

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

CARMELO MAMMANA

Determinazione dei tipi di omografie di cui una data omografia si puo' considerare come limite

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 11,
n° 3-4 (1957), p. 249-263*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_249_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

**DETERMINAZIONE DEI TIPI
DI OMOGRAFIE DI CUI UNA DATA OMOGRAFIA
SI PUO' CONSIDERARE COME LIMITE**

di CARMELO MAMMANA (Catania)

È noto ⁽¹⁾ che una omografia particolare di S_n di caratteristica di PREDELLA:

$$[(h_1^{(1)}-1, h_2^{(1)}-1, \dots, h_{i^{(1)}}^{(1)}-1)(h_1^{(2)}-1, h_2^{(2)}-1, \dots, h_{i^{(2)}}^{(2)}-1) \dots (h_1^{(v)}-1, h_2^{(v)}-1, \dots, h_{i^{(v)}}^{(v)}-1)]$$

si può considerare come limite di omografie generali di S_n di caratteristica di PREDELLA :

$$[(h_1^{(1)}-1)(h_2^{(1)}-1) \dots (h_{i^{(1)}}^{(1)}-1)(h_1^{(2)}-1)(h_2^{(2)}-1) \dots (h_{i^{(2)}}^{(2)}-1) \dots (h_1^{(v)}-1)(h_2^{(v)}-1) \dots (h_{i^{(v)}}^{(v)}-1)].$$

Per esempio in S_3 una omologia speciale $[(2, 0)]$ è limite di omologie generali $[(2) (0)]$; una biassiale speciale $[(1, 1)]$ è limite di biassiali generali $[(1) (1)]$; ecc.

Ma si verifica facilmente che una omologia speciale è limite anche di biassiali speciali; una biassiale speciale è limite anche di omografie di tipo $[(1 \ 0 \ 0)]$; ecc.

In questo lavoro ci proponiamo di determinare tutti i tipi di omografie di S_n di cui una data omografia $\bar{\omega}$ di S_n si può considerare come limite.

Considereremo sempre omografie non degeneri, e, per comodità di ragionamento, ci riferiremo costantemente alla classificazione di C. SEGRE mediante gli esponenti e dei divisori elementari. Tuttavia i risultati ottenuti

⁽¹⁾ Cfr. PREDELLA: *Le omografie di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni*. Annali di Matematica, 17 (2) 1889-90. BERTINI: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Principato, Messina, 1923, pag. 94. ENRIQUES-CHISINI: *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Zanichelli, Bologna, 1918, Vol. II, pag. 684.

saranno anche enunciati mediante gli interi della caratteristica di PREDELLA, cioè mediante le dimensioni degli spazi fondamentali di punti uniti (semplici o multipli). Nei nn. 2, 3, 4 dimostreremo che :

Condizione necessaria e sufficiente affinché un'omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica di PREDELLA :

$$[(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_t - 1)] \quad h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_t$$

si possa ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica di PREDELLA

$$[(h_1^{(1)} - 1, h_2^{(1)} - 1, \dots, h_{t(1)}^{(1)} - 1)(h_1^{(2)} - 1, h_2^{(2)} - 1, \dots, h_{t(2)}^{(2)} - 1) \dots (h_1^{(v)} - 1, h_2^{(v)} - 1, \dots, h_{t(v)}^{(v)} - 1)]$$

con $h_i^{(j)} \geq h_{i+1}^{(j)}$ e $h_1^{(i)} \geq h_1^{(i+1)}$, è che detto \bar{d}_r il numero degli interi h_1, h_2, \dots, h_t che sono $\geq r$ e d_r il numero degli interi $h_i^{(j)}$ che sono $\geq r$, si abbia :

$$\begin{aligned} & h_1 \geq h_1^{(1)} \\ (+) \quad & \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \dots + \bar{d}_r \leq d_1 + d_2 + \dots + d_r \quad (r = 1, 2, \dots, h_1^{(1)} - 1). \end{aligned}$$

Nel n. 6 estenderemo questo risultato al caso generale dimostrando che :

Condizione necessaria e sufficiente affinché una data omografia $\bar{\omega}$ di S_n con una certa caratteristica di PREDELLA $\bar{\alpha}$, formata da p gruppi, si possa considerare come limite di omografie di S_n aventi una certa caratteristica di PREDELLA α , formata da q gruppi, è che i q gruppi di α si possano distribuire in p classi in corrispondenza biunivoca con i p gruppi di $\bar{\alpha}$ e in modo che :

