Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Bruno Forte

Su una particolare classe di funzioni spaziali armoniche ortonormali nel cerchio $z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 3-4 (1957), p. 265-277

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_265_0>

SU UNA PARTICOLARE CLASSE DI FUNZIONI SPAZIALI ARMONICHE ORTONORMALI NEL CERCHIO $z = 0 \, , x^2 + y^2 \leq a^2$.

di BRUNO FORTE (Pisa)

SOMMARIO: *Con procedimento indiretto si determinano, stabilendo per essi formule ricorrenti, i coefficienti delle combinazioni lineari che trasformano in un sistema ortonormale sul cerchio* $x^2 + y^2 \leq a^2$ *una certa classe di polinomi, introdotta anni or sono* (¹) *per la risoluzione di particolari problemi armonici. La loro conoscenza si è già mostrata utile in alcune questioni concrete* (²).

1. — **PREMESSE.** Si riferisca lo spazio ad una terna cartesiana trirettangola Oxyz; si consideri poi sul piano $z = 0$ il cerchio σ di centro 0 e raggio a. Posto

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 \, , \qquad \mu(x \, , y) = \left(1 + \frac{\varrho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

si pensi distribuita su σ una massa positiva con densità μ^s, essendo s il generico elemento della successione $-1 \, , 1 \, , 3 \, , \ldots 2n - 1 \, , \ldots$. Sia $V_s(x \, , y \, , z)$ il corrispondente potenziale newtoniano

$$V_s(x \, , y \, , z) = \int_\sigma \mu^s \cdot \frac{1}{r} \, d\sigma \qquad (s = -1 \, , 1 \, , 3 \ldots)$$

$$[\mu = \mu(\xi \, , \eta) \, , \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]$$

le cui determinazioni nei punti di σ sono rappresentate, come è noto (³), da polinomi $\overline{V}_s(x \, , y)$ di grado $\dfrac{s+1}{2}$ in ϱ^2. I coefficienti di tali polinomi sono resi calcolabili da formule ricorrenti (⁴), che li individuano univocamente.

(¹) Cfr. nota bibliografica [1].
(²) Cfr. [2].
(³) Cfr. [1], pag. 3.
(⁴) Cfr. [1], pag. 7.

Allo scopo di avere un efficace strumento per la risoluzione di certi problemi armonici dello spazio e del semispazio, si è ravvisata l'utilità di determinare una classe di funzioni armoniche, che siano combinazioni lineari dei potenziali V_s sopra citati e le cui determinazioni polinomiali su σ costituiscano un sistema ortonormale su σ medesimo.

Per ottenere un'unica formula generale esplicita che consenta il calcolo immediato di *tutti* i coefficienti delle cercate combinazioni lineari, si è seguito un procedimento indiretto, sostanzialmente equivalente al classico procedimento di Schmidt (5) ma che, utilizzando proprietà ben note dei polinomi di Legendre, consente di giungere più rapidamente al risultato. Esso consiste nel considerare anzitutto un sistema di polinomi $\{\overline{\Gamma}_t\}$ $(t = -1, 1, 3, \ldots)$ di grado $\dfrac{t+1}{2}$ in ϱ^2, ortonormale sul cerchio σ e completo per l'approssimazione delle funzioni di ϱ^2 definite e sommabili su σ medesimo, sistema che è facilmente deducibile da quello dei polinomi di Legendre. Posti poi in relazione i coefficienti, conosciuti, dei due termini di grado più elevato nei polinomi $\{\overline{V}_s\}$ con i corrispondenti nei polinomi $\{\overline{\Gamma}_t\}$, riesce possibile intuire l'espressione di tutti i coefficienti di combinazione, di cui si dimostra successivamente la validità col metodo di induzione completa.

2. — Il sistema di polinomi $\{\overline{\Gamma}_t\}$ ortonormale e completo sul cerchio σ.

