

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIORGIO DALL'AGLIO

Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 10, n° 1-2 (1956), p. 35-74

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1956_3_10_1-2_35_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUGLI ESTREMI DEI MOMENTI DELLE FUNZIONI DI RIPARTIZIONE DOPPIA

di GIORGIO DALL'AGLIO (Pisa)

In una nota pubblicata nel 1951 ⁽¹⁾ M. Fréchet studiò la classe delle funzioni di ripartizione a due variabili $\Phi(x, y)$ aventi per funzioni di ripartizione marginali due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ assegnate. Tale classe è stata perciò chiamata la classe di Fréchet.

Il problema studiato in questa nota è la ricerca degli estremi, nella classe di Fréchet, del momento di ordine α rispetto ad una retta r del piano, dato dall'integrale di Stieltjes

$$M_r^\alpha[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - mx - p|^\alpha d\Phi(x, y).$$

La ricerca di tali estremi è fatta anzitutto nel caso, particolarmente importante, del momento di ordine 1, poi per α reale maggiore di 1. I risultati sono diversi nei due casi: per $\alpha = 1$, si trova una classe di funzioni massimanti. Per $\alpha > 1$ invece la funzione massimante è unica, e così la funzione minimante.

Generalità.

Date due funzioni di ripartizione arbitrarie $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$, funzioni reali non decrescenti che soddisfano alle condizioni

$$(1) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \Psi(y) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \Psi(y) = 0 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ MAURICE FRÉCHET: « *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données* » Annales de l'Université de Lyon, Sc. IV (1951).

una funzione $\Phi(x, y)$ sarà una funzione di ripartizione doppia (a due variabili) avente per distribuzioni marginali $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ se soddisfa alle condizioni

$$(2) \quad \Delta^{(2)} \Phi(x, y) = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_1, y_2) - \Phi(x_2, y_1) + \Phi(x_2, y_2) \geq 0 \text{ per } x_2 > x_1, y_2 > y_1$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x, y) &= \Psi(y) & \lim_{y \rightarrow +\infty} \Phi(x, y) &= \Phi(x) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x, y) &= 0 & \lim_{y \rightarrow -\infty} \Phi(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Notiamo subito che dalla (2) e dalle (3) segue la non decrescenza della $\Phi(x, y)$ rispetto a ciascuna delle variabili.

Richiamiamo ora alcuni dei risultati ottenuti da Fréchet nella nota citata.

Per ogni coppia di funzioni di ripartizione $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ esiste sempre una classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ di funzioni doppie che hanno distribuzioni marginali $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$. Tale classe, se non contiene una sola funzione, ne contiene infinite.

Per ogni funzione $\Phi(x, y)$ di $\Gamma(\Phi, \Psi)$, valgono le disuguaglianze ⁽²⁾.

$$(4) \quad \Phi(x, y) \geq \max [\Phi(x) + \Psi(y) - 1, 0]$$

$$(5) \quad \Phi(x, y) \leq \min [\Phi(x), \Psi(y)]$$

Inoltre le funzioni

$$(6) \quad \Phi_0(x, y) = \max [\Phi(x) + \Psi(y) - 1, 0]$$

$$(7) \quad \Phi_1(x, y) = \min [\Phi(x), \Psi(y)]$$

sono esse stesse funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ e sono quindi in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ rispettivamente la funzione minima e la funzione massima.

⁽²⁾ La seconda disuguaglianza discende immediatamente dalla non decrescenza della $\Phi(x, y)$ rispetto a x e a y . La prima è dimostrata da Fréchet ricorrendo alla nozione di probabilità. La dimostrazione analitica è però immediata: dati due punti (x, y) e (x', y') con $x' > x$, $y' > y$, per la (2) è $\Phi(x, y) - \Phi(x, y') - \Phi(x', y) + \Phi(x', y') \geq 0$ e, facendo tendere successivamente x' e y' a $+\infty$, si ottiene:

$$\Phi(x, y) \geq \Phi(x) + \Psi(y) - 1$$

Dalla non decrescenza di $\Phi(x, y)$ si ha inoltre che $\Phi(x, y)$ è sempre maggiore o uguale a zero. Di qui la (4).

