell'enunciato.

Si osservi anzitutto che dalle (1) e (2) seguono rispettivamente le

$$(1') \qquad \lim_{\substack{u \\ v}\big\} \to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \int_0^u \int_0^v F(x, y, u, v)\, du\, dv = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \int_0^u \int_0^v |F(x, y, u, v)|\, du\, dv \leq M \quad \text{per } 0 < u \leq \frac{\pi}{2},\ 0 < v \leq \frac{\pi}{2}.$$

In secondo luogo, scelto ad arbitrio un numero positivo τ, per ogni coppia di numeri naturali m, n tali che riesca

$$(3) \qquad \frac{\tau}{m} < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\tau}{n} < \frac{\pi}{2},$$

si ha:

$$\sigma_{m,n}(x, y) - \varphi(x, y) = \frac{1}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, u, v) \left(\frac{\operatorname{sen} m u}{\operatorname{sen} u}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} n v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [\ldots]\, du\, dv + \frac{1}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\tau}{n}} [\ldots]\, du\, dv + \frac{1}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\tau}{m}} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [\ldots]\, du\, dv +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\tau}{m}} \int_0^{\frac{\tau}{n}} [\ldots]\, du\, dv = I^{(1)}_{m,n} + I^{(2)}_{m,n} + I^{(3)}_{m,n} + I^{(4)}_{m,n}.$$

Ciò premesso, si proverà che:

a) $\lim\limits_{\substack{m \\ n}\big\} \to \infty} I^{(1)}_{m,n} = 0$. Invero si ha, integrando per parti prima rispetto a v e poi rispetto a u,

$$|I^{(1)}_{m,n}| \leq \frac{1}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|F|}{\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v}\, du\, dv \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|F|\,dv\right]du + \frac{2}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}\int_0^{v}|F|\,dv\,\frac{\cos v}{\operatorname{sen}^3 v}\right]du\,dv =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 m n}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}\int_0^{u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|F|\,du\,dv\right]_{u=\frac{\tau}{m}}^{u=\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} u}\int_0^{u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|F|\,du\,dv\,\frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}\right]du +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}\int_0^{u}\int_0^{v}|F|\,du\,dv\right]_{u=\frac{\tau}{m}}^{u=\frac{\pi}{2}}\frac{\cos v}{\operatorname{sen}^3 v}\,dv +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}\int_0^{u}\int_0^{v}|F|\,du\,dv\cdot\frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}\,\frac{\cos v}{\operatorname{sen}^2 v}\right]du\,dv \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2 m n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|F|\,du\,dv + \frac{2}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} u}\int_0^{u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|F|\,du\,dv\cdot\frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}\right]du +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} v}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{v}|F|\,du\,dv\cdot\frac{\cos v}{\operatorname{sen}^2 v}\right]dv +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}\int_0^{u}\int_0^{v}|F|\,du\,dv\cdot\frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}\cdot\frac{\cos v}{\operatorname{sen}^2 v}\right]du\,dv\,,$$

sicchè, per la (2′), riesce

$$|I_{m,n}^{(1)}| \leq \frac{M}{\pi^2 m n} + \frac{2M}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}^2 u} + \frac{2M}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\operatorname{sen} v}{\operatorname{sen}^2 v} +$$

$$+\frac{4\,M}{\pi^2 m\, n}\int\limits_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\ \mathrm{sen}\, u}{\mathrm{sen}^2 u}\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\ \mathrm{sen}\, v}{\mathrm{sen}^2 v}<\frac{M}{\pi^2 m\, n}+\frac{M}{\pi\, n\,\tau}+\frac{M}{\pi\, m\,\tau}+\frac{M}{\tau^2}$$

e quest'ultimo membro, prendendo τ abbastanza grande, si può rendere, in virtù delle (3), minore di un numero positivo ε arbitrariamente prefissato.

b) $\lim\limits_{\substack{m\\ n}\Big\}\to\infty} I^{(2)}_{m,n}=0$. Integrando per parti rispetto a v, si trae infatti

$$I^{(2)}_{m,n}=\frac{1}{\pi^2 m\, n}\int\limits_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\Bigg\{\Bigg[\int\limits_0^v F\, dv\left(\frac{\mathrm{sen}\ nv}{\mathrm{sen}\ v}\right)^2\Bigg]_{v\to 0+}^{v=\frac{\tau}{n}}-$$

$$-\int\limits_0^{\frac{\tau}{n}}\Bigg[\int\limits_0^v F\, dv\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{\mathrm{sen}\ nv}{\mathrm{sen}\ v}\right)^2\Bigg]dv\Bigg\}\left(\frac{\mathrm{sen}\ m\,u}{\mathrm{sen}\ u}\right)^2 du=$$