Il cambiamento di variabile rappresentato dalla relazione:

$$x = 2\,\frac{\varrho^2}{a^2} - 1 \tag{2-1}$$

trasforma il sistema dei polinomi di Legendre $\{L_t(x)\}$, ortogonale sull'intervallo $(-1, +1)$ e completo per l'approssimazione delle funzioni $f(x)$ definite e sommabili su detto intervallo, in un sistema di polinomi $\{Q_t(\varrho^2)\}$. Il sistema di polinomi $\{Q_t\}$ è ortogonale su σ, è infatti

$$\int_\sigma Q_t \cdot Q_{t'} \cdot d\,\sigma = 2\,\pi \int_0^a Q_t \cdot Q_{t'} \cdot \varrho\, d\,\varrho = \frac{a^2\,\pi}{2} \int_{-1}^{1} L_t \cdot L_{t'} \cdot d\,x = 0 \qquad (t \neq t'), \tag{2-2}$$

è inoltre completo per l'approssimazione delle funzioni di ϱ^2, definite e sommabili sul cerchio σ; basta, per provarlo, ripetere punto per punto il pro-

(5) Cfr. [3], pagg. 49, 50, cap. II, § 1, n. 1 e 2.

cedimento ben noto (6) con cui si dimostra la completezza del sistema dei polinomi di Legendre.

È utile per il seguito caratterizzare con un'unica formula, il generico coefficiente dei polinomi $\{Q_t\}$. Per questo si prendano in considerazione l'equazione differenziale

$$\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d}{d\varrho}\left\{\varrho\cdot\left(1-\frac{\varrho^2}{a^2}\right)\cdot\frac{d}{d\varrho}Q_t\right\}+\frac{(t+1)\cdot(t+3)}{a^2}Q_t=0 \qquad (t=-1,1,3\ldots) \tag{2-3}$$

cui soddisfano i singoli polinomi del sistema $\{Q_t\}$, e la relazione differenziale

$$\varrho\cdot\frac{d}{d\varrho}(Q_t+Q_{t-2})-(t+1)\cdot(Q_t-Q_{t-2})=0 \qquad (t=-1,1,3,\ldots) \tag{2-4}$$

che intercorre tra il generico polinomio Q_t e il polinomio Q_{t-2} di grado, rispettivamente, $\frac{t+1}{2}$ e $\frac{t-1}{2}$ in ϱ^2. L'equazione (2-3) e la relazione (2-4) si deducono dalla equazione differenziale (7)

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\cdot\frac{d}{dx}L_t\right\}+\frac{(t+1)\cdot(t+3)}{4}L_t=0 \tag{2-5}$$

e dalla relazione differenziale (8):

$$\frac{t+1}{2}\cdot\frac{L_{t-2}-L_t}{1-x}=\frac{d}{dx}(L_t+L_{t-2}) \tag{2-6}$$

relative ai polinomi di Legendre, facendo uso del cambiamento di variabile (2-1) che trasforma questi nei polinomi $\{Q_t\}$.

Posto ora

$$Q_t=\sum_{0}^{\frac{t+1}{2}}{}_h\, q_{t,h}\,\varrho^{2h} \tag{2-7}$$

applicando alla (2-4) il principio di identità dei polinomi, si ha:

$$q_{t,h}=\frac{t+2h+1}{t-2h+1}q_{t-2,h} \qquad \left((0\leq h\leq\frac{t-1}{2}\right) \tag{2-8}$$

(6) Cfr. [3] pagg. 65-68, cap. II, § 4, n. 1, e pag. 82, cap. II, § 8, n. 1.

(7) Cfr. [4], parte II, pag. 157.

(8) Cfr. [4], parte II, pag. 160.

Si consideri poi la relazione differenziale:

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\varrho}{a}\cdot\frac{d}{d\varrho}Q_t\right)+\frac{\varrho^3}{a^3}\cdot\frac{d^2}{d\varrho^2}Q_{t-2}+\frac{2t+5}{a}\cdot\frac{\varrho^2}{a^2}\cdot\frac{d}{d\varrho}Q_{t-2}+ \\ +\frac{(t+1)\cdot(t+3)}{a^2}\cdot\frac{\varrho}{a}\cdot Q_{t-2}=0 \tag{2-9}$$