Consideriamo ora il momento $M_r^\alpha(\Phi)$ rispetto ad una retta del piano non parallela ad uno degli assi. Posta l'equazione della retta nella forma

$$y = m x + p \quad (m \neq 0),$$

la distanza di un punto (x, y) dalla retta è data, a meno di un fattore costante, da $|y - m x - p|$; il differenziale $d\Phi(xy)$ rappresenta la probabilità che le variabili casuali cadano nel rettangolo coordinato di vertici opposti (x, y) e $(x + dx, y + dy)$. L'integrale di Stieltjes

$$M_r^\alpha[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - m x - p|^\alpha d\Phi(xy)$$

ci darà quindi il momento di ordine α , rispetto alla retta r , della distribuzione probabilistica rappresentata dalla $\Phi(xy)$.

Per lo studio dell'integrale di Stieltjes scritto sopra è necessario ricorrere ad una formula di integrazione per parti che riporto dal trattato di Picone e Viola ⁽³⁾, par. 86:

Se $f(xy)$ è una funzione continua e variazione finita e $g(xy)$ una funzione a variazione finita su un rettangolo $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, vale la trasformazione

$$(8) \quad \iint_R f(xy) dg(xy) = \Delta_{a-}^{b+} \Delta_{y c-}^{d+} f(xy) g(xy) - \Delta_{a-}^{b+} \int_c^d g(xy) dy f(xy) - \\ - \Delta_{y c-}^{d+} \int_a^b g(xy) dx f(xy) + \iint_R g(xy) df(xy).$$

In questa formula, ricordando la consueta notazione

$$f(x^+, y) = \lim_{\xi \rightarrow x+0} f(\xi, y)$$

si è posto

$$\Delta_{a-}^{b+} F(xy) = F(b^+, y) - F(a^-, y).$$

⁽³⁾ MAURO PICONE e TULLIO VIOLA: *Lezioni sulla moderna teoria dell'integrazione*. Ed. Scientifiche Einaudi 1953. La formula era già contenuta in T. VIOLA « *Sulla formula di integrazione per parti nell'integrazione doppia secondo Stieltjes* » *Giornale di Mat. di Battaglini* (4) 80 (1950).

Il problema studiato è la ricerca in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ delle funzioni per cui $M_r^\alpha[\Phi]$ assume rispettivamente il valore minimo e il valore massimo. Per affrontare il problema variazionale è opportuno sostituire alle condizioni (1) le

$$(9) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - \Phi(x)] x^\gamma &= \lim_{y \rightarrow +\infty} [1 - \Psi(y)] y^\gamma = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) x^\gamma &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \Psi(y) y^\gamma = 0 \end{aligned}$$

essendo γ un numero reale maggiore di α .

Tratterò anzitutto il caso del momento di ordine uno, che indicherò semplicemente con

$$M_r[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - mx - p| d\Phi(xy).$$

La ricerca si presenta più agevole e porta a risultati diversi che nel caso, trattato successivamente, di $\alpha > 1$.

Sia nel primo che nel secondo caso, è necessario distinguere la trattazione a seconda che il coefficiente angolare della retta r sia positivo o negativo. La differenza di segno porta infatti a risultati opposti. Cominciamo, perciò dallo studio del momento $M_r[\Phi]$ rispetto ad una retta con coefficiente angolare positivo.

§ 1. MOMENTO DI ORDINE 1 RISPETTO AD UNA RETTA CON COEFFICIENTE ANGOLARE POSITIVO.

1. Altra espressione di $M_r[\Phi]$.

Poichè, come vedremo, il problema, per $m > 0$, si può riportare con un cambiamento di variabili, al momento rispetto alla retta $y = x$ ci limitiamo allo studio dell'integrale

$$M_r[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - x| d\Phi(xy).$$

Per risolvere il problema proposto, ridurremo anzitutto l'integrale $M_r[\Phi]$ ad un integrale di Lebesgue.

Essendo positive la funzione integranda e la variazione doppia della $\Phi(xy)$, il valore dell'integrale $M_r[\Phi]$ si ottiene come limite dell'integrale esteso ad un insieme I_h , essendo $\{I_h\}$ una qualunque successione di insiemi misurabili che invada il piano. Consideriamo perciò i quadrati, a lati paralleli agli assi, di centro l'origine e lato $2h$.