$$=\frac{1}{\pi^2 m\, n}\ \frac{\mathrm{sen}^2\,\tau}{\mathrm{sen}^2\dfrac{\tau}{n}}\int\limits_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\tau}{n}}F\cdot\left(\frac{\mathrm{sen}\ m\,u}{\mathrm{sen}\ u}\right)^2 du\, dv\ -$$

$$-\frac{1}{\pi^2\, mn}\int\limits_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\tau}{n}}\Bigg[\left(\frac{\mathrm{sen}\ m\,u}{\mathrm{sen}\ u}\right)^2\int\limits_0^v F\, dv\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{\mathrm{sen}\ nv}{\mathrm{sen}\ v}\right)^2\Bigg]du\, dv$$

e quindi

$$|I^{(2)}_{m,n}|\le\frac{1}{\pi^2 m\, n}\ \frac{1}{\mathrm{sen}^2\dfrac{\tau}{n}}\int\limits_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\tau}{n}}\frac{|F|}{\mathrm{sen}^2 u}\, du\, dv\ +$$

$$+\frac{1}{\pi^2 m\, n}\int\limits_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\tau}{n}}\Bigg[\frac{1}{\mathrm{sen}^2 u}\int\limits_0^v |F|\, dv\Bigg]\left|\frac{d}{d\,v}\left(\frac{\mathrm{sen}\ nv}{\mathrm{sen}\ v}\right)^2\right|du\, dv\,.$$

Mediante integrazione per parti rispetto a u nell'ultimo membro, si deduce

$$|I^{(2)}_{m,n}| \le \frac{1}{\pi^2 m n}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\tau}{n}} \int_0^{\frac{\tau}{n}} \left\{ \left[\int_0^u |F|\, du\, \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \right]_{u=\frac{\tau}{m}}^{u=\frac{\pi}{2}} + \right.$$

$$\left. + 2 \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^u |F|\, du\, \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^3 u} \right] du \right\} dv +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\tau}{n}} \left| \frac{d}{dv} \left(\frac{\operatorname{sen} nv}{\operatorname{sen} v} \right)^2 \right| \left\{ \left[\int_0^u \int_0^v |F|\, du\, dv\, \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \right]_{u=\frac{\tau}{m}}^{u=\frac{\pi}{2}} + \right.$$

$$\left. + 2 \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^u \int_0^v |F|\, du\, dv\, \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^3 u} \right] du \right\} dv \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^2 m \tau}\, \frac{\frac{\tau}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\, \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\tau}{n}} |F|\, du\, dv +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 m \tau}\, \frac{\frac{\tau}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen}\frac{\tau}{n}} \int_0^u \int_0^{\frac{\tau}{n}} |F|\, du\, dv\, \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} \right] du +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\tau}{n}} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen} v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^v |F|\, du\, dv\, |\operatorname{sen} nv| \left| \frac{d}{dv} \left(\frac{\operatorname{sen} nv}{\operatorname{sen} v} \right) \right| \right\} dv +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\tau}{n}} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \int_0^u \int_0^v |F| du\, dv \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}\, |\operatorname{sen} nv| \left| \frac{d}{dv} \left(\frac{\operatorname{sen} nv}{\operatorname{sen} v} \right) \right| \right\} du\, dv,$$

da cui, giusta la (2') e osservando che per $v > 0$ sussiste la disuguaglianza

$$\left| \frac{\operatorname{sen} n\, v}{n v} \right| < \frac{2}{1 + n\, v} \, [7],$$

si ricava infine

$$|I^{(2)}_{m,n}| \leq \frac{M}{2\,\pi\, m\tau} + \frac{M}{\pi m \tau} \int\limits_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}^2 u} + \frac{4\,M}{\pi^2 m} \int\limits_0^{\frac{\tau}{n}} \left| \frac{\operatorname{sen} nv}{n\, v} \right| \left(\frac{v}{\operatorname{sen}\, v} \right)^2 dv +$$

$$+ \frac{4\,M}{\pi^2\, m} \int\limits_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \operatorname{sen}\, u}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot \int\limits_0^{\frac{\tau}{n}} \left| \frac{\operatorname{sen}\, n\, v}{n\, v} \right| \left(\frac{v}{\operatorname{sen}\, v} \right)^2 n\, dv <$$

$$< \frac{M}{2\pi\, m\, \tau} + \frac{M}{2\,\tau^2} + \frac{2\,M}{n} \int\limits_0^{\frac{\tau}{n}} \frac{n}{1 + nv}\, dv + \frac{M}{m} \frac{2}{\operatorname{sen}\, \frac{\tau}{m}} \int\limits_0^{\frac{\tau}{n}} \frac{n}{1 + nv}\, dv <$$

$$< \frac{M}{2\,\pi\, m\, \tau} + \frac{M}{2\,\tau^2} + \frac{2\,M}{n} \log\,(1 + \tau) + \frac{\pi\, M}{\tau} \log\,(1 + \tau)\,,$$

laddove l'ultimo membro, per τ abbastanza grande, diviene, per le (3), minore di ε.