conseguenza elementare delle (2-3) e (2-4). Da essa si trae la relazione

$$q_{t,\frac{t+1}{2}}=-\frac{4t^2}{(t+1)a^2}q_{t-2,\frac{t-1}{2}} \tag{2-10}$$

In forma più esplicita dalla (2-10) si ha

$$q_{t,\frac{t+1}{2}}=(-1)^{\frac{t+1}{2}}\frac{2^{t+1}}{a^{t+1}}\cdot\frac{t!!}{(t+1)!!}q_{-1.0} \tag{2-11}$$

mentre la (2-8) si può scrivere nella forma

$$q_{t,h}=\frac{1}{(4h)!!}\cdot\frac{(t+2h+1)!!}{(t-2h+1)!!}\cdot q_{2h-1,h} \tag{2-12}$$

dalla quale discende, in virtù della (2-11) (ove si ponga $t=2h-1$):

$$\boxed{q_{t,h}=(-1)^h\frac{1}{a^{2h}(2h)!!^2}\cdot\frac{(t+2h+1)!!}{(t-2h+1)!!}q_{-1,0}} \tag{2-13}$$

Tale ultima relazione contiene anche la precedente (2-11) e consente, come voluto, il calcolo immediato di tutti i coefficienti $q_{t,h}$ dei polinomi $\{Q_t\}$. I coefficienti $q_{t,h}$ risultano così individuati a meno del fattore, del tutto inessenziale, $q_{-1,0}$. Nel seguito si assumerà, per brevità di calcolo, $q_{-1,0}=1$.

Dal sistema ortogonale $\{Q_t\}$ si passa ora ad un sistema di polinomi in ϱ^2, $\{\overline{\Gamma}_t\}$, ortogonale e normale su σ, ponendo:

$$\overline{\Gamma}_t=\omega_t\cdot Q_t \tag{2-14}$$

e vincolando $\overline{\Gamma}_t$ alla condizione

$$\int_\sigma\overline{\Gamma}_t^2\cdot d\sigma=1 \qquad (t=-1,1,3,\ldots) \tag{2-15}$$

Il fattore di normalizzazione ω_t che figura nella (2·14) si determina facendo ricorso alla (2·4). Da essa infatti si deduce per integrazione, dopo averne moltiplicato primo e secondo membro per Q_t,

$$(2\text{-}16)\qquad \int_\sigma \varrho\, Q_t \frac{d}{d\,\varrho}\, Q_t\, d\,\sigma + \int_\sigma \varrho\, Q_t \frac{d}{d\,\varrho}\, Q_{t-2}\, d\,\sigma - (t+1)\int_\sigma Q_t^2\, d\,\sigma + (t+1)\cdot$$

$$\cdot \int_\sigma Q_t\, Q_{t-2}\, d\,\sigma = 0\ ;$$

di qui, osservato che

$$(2\text{-}17)\qquad \int_\sigma \varrho\, Q_t \frac{d}{d\,\varrho}\, Q_t\, d\,\sigma = 2\,\pi \int_\sigma^a \varrho^2\, \frac{1}{2}\, \frac{d}{d\,\varrho}\, Q_t^2\, d\,\varrho = \pi\, a^2 - \int_\sigma Q_t^2\, d\,\sigma$$

e tenuta presente l'ortogonalità di Q_t a $\varrho^{2n}\left(0 \leq n \leq \frac{t-1}{2}\right)$ e quindi anche a $\varrho \frac{d}{d\,\varrho}\, Q_{t-2}$, si ha

$$(2\text{-}18)\qquad \int_\sigma Q_t^2\, d\,\sigma = \frac{1}{\omega_t^2} \int_\sigma \overline{\Gamma}_t^2\, d\,\sigma = \frac{\pi\, a^2}{t+2}$$

da cui

$$(2\text{-}19)\qquad \boxed{\omega_t = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{t+2}{\pi}}}$$

3. — Una formula generale relativa ai coefficienti dei polinomi $\{\overline{V}_s\}$.