1) *La somma degli h di ogni gruppo di $\bar{\alpha}$ sia uguale alla somma degli h di tutti i gruppi di α che stanno nella classe corrispondente.*

2) *Fra gli h di ogni gruppo di $\bar{\alpha}$ e gli h dei gruppi di α che stanno nella classe corrispondente valgono le relazioni analoghe alle (+).*

1. — Sia ω una omografia (non degenera) di uno spazio S_n (proiettivo, complesso, ad n dimensioni) in sè, di equazioni

$$\varrho x'_i = \sum_{k=0}^n a_{ik} x_k \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Chiameremo la matrice $A = [a_{ik}]$ modulo dell'omografia ω . Indicheremo con $D_{n+1}(\varrho)$ il determinante $|A - \varrho I|$ del primo membro dell'equazione ca-

ratteristica; $\{D_n^{(s)}(\varrho)\}$ la totalità dei minori di ordine n estratti dal determinante $D_{n+1}(\varrho)$; $\{D_{n-1}^{(s)}(\varrho)\}$ la totalità dei minori di ordine $n - 1$ estratti dal determinante $D_{n+1}(\varrho)$; ecc. Tali notazioni, ed analoghe, adopereremo per tutte le omografie che considereremo nel seguito.

Inoltre, quando diremo che una omografia $\bar{\omega}$ di modulo $[\bar{a}_{ik}]$ è limite, per $t \rightarrow 0$, di una omografia $\omega(t)$ dipendente da un parametro t ⁽²⁾, intenderemo dire che il fattore di proporzionalità a meno del quale sono determinati i coefficienti di ogni omografia $\omega(t)$ si possa scegliere in modo che, per $t \rightarrow 0$, i detti coefficienti tendano ai corrispondenti coefficienti \bar{a}_{ik} di $\bar{\omega}$. Nel seguito supporremo sempre di avere scelto in questo modo il detto fattore di proporzionalità. Pertanto, se è $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = \bar{\omega}$, allora detti $a_{ik}(t)$ i coefficienti delle equazioni di $\omega(t)$ (col fattore di proporzionalità scelto nel modo detto sopra), si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0} a_{ik}(t) = \bar{a}_{ik}$$

2. — Consideriamo l'omografia $\bar{\omega}$ (non degenera) di S_n in sè, di equazioni

$$(1) \quad \varrho \kappa_i' = \sum_{k=0}^n \bar{a}_{ik} \kappa_k \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad | \bar{A}' | = | \bar{a}_{ik} | \neq 0$$

e supponiamo che la sua equazione caratteristica $\bar{D}_{n+1}(\varrho) = 0$ abbia una sola radice $\bar{\varrho}$, e che

$$(2) \quad [(e_1, e_2, \dots, e_h)] \quad (e_i \geq e_{i+1})$$

sia la sua caratteristica⁽³⁾.

I numeri:

$$(3) \quad \begin{aligned} \mu_1 &= e_1 + e_2 + \dots + e_h \\ \mu_2 &= e_2 + \dots + e_h \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mu_h &= e_h \end{aligned}$$

⁽²⁾ Il parametro t può variare con continuità oppure prendere solo una successione (tendente a zero) di valori. In quest'ultimo caso avremo una successione di omografie che tende ad $\bar{\omega}$.

⁽³⁾ Qui ed in seguito intenderemo parlare di caratteristica di C. SEGRE di una omografia. I numeri e_i sono gli esponenti dei divisori elementari (di WEIESTRASS) di $\bar{D}_{n+1}(\varrho)$ considerati in ordine non crescente.

come pure sono primi fra di loro i polinomi in ϱ di ciascuno degli $n - 1$ gruppi :

$$\{H_{n-1}^{(s)}(\varrho)\}, \dots, \{H_{n-h(1)+2}^{(s)}(\varrho)\}, \{D_{n-h(1)+1}^{(s)}(\varrho)\}, \dots, \{D_1^{(s)}(\varrho)\}.$$

Per le (7) si ha sempre :