Integrando per parti mediante la (8) abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \int_{-h}^h |y-x| d\Phi(xy) &= \Delta_{-h-}^{h+} \Delta_{-h-}^{h+} |y-x| \Phi(xy) - \\ &- \Delta_{-h-}^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dy |y-x| - \Delta_{-h-}^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dx |y-x| + \\ &+ \int_{-h}^h \int_{-h}^h \Phi(xy) d|y-x|. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora successivamente i termini del secondo membro.

$$\begin{aligned} \Delta_{-h-}^{h+} \Delta_{-h-}^{h+} |y-x| \Phi(xy) &= -2h [\Phi(-h^-, h^+) + \Phi(h^+, -h^-)] \\ \Delta_{-h-}^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dy |y-x| &= \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) dy |h-y| - \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy |-h-y| = \\ &= \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) dy (h-y) - \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy (h+y) = \\ &= - \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) dy - \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\Delta_{-h-}^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dx |y-x| = - \int_{-h}^h \Phi(x, h^+) dx - \int_{-h}^h \Phi(x, -h^-) dx.$$

L'integrale di Stieltjes:

$$\int_{-h}^h \int_{-h}^h \Phi(xy) d|y-x|$$

esteso al quadrato R , si può ottenere come limite dell'integrale esteso ad un qualunque insieme chiuso C contenuto in R , in cui la $\Phi(x, y)$ è continua ⁽⁴⁾

$$\iint_R \Phi(x, y) d|y - x| = \lim_{C \rightarrow R} \iint_C \Phi(x, y) d|y - x|.$$

Per calcolare l'integrale di Riemann-Stieltjes

$$(10) \quad \iint_C \Phi(x, y) d|y - x|$$

occorre considerare una qualunque scomposizione coordinata ai lati di R e scegliere quei rettangoli r che contengono punti di C ; scelto in ciascuno di questi un punto (x_r, y_r) , si fa la somma

$$(11) \quad \sum_r \Phi(x_r, y_r) V_r |y - x|$$

dove con $V_r |y - x|$ si indica la variazione doppia di $|y - x|$ su r . Il limite di questa somma, al tendere allo zero del diametro del massimo rettangolo della scomposizione coordinata dà l'integrale (10).

Se r è tutto situato nel semipiano $x \geq y$ ($x \leq y$), si ha $V_r |y - x| = 0$; perciò sono da considerare solo i termini della (11) che corrispondono a rettangoli r aventi punti su entrambi i semipiani. Poichè la $\Phi(x, y)$ è continua su C e quindi integrabile nel senso di Riemann-Stieltjes, per calcolare il limite della somma (11) possiamo considerare una scomposizione coordinata tale che gli r abbiano tutti una diagonale sulla retta $y = x$; scegliendo (x_r, y_r) su tale diagonale, si ha al limite

$$\iint_C \Phi(x, y) d|y - x| = - \int_{C'} \Phi(x, y) dx$$

dove C' indica l'intersezione di C con la retta $y = x$. Al tendere di C a R , C' tende all'intersezione γ di R con la retta $y = x$ avendo la $\Phi(x, y)$ su γ al più un'infinità numerabile di discontinuità. Si ha poi

$$\iint_R \Phi(x, y) d|y - x| = -2 \int_{\gamma} \Phi(x, y) dx = -2 \int_{-h}^h \Phi(x, x) dx.$$

(4) Essendo $\Phi(x, y)$ a variazione finita e $|y - x|$ assolutamente continua, si potrebbe dimostrare che l'integrale esteso a R è esso stesso un integrale di Riemann-Stieltjes, e quindi ottenibile direttamente con il procedimento usato per calcolare l'integrale (10). Il procedimento adoperato è invece più generale.

Otteniamo perciò

$$(12) \quad \int_{-h}^h \int_{-h}^h |y-x| d\Phi(xy) = -2h [\Phi(-h^-, h^+) + \Phi(h^+, -h^-) + \\ + \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) dy + \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy + \\ + \int_{-h}^h \Phi(x, h^+) dy + \int_{-h}^h \Phi(x, -h^-) dx - 2 \int_{-h}^h \Phi(xx) dx.]$$

Per le (9), essendo in ogni punto $\Phi(xy) \leq \Phi(x)$ e $\Phi(xy) \leq \Psi(y)$, si annulla, al tendere di h a $+\infty$, il primo termine del secondo membro della (12). Si annullano inoltre al limite i due integrali

$$\int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy \quad \int_{-h}^h \Phi(x, -h^-) dx.$$

È infatti (prendiamo, ad es., il primo)

$$\int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy \leq \int_{-h}^h \Phi(-h^-) dy = \Phi(-h^-) 2h \rightarrow 0.$$