Posto:

$$(3\text{-}1)\qquad \overline{V}_s = \Sigma_h{}_0^{\frac{s+1}{2}}\, a_{s,h}\, \varrho^{2h} \qquad (s = -1\,, 1\,, 3\,, \ldots)$$

si può stabilire per il generico coefficiente $a_{s,h}$ la seguente espressione generale

$$(3\text{-}2)\qquad \boxed{a_{s\,h} = (-1)^h\, \frac{1}{a^{2h}} \cdot \frac{s\,!!\,(2\,h-1)\,!!}{(s-2\,h+1)\,!!\,(2\,h)\,!!^2}\, \pi^2\, a}$$

$$\left(s = -1\,, 1\,, 3\,, \ldots\,; \qquad h = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots \frac{s+1}{2}\right)$$

che parallelamente alla (2·13) assegna il valore del generico coefficiente $a_{s,h}$ in funzione dei due indici s e h.

Per provare la validità della (3-2) si trascrivano le relazioni, già note (9), che intercorrono tra i coefficienti $a_{s,h}$:

$$a_{s,h} = - s \frac{s \cdot a_{s-2,h-1} - (s-2)\, a_{s-4,h-1}}{4\, h^2\, a^2} \qquad \left(h = 1\,,\, 2\,, \ldots \frac{s-1}{2}\right) \tag{3-3}$$

$$a_{s,\frac{s+1}{2}} = - \frac{s^2}{(s+1)^2\, a^2}\, a_{s-2,\frac{s-1}{2}} = (-1)^{\frac{s+1}{2}} \frac{s^2}{a^{s+1}\,(s+1)^2}\, \pi^2\, a \tag{3-4}$$

$$a_{s,0} = \frac{s}{s+1}\, a_{s-2,0} = \frac{s}{(s+1)}\, \pi^2\, a\,. \tag{3-5}$$

Per $h = 1$ dalla (3-3) si ha:

$$a_{s,1} = - s \frac{s \cdot a_{s-2,0} - (s-2)\, a_{s-4,0}}{4\, a^2} \tag{3-6}$$

mentre per la (3-5), quando ad s si sostituisca $s - 2$, è

$$a_{s-4,0} = \frac{s-1}{s-2}\, a_{s-2,0} \tag{3-7}$$

e quindi per la (3 6):

$$a_{s,1} = - \frac{s}{4\, a^2}\, a_{s-2,0} \tag{3-8}$$

e quando ad s si sostituisca $s - 2$

$$a_{s-2,1} = - \frac{s-2}{4\, a^2}\, a_{s-4,0} \tag{3-9}$$

Sostituendo (3·7) e successivamente (3·9) in (3·6), si ha:

$$a_{s,1} = \frac{s}{s-1}\, a_{s-2,1} \tag{3-10}$$

che, corrispondentemente alla (3-5), lega i coefficienti dei termini in ϱ^2 nei polinomi $\overline{V}_s$ e $\overline{V}_{s-2}$. Si riconosce ora che la (3-5) e la (3-10) non sono che un caso particolare ($h = 0$ e $h = 1$, rispettivamente) della seguente relazione generale:

$$a_{s,h} = \frac{s}{s - 2h + 1}\, a_{s-2,h} \tag{3-11}$$

$$\left(s = -1\,,\, 1\,,\, 3\,, \ldots; \qquad h = 0\,,\, 1\,,\, 2\,, \ldots \frac{s-1}{2}\right)$$

(9) Cfr. [1]. pag. 7.

la cui validità può dimostrarsi per induzione completa. A tal fine si supponga verificata la (3·11) quando ad h si sostituisca $h-1$:

$$a_{s,h-1} = \frac{s}{s-2h+3} a_{s-2,h-1} . \tag{3·12}$$

La (3·12) implica:

$$a_{s-2\,h-1} = \frac{s-2}{s-2h+1} a_{s-4,h-1} . \tag{3·13}$$

In virtù della (3·12) e della (3·13) la (3·3) si scrive:

$$a_{s,h} = -s\frac{2h-1}{4h^2a^2} a_{s-2,h-1} = -\frac{(2h-1)(s-2h+3)}{4h^2a^2} a_{s.h-1} . \tag{3·14}$$