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_i^{(s)}(\varrho) = \bar{D}_i^{(s)}(\varrho)$$

cioè ogni minore estratto dal $D_{n+1}(\varrho)$ tende, per $t \rightarrow 0$, all'analogo minore estratto dal $\bar{D}_{n+1}(\varrho)$. Ne segue che, passando al limite, per $t \rightarrow 0$, le (9) diventano :

$$\begin{aligned} \bar{D}_{n+1}(\varrho) &= (\varrho - \bar{\varrho})^{i=1 \sum \mu_1^{(i)}} H_{n+1}^* \\ (10) \quad \{\bar{D}_n^{(s)}(\varrho)\} &= (\varrho - \bar{\varrho})^{i=1 \sum \mu_2^{(i)}} \{H_n^{*(s)}(\varrho)\} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\{\bar{D}_{n-h(1)+2}(\varrho)\} = (\varrho - \bar{\varrho})^{i=1 \sum \mu_{h(1)}^{(i)}} \{H_{n-h(1)+2}^{*(s)}(\varrho)\}$$

dove i polinomi in ϱ di ciascuno degli $h(1) - 1$ gruppi $\{H_n^{*(s)}(\varrho)\}, \{H_{n-1}^{*(s)}(\varrho)\}, \dots, \{H_{n-h(1)+2}^{*(s)}(\varrho)\}$ possono non essere primi fra di loro.

Da ciò segue intanto che è

$$h(1) \leq h$$

perchè i polinomi di ciascuno degli $n-h+1$ gruppi $\{\bar{D}_{n-h+1}^{(s)}(\varrho)\}, \{\bar{D}_{n-h}^{(s)}(\varrho)\}, \dots, \{\bar{D}_1^{(s)}(\varrho)\}$ sono primi fra di loro. Inoltre, dalle (4) e dalle (10), ricordando che i polinomi di ciascuno dei gruppi $\{\bar{H}_n^{(s)}(\varrho)\}, \{\bar{H}_{n-1}^{(s)}(\varrho)\}, \dots, \{\bar{H}_{n-h(1)+2}^{(s)}(\varrho)\}$, sono primi fra di loro, segue che è

$$\sum_{i=1}^{\nu} \mu_2^{(i)} \leq \mu_2, \quad \sum_{i=1}^{\nu} \mu_3^{(i)} \leq \mu_3, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^{\nu} \mu_{h(1)}^{(i)} \leq \mu_{h(1)}.$$

Da queste, tenendo presente le (3) e le (8) e ricordando che è $\mu_1 = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_1^{(i)} = n + 1$, segue :

$$e_1 = \mu_1 - \mu_2 \leq \sum_{i=1}^{\nu} \mu_1^{(i)} - \sum_{i=1}^{\nu} \mu_2^{(i)} = \sum_{i=1}^{\nu} (\mu_1^{(i)} - \mu_2^{(i)}) = \sum_{i=1}^{\nu} e_1^{(i)}$$

$$e_1 + e_2 = \mu_1 - \mu_3 \leq \sum_{i=1}^{\nu} \mu_1^{(i)} - \sum_{i=1}^{\nu} \mu_3^{(i)} = \sum_{i=1}^{\nu} (\mu_1^{(i)} - \mu_3^{(i)}) = \sum_{i=1}^{\nu} (e_1^{(i)} + e_2^{(i)})$$

.....

$$e_1 + e_2 + \dots + e_{h^{(1)}-1} = \mu_1 - \mu_{h^{(1)}} \leq \sum_{i=1}^{\nu} \mu_1^{(i)} - \sum_{i=1}^{\nu} \mu_{h^{(1)}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{\nu} (\mu_1^{(i)} - \mu_{h^{(1)}}^{(i)}) = \sum_{i=1}^{\nu} (e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \dots + e_{h^{(1)}-1}^{(i)}) \quad (7)$$

Concludendo si ha che:

Se una omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica

$$(11) \quad [(e_1, e_2, \dots, e_h)] \quad e_i \geq e_{i+1}$$

si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica

$$(12) \quad [(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_{h^{(1)}}^{(1)}) (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \dots, e_{h^{(2)}}^{(2)}) \dots (e_1^{(\nu)}, e_2^{(\nu)}, \dots, e_{h^{(\nu)}}^{(\nu)})]$$

con $h^{(1)} \geq h^{(2)} \geq \dots \geq h^{(\nu)}$ ed $e_i^{(j)} \geq e_{i+1}^{(j)}$, allora è necessariamente:

$$h \geq h^{(1)}$$

$$e_1 \leq \sum_{i=1}^{\nu} e_1^{(i)}$$

$$(13) \quad e_1 + e_2 \leq \sum_{i=1}^{\nu} (e_1^{(i)} + e_2^{(i)})$$

.....

$$e_1 + e_2 + \dots + e_{h^{(1)}-1} \leq \sum_{i=1}^{\nu} (e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \dots + e_{h^{(1)}-1}^{(i)})$$

3. — Vogliamo ora invertire il risultato precedente, cioè vogliamo dimostrare che se valgono le relazioni (13) allora ogni omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica (11) si può ottenere come limite di una omografia di S_n di caratteristica (12).