In maniera del tutto analoga si prova che $\lim\limits_{\substack{m \\ n} \} \to \infty} I^{(3)}_{m,n} = 0$.

c) $\lim\limits_{\substack{m \\ n} \} \to \infty} I^{(4)}_{m,n} = 0$. Integrando per parti rispetto a v, si ottiene

$$I^{(4)}_{m,n} = \frac{1}{\pi^2\, m\, n} \int\limits_0^{\frac{\tau}{m}} \left(\frac{\operatorname{sen}\, m\, u}{\operatorname{sen}\, u} \right)^2 \left\{ \left[\int\limits_0^v F\, d\, v \left(\frac{\operatorname{sen}\, n\, v}{\operatorname{sen}\, v} \right)^2 \right]_{v \to 0+}^{v = \frac{\tau}{n}} - \right.$$

---

[7] Si veda per esempio loc. cit. in [2] p. 176.

$$-\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left[\int_0^{v} F\,dv\,\frac{d}{dv}\left(\frac{\operatorname{sen} n v}{\operatorname{sen} v}\right)^2\right] dv \Big\} du = \frac{1}{\pi^2 m n}\left(\frac{\operatorname{sen}\tau}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\right)^2 \int_0^{\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}} F\cdot\left(\frac{\operatorname{sen} m u}{\operatorname{sen} u}\right)^2 du\,dv -$$

$$-\frac{1}{\pi^2 m n}\int_0^{\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} m u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\int_0^{v} F\,dv\,\frac{d}{dv}\left(\frac{\operatorname{sen} n v}{\operatorname{sen} v}\right)^2\right] du\,dv,$$

donde, mediante integrazione per parti rispetto a u, segue

$$I_{m,n}^{(4)} = \frac{\operatorname{sen}^4\tau}{\pi^2\tau^2}\,\frac{\frac{\tau}{m}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{m}}\,\frac{\frac{\tau}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{m}\,\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\int_0^{\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}} F\,du\,dv -$$

$$-\frac{2\operatorname{sen}^2\tau}{\pi^2 m\tau}\,\frac{\frac{\tau}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\int_0^{\frac{\tau}{m}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} u\,\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\int_0^{u}\int_0^{\frac{\tau}{n}} F\,du\,dv\,\operatorname{sen} mu\,\frac{d}{du}\left(\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u}\right)\right] du -$$

$$-\frac{2\operatorname{sen}^2\tau}{\pi^2 n\tau}\,\frac{\frac{\tau}{m}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{m}\,\operatorname{sen} v}\int_0^{\frac{\tau}{m}}\int_0^{v} F\,du\,dv\,\operatorname{sen} nv\,\frac{d}{dv}\left(\frac{\operatorname{sen} nv}{\operatorname{sen} v}\right)\right] dv +$$

$$+\frac{4}{\pi^2 m n}\int_0^{\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} u\,\operatorname{sen} v}\int_0^{u}\int_0^{v} F\,du\,dv\,\operatorname{sen} mu\,\operatorname{sen} nv\,\frac{d}{du}\left(\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u}\right)\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{\operatorname{sen} nv}{\operatorname{sen} v}\right)\right] du\,dv.$$

Pertanto, fissato τ in modo che valgano le conclusioni di *a*) e *b*), non appena m, n siano abbastanza grandi, risulta, giusta la (1′),

$$\left|\frac{1}{\operatorname{sen} u\,\operatorname{sen} v}\int_0^{u}\int_0^{v} F\,du\,dv\right| < \frac{\varepsilon}{\tau^2}, \quad \text{per } 0 < u \leq \frac{\tau}{m}, \quad 0 < v \leq \frac{\tau}{n},$$

e quindi

$$|I^{(4)}_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{4\,\tau^4} + \frac{\varepsilon}{\pi\, m\, \tau^3}\int_0^{\frac{\tau}{m}} \frac{2\, m^2\, u^2}{\operatorname{sen}^2 u}\, du + \frac{\varepsilon}{\pi\, n\, \tau^3}\int_0^{\frac{\tau}{n}} \frac{2\, n^2\, v^2}{\operatorname{sen}^2 v}\, dv +$$