La (3·14) implica poi:

$$a_{s-2,h} = -\frac{(2h-1)(s-2h+1)}{4h^2a^2} a_{s-2,h-1} . \tag{3·15}$$

Di qui, sostituendo nella

$$a_{s,h} = -s\frac{2h-1}{4h^2a^2} a_{s-2,h-1} , \tag{3·16}$$

si ha

$$a_{s,h} = \frac{s}{s-2h+1} a_{s-2,h} \qquad \left(h = 0\,,1\,,2\,,\dots \frac{s-1}{2}\right); \tag{3·17}$$

da tale relazione ricorrente si deduce

$$a_{s,h} = \frac{s!!}{(2h-1)!!\,(s-2h+1)!!} a_{2h-1,h} \qquad \left(h = 0\,,1\,,2\,,\dots \frac{s-1}{2}\right). \tag{3·18}$$

Teniamo ora conto della (3·4), ponendovi $s = 2h-1$:

$$a_{2h-1,h} = (-1)^h \cdot \frac{(2h-1)!!^2}{a^{2h}\,(2h)!!^2} \pi^2 a ;$$

sostituendo nella (3·18) si ottiene in definitiva la cercata espressione generale di $a_{s,h}$:

$$a_{s,h} = (-1)^h \frac{s!!\,(2h-1)!!}{a^{2h}\,(s-2h+1)!!\,(2h)!!^2} \pi^2 a$$

4. — Determinazione dei coefficienti delle combinazioni lineari che trasformano il sistema $\{\overline{V}_s\}$ nel sistema ortogonale e completo $\{\overline{\Gamma}_t\}$.

Ci si propone qui di caratterizzare i coefficienti b_t^s delle combinazioni lineari:

$$\sum_{-1}^{t}{}_s\, b_t^s\, \overline{V}_s = \overline{\Gamma}_t \qquad (t = -1\,,1\,,3\,,\ldots) \tag{4-1}$$

che trasformano i primi $\dfrac{t+1}{2}$ polinomi $\overline{V}_s$ nel polinomio $\overline{\Gamma}_t$ del sistema ortonormale e completo su σ precedentemente considerato. Ciò equivale ad individuare in maniera univoca e possibilmente con un'*unica* formula *tutti* gli elementi della matrice triangolare doppiamente infinita:

$$\begin{array}{llllll} b_{-1}^{-1} & & & & & \\ b_1^{-1} & b_1^1 & & & & \\ b_3^{-1} & b_3^1 & b_3^3 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ b_t^{-1} & b_t^1 & b_t^3 \ldots\ldots & b_t^s \ldots\ldots & b_t^t & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \tag{4-2}$$

ove gli elementi della $\dfrac{t+1}{2}$-ma riga sono i coefficienti che figurano nella (4-1). Confrontando tra loro i coefficienti dei termini di grado $t+1$ in ϱ che compaiono a primo e secondo membro della (4-1), per la (2-11) e la (3-4) (ove si ponga $s = t$), si ha subito:

$$b_t^t = \frac{q_{t,\frac{t+1}{2}}}{a_{t,\frac{t+1}{2}}}\,\omega_t = \frac{2^{t+1}}{\pi^2\, a}\,\frac{(t+1)!!}{t!!}\,\omega_t\,, \tag{4-3}$$

relazione che individua tutti i termini della diagonale principale della (4-2). Si può ora trovare l'espressione generale del coefficiente b_t^{t-2} $(t = -1\,,1\,,3\,,\ldots)$ confrontando i coefficienti dei termini di grado $t-1$ nella (4-1). Se si tengono presenti le (2-13) e (3-2), si ha:

$$b_t^{t-2}\cdot a_{t-2,\frac{t-1}{2}} + b_t^t\, a_{t,\frac{t-1}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}}\,\frac{(t-2)!!^2}{a^{t-1}\,(t-1)!!^2}\,\pi^2\, a\cdot b_t^{t-2} + \tag{4-4}$$

$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}}\, 2^{t+1}\, \frac{(t+1)!!}{t!!} \cdot \frac{t!!\,(t-2)!!}{a^{t-1}\,(t-1)!!^2}\, \omega_t = q_{t,\frac{t-1}{2}}\, \omega_t =$$

$$= (-1)^{\frac{t-1}{2}}\, \frac{1}{a^{t-1}} \cdot \frac{(2\,t)!!}{2\cdot(t-1)!!^2}\, \omega_t$$

e quindi

$$b_t^{t-2} = -\,2^{t-1}\, \frac{(t-1)!!\cdot(t+2)}{(t-2)!!} \cdot \frac{1}{\pi^2\, a} \tag{4·5}$$