(7) Qui ed in seguito intenderemo $e_j^{(i)} = 0$ per $j > h^{(i)}$.

Proviamo anzitutto che:

a) Un'omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica

$$(14) \quad [(e_1, e_2)]$$

con $e_1 \geq e_2 \geq 1$ si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica

$$(15) \quad [(e_1 + 1, e_2 - 1)].$$

Infatti, con una opportuna scelta del sistema di riferimento in S_n il modulo della omografia $\bar{\omega}$ si può scrivere nella forma (canonica di JORDAN):

$$\bar{K} = [J_{e_1}, J_{e_2}]$$

dove $[J_{e_1}, J_{e_2}]$ indica la matrice somma diretta delle matrici J_{e_1} ed J_{e_2} , e J_e è una matrice quadrata di ordine e e del tipo

$$J_e = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Consideriamo la omografia $\omega(t)$ che ha per modulo

$$K(t) = \left| \begin{array}{c|c} J_{e_1} & \mathbf{0} \\ \hline A & J_{e_2} \end{array} \right|$$

dove A è una matrice ad e_1 righe ed e_2 colonne, avente tutti gli elementi nulli tranne quello di posto (1,1) che è uguale a t .

Tale omografia $\omega(t)$ risulta di caratteristica (15) per $t \neq 0$ ⁽⁸⁾, e si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = \bar{\omega} .$$

⁽⁸⁾ Infatti posto:

$$H = \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \cdot & & \\ \cdot & I_{e_1} & I_{e_2-1} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & & \\ \hline t & 0 \dots 0 & \mathbf{0} \\ \hline & & \\ & \mathbf{0} & -tI_{e_2-1} \end{array} \right| , \quad K' = [J_{e_1+1}, J_{e_2-1}]$$

dove I_r indica la matrice identica di ordine r , si ha: $K(t)H = HK'$.

Dalla proprietà a) segue subito che:

a') Ogni omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica

$$[(e_1, e_2, \dots, e_n)]$$

si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica:

$$[(e_1, e_2, \dots, e_{r-1}, e_r + 1, e_{r+1}, \dots, e_{t-1}, e_t - 1, e_{t+1}, \dots, e_n)].$$

b) Dimostriamo ora che:

Ogni omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica

$$(\gamma_0) \quad [(e_1, e_2, \dots, e_n)] \quad (e_i \geq e_{i+1})$$

si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica

$$(\gamma') \quad [(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)] \quad (e'_i \geq e'_{i+1})$$

con

$$(16) \quad e_1 \leq e'_1, \sum_{i=1}^2 e_i \leq \sum_{i=1}^2 e'_i, \dots, \sum_{i=1}^{h-1} e_i \leq \sum_{i=1}^{h-1} e'_i.$$

Se le due caratteristiche (γ_0) e (γ') coincidono, la proprietà è immediata. Se sono distinte, allora, essendo $\sum_{i=1}^h e_i = \sum_{i=1}^h e'_i = n + 1$, almeno uno dei numeri e_i è maggiore del corrispondente e'_i , e almeno uno degli stessi numeri e_i è minore del corrispondente e'_i .

Sia e_t l'ultimo dei numeri e_1, e_2, \dots, e_n , che è maggiore del corrispondente e' . Si ha:

$$e_t - 1 \geq e'_t$$

e, se è $t < h$, dalla definizione di e_t , dalle (16), e dalla $\sum_{i=1}^h e_i = \sum_{i=1}^h e'_i = n + 1$, segue

$$e_{t+1} = e'_{t+1}, e_{t+2} = e'_{t+2}, \dots, e_n = e'_n.$$

Inoltre, essendo $e_t - 1 \geq e'_t \geq e'_{t+1} = e_{t+1}$, si ha anche

$$e_t - 1 \geq e_{t+1}.$$

Sia ora e_s l'ultimo dei numeri e_1, e_2, \dots, e_n che è minore del corrispondente e' . Si ha

$$e_s < e'_s$$

con $s \leq t-1$, e, se è $s < t-1$, si ha anche :

$$(17) \quad e_{s+1} \geq e'_{s+1}, e_{s+2} \geq e'_{s+2}, \dots, e_{t-1} \geq e'_{t-1}.$$