$$+ \frac{4\,\varepsilon}{\pi^2\, m\, n\, \tau^2}\int_0^{\frac{\tau}{m}} \frac{2\, m^2\, u^2}{\operatorname{sen}^2 u}\, du \cdot \int_0^{\frac{\tau}{n}} \frac{2\, n^2\, v^2}{\operatorname{sen}^2 v}\, dv < \frac{\varepsilon}{4\,\tau^4} + \frac{\pi\,\varepsilon}{2\,\tau^2} + \frac{\pi\,\varepsilon}{2\,\tau^2} + \pi^2\,\varepsilon,$$

ove l'ultimo membro è, al pari di ε, un numero positivo prefissato a piacere.
L'assunto resta in tal modo completamente provato.

3. Il teorema ora dimostrato si riduce in particolare a quello di LEBESGUE se l'ipotesi (1) viene sostituita con la seguente

$$\lim_{\substack{u \\ v}\Big\} \to 0^+} \frac{1}{u\, v}\int_0^u \int_0^v |F(x\,,y\,,u\,,v)|\, du\, dv = 0\,,$$

mentre la (2) si lascia immutata.

Se poi si suppone che la $f(x\,,y)$ sia continua nel punto $(x\,,y)$ interno a Q [oppure che ivi essa ammetta finiti i quattro limiti $f(x \pm 0\,, y \pm 0)$], ferma restando l'ipotesi (2), e si ponga inoltre $\varphi(x,y)=f(x,y)$ [o, corrispondentememte, $\varphi(x\,,y) = \dfrac{f(x+0,y+0)+f(x+0,y-0)+f(x-0,y+0)+f(x-0,y-0)}{4}$] si trae il teorema di FEJÉR.

Da ultimo si mostrerà come le precedenti ipotesi, sotto le quali è ancora valido il teorema di LEBESGUE, siano più larghe di quelle adottate nell'enunciato di cui alla nota (2). Allo scopo basta provare che se una funzione $g(x,y)$, sommabile nel quadrato $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$, soddisfa alle condizioni :

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g\,(x\,,y)|\, dx \le L \text{ per quasi tutti gli } y \text{ di } 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\,, \\[2ex] \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g\,(x\,,y)|\, dy \le L \text{ per quasi tutti gli } x \text{ di } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,, \end{array}\right.$$

[L costante positiva; le (4) costituiscono la « condizione L »], e

$$\lim_{\substack{x \\ y}\Big\} \to 0^+} \frac{1}{x\,y} \int_0^x \int_0^y |g(x, y)|\, dx\, dy = 0\,, \tag{5}$$

allora la $g(x, y)$ verifica necessariamente la

$$\frac{1}{x\,y} \int_0^x \int_0^y |g(x\,; y)|\, dx\, dy \leq M \quad \text{per} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2},\ \ 0 < y \leq \frac{\pi}{2}\,, \tag{6}$$

(M costante positiva), mentre poi è manifesto che le (5) e (6) non implicano le (4).

Infatti dalla (5) segue subito che il primo membro della (6) è limitato per $0 < x < \delta$, $0 < y < \delta$, essendo δ un numero positivo abbastanza piccolo. Inoltre, ove fosse $\delta < \frac{\pi}{2}$, si osservi che le (4) sussistono ancora ovviamente se, in luogo di $\frac{\pi}{2}$, si pone $x \left(\geq 0 \text{ e } \leq \frac{\pi}{2}\right)$ nella prima e $y \left(\geq 0 \text{ e } \leq \frac{\pi}{2}\right)$ nella seconda, e pertanto si riconosce che, per $\delta \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$ e per $0 < x \leq \delta$, $\delta \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, il primo membro della (6) risulta $\leq \frac{L}{\delta}$ e ciò prova l'asserto.

Da quanto precede risulta pure che il teorema del n. 2 vale *a fortiori* se all'ipotesi (2) si sostituisce la

$$\int_0^u \int_0^v |F(x, y, u, v)|\, du\, dv = O(u\,v)\,,$$

insieme con la « condizione L » :

$$\int_0^{2\pi} |f(x, y)|\, dx \leq L \quad \text{per quasi tutti gli } y \text{ di } 0 \leq y \leq 2\,\pi\,,$$

$$\int_0^{2\pi} |f(x, y)|\, dy \leq L \quad \text{per quasi tutti gli } x \text{ di } 0 \leq x \leq 2\,\pi\,.$$

Gli algoritmi svolti e i risultati ottenuti nel presente lavoro si possono estendere senza difficoltà alle funzioni di $\nu > 2$ variabili.