Ricavate così, elementarmente, le espressioni di b_t^t e b_t^{t-2}, si osservi che esse possono ottenersi per particolari valori di s (per $s = t$ e, rispettivamente, $s = t - 2$) dalla seguente espressione generale:

$$\boxed{b_t^s = (-1)^{\frac{t+s}{2}+1}\, \frac{(t+s+2)!!\,(t+2)}{(t-s)!!\,s!!\,(s+2)!!} \cdot \frac{1}{\pi^2\, a}\, \omega_t} \tag{4·6}$$

della quale proveremo la validità facendo uso del metodo di induzione completa. Per dimostrare la (4·6) basta far vedere che i valori da essa forniti per i coefficienti b_t^s sono soluzioni del sistema di equazioni lineari:

$$\sum_{2h-1}^{t}{}_s\, b_t^s \cdot a_{s,h} = q_{t,h}\, \omega_t \qquad \left(h = 0, 1, 2, \ldots \frac{t+1}{2}\right) \tag{4·7}$$

ottenute eguagliando i coefficienti dei termini simili nella (4·1). Si supporrà perciò che i valori forniti dalla (4·6) rendano soddisfatte le eqnazioni

$$\sum_{2h-1}^{t-2}{}_s\, b_{t-2}^s \cdot a_{s,h} = q_{t-2,h}\, \omega_{t-2} \tag{4·8}$$

$$\sum_{2h+1}^{t}{}_s\, b_t \cdot a_{s,h+1} = q_{t,h+1}\, \omega_t \tag{4·9}$$

e si dimostrerà che per essi risulta, di conseguenza, soddisfatta anche la (4·7), ovvero che è, identicamente,

$$(-1)^{\frac{t+1}{2}+h}\, \omega_t\,(t+2)\,(2\,h-1)!!\, \sum_{2h-1}^{t}{}_s\, (-1)^{\frac{s+1}{2}} \cdot \tag{4·10}$$

$$\cdot \frac{(t+s+2)!!}{(t-s)!!\,(s+2)!!\,(s-2\,h+1)!!} = a^{2h}\,(2\,h)!!^2\, q_{t,h}\, \omega_t$$

ottenuta esplicitando la (4·7) tramite le (4·6) e (3·2).

Per conseguire più agevolmente lo scopo conviene tradurre la (4-10), facendo uso della (2-13), in una relazione tra i noti coefficienti $q_{t,\frac{s+1}{2}}$; si ha così

$$(4\text{-}11)\qquad (-1)^{\frac{t+1}{2}+h}\,(t+2)\,(2\,h-1)\,!!\,\sum_{2h-1}^{t}{}_{s}\,\cdot$$
$$\cdot\,\frac{(s+1)\,!!^{2}\cdot a^{s-2h+1}}{(s+2)\,!!\,(s-2\,h+1)\,!!}\,q_{t,\frac{s+1}{2}}=(2\,h)\,!!^{2}\,q_{t,h}$$

Si tratterà quindi di dimostrare la validità di quest'ultima, assumendo, per ipotesi, che sia:

$$(4\text{-}12)\qquad (-1)^{\frac{t-1}{2}+h}\,t\cdot(2\,h-1)\,!!\,\sum_{2h-1}^{t-2}{}_{s}\,\frac{(s+1)\,!!^{2}\,a^{s-2h+1}}{(s+2)\,!!\,(s-2\,h+1)\,!!}\,q_{t-2,\frac{s+1}{2}}=$$
$$=(2\,h)!!^{2}\,q_{t-2,h}$$

$$(4\text{-}13)\qquad (-1)^{\frac{t+1}{2}+h+1}\,(t+2)\cdot(2\,h+1)\,!!\,\sum_{2h+1}^{t}{}_{s}\,\frac{(s+1)!!^{2}\,a^{s-2h-1}}{(s+2)!!\,(s-2\,h-1)\,!!}\,q_{t,\frac{s+1}{2}}=$$
$$=(2\,h+2)\,!!^{2}\,q_{t,h+1}$$

ottenute operando sulle (4-8) e (4-9), analogamente a quanto si è fatto per la (4-7).