Sia infine e_r il primo dei numeri e_1, e_2, \dots, e_h , che è uguale ad e_s .
Dalle $e_i \geq e_{i+1}$ segue

$$e_r = e_{r+1} = \dots = e_s$$

e, se è $r > 1$, si ha

$$e_{r-1} \geq e_r + 1.$$

Inoltre, essendo $e'_r \geq e'_{r+1} \geq \dots \geq e'_s > e_s$, sarà anche

$$(18) \quad e_r + 1 \leq e'_r, e_{r+1} \leq e'_{r+1}, \dots, e_s < e'_s.$$

Dalle $e_i \geq e_{i+1}$, $e_t - 1 \geq e_{t+1}$, $e_{r-1} \geq e_r + 1$ segue che la successione

$$e_1, \dots, e_{r-1}, e_r + 1, e_{r+1}, \dots, e_{t-1}, e_t - 1, e_{t+1}, \dots, e_h$$

è non crescente ed ha per somma $n + 1$ perchè $\sum_{i=1}^h e_i = n + 1$. Da ciò è da a' segue che una omografia $\bar{\omega}$ di caratteristica (γ_0) si può ottenere come limite di una omografia $\omega^{(1)}(t)$ di caratteristica

$$(\gamma_1) \quad [(e_1, \dots, e_{r-1}, e_r + 1, e_{r+1}, \dots, e_{t-1}, e_t - 1, e_{t+1}, \dots, e_h)].$$

Proviamo ora che fra gli interi che compaiono in questa caratteristica (γ_1) e quelli che compaiono nella (γ') valgono le relazioni analoghe alle (16), e cioè la somma dei primi k numeri della caratteristica (γ_1) è minore od uguale alla somma dei primi k numeri della caratteristica (γ') , e ciò per $k = 1, 2, \dots, h - 1$. Ciò è vero per $k = 1, 2, \dots, s$ per le (16) e per le (18). Se è $s = h - 1$ la nostra proprietà è quindi vera. Se è $s < h - 1$, allora la proprietà è vera anche per i rimanenti valori di k , e cioè per $k = s + 1, \dots, h - 1$; ciò perchè dalle (17) segue che la somma degli interi di (γ_1) di posto $k + 1, \dots, h$ è maggiore od uguale a quella degli interi corrispondenti e'_{k+1}, \dots, e'_h della (γ') , mentre la somma di tutti gli interi della (γ_1) è uguale alla somma di tutti gli interi della (γ') .

Dopo ciò, se la caratteristica (γ_1) non coincide con la (γ') , ripetiamo il procedimento a partire da (γ_1) invece che dalla (γ_0) , e così continuiamo. Troveremo in tal modo un numero finito di caratteristiche $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m = \gamma'$ tali che ogni omografia di S_n di caratteristica γ_j è limite di omografie di

S_n di caratteristica γ_{j+1} , e quindi ogni omografia γ_0 è limite di omografie di caratteristica γ' .

b') Con lo stesso ragionamento fatto in b) si prova che

Ogni omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica

$$[(e_1, e_2, \dots, e_n)] \quad (e_i \geq e_{i+1})$$

si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica

$$[(e'_1, e'_2, \dots, e'_{h(1)})] \quad (e'_i \geq e'_{i+1})$$

con

$$h \geq h^{(1)}, e_1 \leq e'_1, \sum_{i=1}^2 e_i \leq \sum_{i=1}^2 e'_i, \dots, \sum_{i=1}^{h^{(1)}-1} e_i \leq \sum_{i=1}^{h^{(1)}-1} e'_i.$$

Basta porre $e'_{h^{(1)}+1} = 0, e'_{h^{(1)}+2} = 0, \dots, e'_h = 0$, e ripetere il ragionamento fatto in b).

c) Proviamo ora che:

Ogni omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica

$$(19) \quad \left[\left(\sum_{i=1}^{\nu} e_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{\nu} e_2^{(i)}, \dots, \sum_{i=1}^{\nu} e_{h^{(1)}}^{(i)} \right) \right] \quad (e_r^{(i)} \geq e_{r+1}^{(i)})$$

si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica:

$$(20) \quad [(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_{h^{(1)}}^{(1)}), (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \dots, e_{h^{(2)}}^{(2)}) \dots (e_1^{(\nu)}, e_2^{(\nu)}, \dots, e_{h^{(\nu)}}^{(\nu)})]$$

con $h^{(1)} \geq h^{(2)} \geq \dots \geq h^{(\nu)}$, ed $e_r^{(i)} = 0$ per $r > h^{(i)}$.

Poniamo

$$e_1 = \sum_{i=1}^{\nu} e_1^{(i)}, e_2 = \sum_{i=1}^{\nu} e_2^{(i)}, \dots, e_{h^{(1)}} = \sum_{i=1}^{\nu} e_{h^{(1)}}^{(i)}$$

e ricordiamo che con una opportuna scelta del sistema di riferimento in S_n , il modulo \bar{k} della $\bar{\omega}$ si può scrivere come somma diretta delle matrici $J_{e_1}, J_{e_2}, \dots, J_{e_{h^{(1)}}}$. Indichiamo con $H_r(t)$ la matrice somma diretta delle matrici

$$(i-1) t I_{e_r^{(i)}} \quad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

e con $H(t)$ la matrice somma diretta delle matrici $H_1(t), H_2(t), \dots, H_{h^{(1)}}(t)$. Consideriamo l'omografia $\omega(t)$ di S_n che ha per modulo la matrice $\bar{K} + H(t)$.

Si ha subito $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = \bar{\omega}$. Inoltre per $t \neq 0$, e $1 + (i-1)t \neq 0$ la $\omega(t)$ ha la caratteristica (20) perchè $J_{e_r} + H_r(t)$ è simile alla matrice somma

diretta delle matrici

$$J_{e_r^{(1)}} , (1+t) J_{e_r^{(2)}} , (1+2t) J_{e_r^{(3)}} , \dots , (1+(v-1)t) J_{e_r^{(v)}}$$

in quanto le dette due matrici hanno gli stessi divisori elementari.

Da *b'*) e *c*) segue la proprietà enunciata al principio di questo n. 3, e cioè se valgono le relazioni (13) allora ogni omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica (11) si può ottenere come limite di una omografia $\omega(t)$ di S_n di caratteristica (12).

Infatti, se valgono le (13) allora per *b'*) ogni omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica (11) si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica (19), e per *c*) ogni omografia di caratteristica (19) si può ottenere come limite di omografie di caratteristica (12).

4. — Riunendo i risultati finali dei nn. 2, 3 si ha :

a) *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica (11) si possa ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica (12) è che valgano le relazioni (13).*

Le condizioni (13) si traducono subito in relazioni fra le dimensioni degli spazi fondamentali di punti uniti (distinti o no), cioè fra gli interi che compaiono nella caratteristica di PREDELLA corrispondente alla (11) e in quella corrispondente alla (12).

Basta ricordare⁽⁹⁾ che se

$$(k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_t - 1) \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_t \geq 1$$

e il gruppo di PREDELLA corrispondente al gruppo di SEGRE

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \quad e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_n$$

allora è $h = k_1$ ed e_r è uguale al numero degli interi k che sono $\geq r$ ($r = 1, 2, \dots, h$); in particolare è $e_1 = t$.

Da ciò segue che il teorema a) si può enunciare nella seguente forma :

b) *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica di PREDELLA*

$$(21) \quad [(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_t - 1)] \quad (h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_t)$$

⁽⁹⁾ BERTINI, *loc. cit.* in ⁽⁴⁾ pag. 112.

si possa ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica di PREDELLA

$$(22) [(h_1^{(1)}-1, h_2^{(1)}-1, \dots, h_{t(1)}^{(1)}-1)(h_1^{(2)}-1, h_2^{(2)}-1, \dots, h_{t(2)}^{(2)}-1) \dots (h_1^{(v)}-1, h_2^{(v)}-1, \dots, h_{t(v)}^{(v)}-1)]$$

con $h_i^{(j)} \geq h_{i+1}^{(j)}$ e $h_1^{(i)} \geq h_1^{(i+1)}$, è che detto \bar{d}_r il numero degli interi h_1, h_2, \dots, h_t che sono $\geq r$ e d_r il numero degli interi $h_i^{(j)}$ che sono $\geq r$, si abbia

$$(23) \quad h_1 \geq h_1^{(1)} \\ \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \dots + \bar{d}_r \leq d_1 + d_2 + \dots + d_r \quad (r = 1, 2, \dots, h_1^{(1)} - 1)$$

5. — Osserviamo che le condizioni (23) non dipendono dal modo come sono raggruppati i numeri $h_i^{(j)}$ nella (22).