Nella ipotesi che $\frac{t+1}{2}+h$ sia pari, alla (4-7) si può dare ancora la forma:

$$(4\text{-}14)\qquad (t+2)\,(2\,h-1)\,!!\,\sum_{2h+1}^{t}{}_{s}\,\frac{(s+1)\,!!^{2}\,a^{s-2h+1}}{(s+2)\,!!\,(s-2\,h+1)!!}\,q_{t,\frac{s+1}{2}}=$$
$$=(2\,h)\,!!^{2}\,q_{t,h}-\frac{(t+2)\,(2\,h)\,!!^{2}}{2\,h+1}\,q_{t,h}=-\,\frac{(t-2\,h+1)\,(2\,h)\,!!^{2}}{2\,h+1}\,q_{t,h}$$

e ricordando che è:

$$(4\text{-}15)\qquad q_{t,h}=-\,\frac{a^{2}\,(2\,h+2)^{2}}{(t+2\,h+3)\,(t-2\,h+1)}\,q_{t,h+1}$$

si dovrà, per dimostrare la (4-7) nella ipotesi $\frac{t+1}{2}+h$ pari, provare, in definitiva, che è:

$$(4\text{-}16)\qquad (t+2)\,(2\,h+1)\,!!\,\sum_{2h+1}^{t}{}_{s}\,\frac{(s+1)\,!!^{2}\,(t+2\,h+3)\,a^{s-2h-1}}{(s+2)\,!!\,(s-2\,h+1)\,!!}\,q_{t,\frac{s+1}{2}}=$$
$$=(2\,h+2)\,!!^{2}\,q_{t,h+1}$$

e quindi, confrontando questa con la (4 13):

$$(4\text{-}17) \qquad \sum_{2h+1}^{t} {}_s \frac{(s+1)!!^2 (t+2h+3) \cdot a^{s-2h-1}}{(s+2)!! (s-2h+1)!!} q_{t, \frac{s+1}{2}} =$$

$$= - \sum_{2h+1}^{t} {}_s \frac{(s+1)!!^2 a^{s-2h-1}}{(s+2)!! (s-2h-1)!!} q_{t, \frac{s+1}{2}}$$

ovvero:

$$(4\text{-}18) \qquad \sum_{2h+1}^{t} {}_s \frac{(s+1)!!^2 (t+s+4) a^s}{(s+2)!! (s-2h+1)!!} q_{t, \frac{s+1}{2}} = 0$$

Si osservi ora che le ipotesi tradotte dalle (4-12) e (4-13) si possono anche porre nella forma:

$$(4\text{-}19) \qquad -t \sum_{2h-1}^{t-2} {}_s \frac{(s+1)!!^2 a^s}{(s+2)!! (s-2h+1)!!} q_{t-2, \frac{s+1}{2}} = \frac{a^{2h-1} (2h)!!^2}{(2h-1)!!} q_{t-2,h}$$

$$(4\text{-}20) \qquad -(t+2) \sum_{2h+1}^{t} {}_s \frac{(s+1)!!^2 a^s}{(s+2)!! (s-2h-1)!!} q_{t, \frac{s+1}{2}} = \frac{a^{2h+1} (2h+2)!!^2}{(2h+1)!!} q_{t,h+1}$$

mentre, con procedimento identico a quello seguito per dedurre la (4-18) dalla (4-11), dalla (4-12) si ha:

$$(4\text{-}21) \qquad \sum_{2h+1}^{t-2} {}_s \frac{(s+1)!!^2 (t-s-2) a^s}{(s+2)!! (s-2h+1)!!} q_{t-2, \frac{s+1}{2}} = 0$$