Pertanto, come immediata conseguenza del teorema b) del n. 4, si ha il teorema di PREDELLA:

Un'omografia $\bar{\omega}$ di S_n con un solo gruppo caratteristico è limite di omografie generali di S_n aventi gli stessi interi caratteristici (di PREDELLA) della $\bar{\omega}$.

E si ha anche che:

Se una omografia $\bar{\omega}$ di caratteristica di PREDELLA (21) è limite di omografie di caratteristica di PREDELLA (22), allora essa è anche limite di omografie la cui caratteristica di PREDELLA differisce dalla (22) solo per il modo come sono raggruppati gli $h_i^{(j)}$.

Per esempio in S_3 un'omologia speciale $[(2, 0)]$ è limite di biassiali generali $[(1) (1)]$ ed è anche limite di biassiali speciali $[(1, 1)]$; una biassiale speciale $[(1, 1)]$ è limite di omografie generali di tipo $[(0) (0) (0) (0)]$ ed è anche limite di omografie particolari di tipo $[(0, 0, 0) (0)]$.

6. — Estenderemo ora il teorema a) del n. 4 al caso in cui l'omografia $\bar{\omega}$ abbia più gruppi caratteristici.

Siano (1) le equazioni di $\bar{\omega}$, siano

$$\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_p$$

le radici dell'equazione caratteristica $\bar{D}_{n+1}(\bar{q}) = 0$ di $\bar{\omega}$, e sia

$$(24) \quad (\bar{e}_1^{(r)}, \bar{e}_2^{(r)}, \dots, \bar{e}_{\bar{h}(r)}^{(r)}) \quad (\text{con } \bar{e}_i^{(r)} \geq \bar{e}_{i+1}^{(r)})$$

il gruppo caratteristico corrispondente alla radice \bar{q}_r ($r = 1, 2, \dots, p$).

Supponiamo che la $\bar{\omega}$ sia limite, per $t \rightarrow 0$, di una omografia $\omega(t)$ la cui equazione caratteristica $D_{n+1}(q) = 0$ abbia q radici (per $t \neq 0$).

Poichè $\lim_{t \rightarrow 0} D_{n+1}(\varrho) = \bar{D}_{n+1}(\varrho)$, avremo che, per $t \rightarrow 0$, delle q radici dell'equazione $D_{n+1}(\varrho) = 0$ un certo numero q_1 tendono a $\bar{\varrho}_1$, un certo numero q_2 tendono a $\bar{\varrho}_2, \dots$, un certo numero q_p tendono a $\bar{\varrho}_p$; e se

$$\varrho_{r1}, \varrho_{r2}, \dots, \varrho_{rq_r}$$

sono le radici di $D_{n+1}(\varrho) = 0$ che tendono a $\bar{\varrho}_r$, e

$$\mu_{r1}, \mu_{r2}, \dots, \mu_{rq_r}$$

sono le molteplicità, sarà

$$\mu_{r1} + \mu_{r2} + \dots + \mu_{rq_r} = \bar{\mu}_r$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_p = q$$

essendo $\bar{\mu}_r$ la molteplicità della radice $\bar{\varrho}_r$ nell'equazione $\bar{D}_{n+1}(\varrho) = 0$, cioè $\bar{\mu}_r = \sum_{i=1}^{\bar{h}^{(r)}} \bar{e}_i^{(r)}$.

Siano

$$(25) \quad (e_1^{(r1)}, e_2^{(r1)}, \dots, e_{h^{(r1)}}^{(r1)}) (e_1^{(r2)}, e_2^{(r2)}, \dots, e_{h^{(r2)}}^{(r2)}) \dots (e_1^{(rq_r)}, e_2^{(rq_r)}, \dots, e_{h^{(rq_r)}}^{(rq_r)})$$

con $e_i^{(rj)} \geq e_{i-1}^{(rj)}$, $h^{(rj)} \geq h^{(rj+1)}$, i q_r gruppi caratteristici di $\omega(t)$ che corrispondono ordinatamente alle radici $\varrho_{r1}, \varrho_{r2}, \dots, \varrho_{rq_r}$.