Operando successivamente sulla (4-20), come segue, si ha:

$$(4\text{-}22) \qquad -t \sum_{2h+1}^{t-2} {}_s \frac{(s+1)!!^2 a^s}{(s+2)!! (s-2h+1)!!} q_{t-2, \frac{s+1}{2}} = \frac{(2h)!!^2 a^{2h-1}}{(2h-1)!!} q_{t-2,h} +$$

$$+ \frac{t \cdot (2h)!!^2 a^{2h-1}}{(2h+1)!!} q_{t-2,h} = \frac{(t+2h+1)(2h)!!^2 a^{2h-1}}{(2h+1)!!} q_{t-2,h} =$$

$$= - \frac{(2h+2)!!^2 a^{2h+1}}{(t+2h+3)(2h+1)!!} q_{t,h+1}$$

si moltiplichi ora primo e secondo membro di tale relazione per -1, e primo e secondo membro della (4-20) per $\frac{1}{t+2h+3}$, si eguaglino quindi i primi membri delle relazioni che così si ottengono, si avrà con ciò:

$$(4\text{-}23) \qquad t \sum_{2h+1}^{t-2} {}_s \frac{(s+1)!!^2 a^s}{(s+2)!! (s-2h+1)!!} q_{t-2, \frac{s+1}{2}} =$$

$$= - \frac{t+2}{t+2h+3} \sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2 a^s}{(s+2)!!(s-2h-1)!!} q_{t,\frac{s+1}{2}}$$

e sommando questa, membro a membro, con l'identità:

$$(4\text{-}24) \qquad -\frac{1}{2} \sum_{2h+1}^{t-2}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t+s+2) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t-2,\frac{s+1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t-s) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1))!!} q_{t,\frac{s+1}{2}}$$

si avrà:

$$(4\text{-}25) \qquad \frac{1}{2} \sum_{2h+1}^{t-2}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t-s-2) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t-2,\frac{s+1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(t-2h+1)}{(t+2h+3)} \sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t+s+4) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t,\frac{s+1}{2}}$$

e quindi, in definitiva, ricordando la (4-21) e che per ipotesi è $h \neq \frac{t+1}{2}$, quanto si voleva dimostrare:

$$\sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t+s+4) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t,\frac{s+1}{2}} = 0$$

Si riconosce poi, facilmente, che, agli effetti della completa riprova della validità della (4-7) quando ai b_t^s si attribuiscano i valori assegnati dalle relazioni generali (4-6), l'ipotesi della parità di $\frac{t+1}{2} + h$ non è restrittiva; infatti, dimostrata la validità della (4-18) è simultaneamente dimostrata, in virtù delle:

$$(t+s+4) q_{t,\frac{s+1}{2}} = (t-s+2) q_{t+2,\frac{s+1}{2}}$$

la seguente identità:

$$\sum_{2h+1}^{t+2}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t-s+2) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t+2,\frac{s+1}{2}} = 0$$

ove $\frac{t+3}{2} + h$ è dispari e che corrisponde alla (4-18) nel caso dispari.

5. — La particolare classe di funzioni armoniche nello spazio, ortonormali sul cerchio σ.

La generica funzione

$$(5{\cdot}1) \qquad \Gamma_t(x\,,y\,,z) = \sum_{-1}^{t}{}_s\, b_t^s \cdot V_s(x\,,y\,,z) = \sum_{-1}^{t}{}_s\, b_t^s \int_\sigma \mu^s \frac{1}{r}\, d\,\sigma$$

combinazione lineare delle funzioni armoniche $\overline{V}_s$, considerate in (1), secondo i coefficienti b_t^s, caratterizzati in (4), si identifica su σ con il polinomio $\overline{\Gamma}_t(\varrho^2)$. Il sistema formato dalle funzioni $\{\Gamma_t\}$ è quindi la cercata classe di funzioni armoniche nello spazio, ortonormali sul cerchio $z = 0\,, x^2 + y^2 \leq a^2$.

NOTA BIBLIOGRAFICA

[1] - C. Cattaneo: « *Sul calcolo di alcuni potenziali e sul loro intervento nella risoluzione di particolari problemi armonici* », Atti del Sem. Matem. e Fisico della Università di Modena, Vol. III, 1948-49.

[2] - C. Cattaneo: « *Sulla torsione di due sfere elastiche a contatto* », Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, Vol. VI, Fasc. 1-2, 1952.

[3] - R. Courant and D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publ. Inc., New-York, 1953.

[4] G. Vitali e G. Sansone: *Moderna Teoria delle funzioni di variabile reale*, II ed., Zanichelli, Bologna, 1946.