Ragionando su $\bar{\varrho}_r$ e su $\varrho_{r1}, \varrho_{r2}, \dots, \varrho_{rq_r}$ in modo analogo a come si è fatto nel n. 2, si prova che fra gli interi del gruppo (24) e quelli dei gruppi (25) valgono le relazioni analoghe alle (13), e cioè

$$\bar{h}^{(r)} \geq h^{(r1)}$$

$$\bar{e}_1^{(r)} \leq \sum_{j=1}^{q_r} e_1^{(rj)}$$

$$\bar{e}_1^{(r)} + \bar{e}_2^{(r)} \leq \sum_{j=1}^{q_r} (e_1^{(rj)} + e_2^{(rj)})$$

.

$$\bar{e}_1^{(r)} + \bar{e}_2^{(r)} + \dots + \bar{e}_{h^{(r)}-1}^{(r)} \leq \sum_{j=1}^{q_r} (e_1^{(rj)} + e_2^{(rj)} + \dots + e_{h^{(r)}-1}^{(rj)})$$

con $e_i^{(rj)} = 0$ per $i > h^{(rj)}$.

Concludendo si ha che:

Se una omografia $\bar{\omega}$ di S_n con certi p gruppi caratteristici è limite di una omografia $\omega(t)$ di S_n con certi q gruppi caratteristici, allora i q gruppi di $\omega(t)$ si possono ripartire in p classi in corrispondenza biunivoca con i p gruppi della $\bar{\omega}$, e in modo che:

1) La somma degli e di ogni gruppo caratteristico della $\bar{\omega}$ sia uguale alla somma degli e di tutti i gruppi della classe corrispondente.

2) Fra gli e di ogni gruppo caratteristico di $\bar{\omega}$ e gli e dei gruppi caratteristici di $\omega(t)$ che stanno nella classe corrispondente valgono le relazioni analoghe alla (13).

Questo risultato si inverte facilmente; cioè affinché una omografia $\bar{\omega}$ di S_n con una certa caratteristica $\bar{\gamma}$ formata da p gruppi si possa ottenere come limite di omografie di S_n avente una certa caratteristica γ formata da q gruppi, basta che i q gruppi di γ si possano distribuire in p classi in corrispondenza biunivoca con i p gruppi di $\bar{\gamma}$ e in modo che siano verificate le condizioni 1) e 2).

Infatti scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, il modulo di $\bar{\omega}$ si può scrivere come somma diretta di p matrici quadrate $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_p$ tali che \bar{A}_r ha per caratteristica l' r -mo gruppo di $\bar{\gamma}$ ($r = 1, 2, \dots, p$). Dopo ciò, essendo verificate le 1) e 2), per quanto abbiamo visto nel n. 3 la matrice \bar{A}_r si può considerare come limite, per $t \rightarrow 0$, di una matrice $A_r(t)$ avente per caratteristica i gruppi dell' r -ma classe di γ . L'omografia $\omega(t)$ che ha per modulo la somma diretta delle matrici $A_1(t), A_2(t), \dots, A_p(t)$, ha per caratteristica γ e si ha $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = \bar{\omega}$.

Concludendo si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una data omografia $\bar{\omega}$ di S_n , con una certa caratteristica $\bar{\gamma}$ formata da p gruppi, si possa considerare come limite di omografie di S_n aventi una certa caratteristica γ formata da q gruppi, è che i q gruppi di γ si possano distribuire in p classi in corrispondenza biunivoca con i p gruppi di $\bar{\gamma}$ e in modo che:

1) *La somma degli e di ogni gruppo caratteristico di $\bar{\gamma}$ sia uguale alla somma degli e di tutti i gruppi della classe corrispondente.*

2) *Fra gli e di ogni gruppo caratteristico di $\bar{\gamma}$ e gli e dei gruppi caratteristici di γ che stanno nella classe corrispondente valgono le relazioni analoghe alle (13).*

Per enunciare questo teorema mediante i numeri h di PREDELLA, basta cambiare e con h e in 2) sostituire alle condizioni (13), le condizioni (23).

OSSERVAZIONE. Da questo teorema segue che se una data omografia $\bar{\omega}$ di S_n avente una certa caratteristica $\bar{\gamma}$ si può considerare come limite di omografie di S_n aventi una certa caratteristica γ , allora ogni omografia di caratteristica $\bar{\gamma}$ si può considerare come limite di omografie di caratteristica γ .