Si ha ancora, per la (4)

$$\Psi(y) - \Phi(h^+, y) \leq 1 - \Phi(h^+)$$

e quindi

$$\int_{-h}^h \Psi(y) dy - \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) dy = \int_{-h}^h [\Psi(y) - \Phi(h^+, y)] dy \leq \\ \leq [1 - \Phi(h^+)] \int_{-h}^h dy = [1 - \Phi(h^+)] 2h \rightarrow 0.$$

La (12) diviene perciò:

$$\int_{-h}^h \int_{-h}^h |y-x| d\Phi(xy) = \int_{-h}^h [\Psi(x) - \Phi(xx)] dx + \int_{-h}^h [\Phi(x) - \Phi(xx)] dx + \varepsilon\left(\frac{1}{h}\right),$$

e passando al limite sulla successione considerata,

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - x| \, d\Phi(xy) = \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(x) - \Phi(x, x)] + [\Psi(x) - \Phi(x, x)] \, dx.
 \end{aligned}$$

Come si vedrà nel par. 4, mediante le (9) si dimostra che il valore di $M_r[\Phi]$ nella classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ è sempre finito. Cerchiamone ora gli estremi.

2. Il minimo dell'integrale $M_r[\Phi]$ e la classe delle funzioni minimanti.

La riduzione dell'integrale $M_r[\Phi]$ alla forma (13) ne rende agevole la ricerca degli estremi. Cerchiamo anzitutto il minimo.

TEOREMA I. *Date due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ non decrescenti soddisfacenti alle (9), esiste una classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ di funzioni della classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ per le quali il momento $M_r[\Phi]$ rispetto alla retta $y=x$ assume il valore minimo; tale valore è dato da*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x) - \Psi(x)| \, dx.$$

La classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ è costituita dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla condizione

$$(14) \quad \Phi(xx) = \min[\Phi(x), \Psi(x)]$$

Essa ha una funzione massima $\Phi_1(xy)$ e una funzione minima $\Phi_{1,0}(xy)$; se queste non coincidono $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ contiene infinite funzioni distinte.

Dimostriamo la prima parte dell'enunciato.

Nel secondo membro della (13) la funzione integranda è la somma di due termini entrambi positivi. Poichè in ciascuno di essi compare, col segno meno, la funzione $\Phi(xy)$ calcolata sulla retta $y=x$, il minimo dell'integrale $M_r[\Phi]$ si ha per le funzioni $\Phi(xy)$ che assumono in ogni punto della retta $y=x$ il massimo valore. Tale valore, per la (5), è dato da

$$(14) \quad \Phi(xx) = \min[\Phi(x), \Psi(x)]$$

Per tali funzioni l'integrale $M_r[\Phi]$ diventa

$$M_r[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x) - \Psi(x)| dx$$

e, per le (9), ha valore finito.

Una prima funzione minimante è data immediatamente dalla (7)

$$\Phi_1(xy) = \min[\Phi(x), \Psi(x)].$$

Tale funzione però non è in generale l'unica minimante. Ciò si può arguire dal fatto che per rendere minimo $M_r[\Phi]$ basta imporre alla funzione $\Phi(xy)$ di essere massima sulla retta $y = x$, mentre la funzione $\Phi_1(xy)$ è massima su tutto il piano. Per dimostrarlo poi basta un esempio dato dalle funzioni

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad \Psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } 0 < y \leq 1 \\ 1 & \text{per } y > 1. \end{cases}$$

Esse soddisfano alle condizioni del teorema I. Un calcolo immediato mostra che le condizioni (4) e (5) e di non decrescenza, assieme alla (14), determinano le funzioni $\Phi(xy)$ minimanti in modo unico su tutto il piano, tranne i punti del quadrato $Q: -1 < x \leq 0, 0 < y \leq 1$. D'altra parte si vede facilmente che ogni funzione così definita fuori di Q e che assume in Q un valore costante arbitrario tra 0 e $\frac{1}{2}$ appartiene a $\Gamma(\Phi, \Psi)$ ed è minimante per $M_r[\Phi]$.

Si ha perciò una classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ di funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ minimanti $M_r[\Phi]$: essa è data ovviamente dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che verificano la (14).

Passiamo ora a dimostrare l'ultima parte dell'enunciato. La funzione

$$(7) \quad \Phi(xy) = \min[\Phi(x), \Psi(y)]$$

massima per la classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$, lo è anche per la classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$. Un esame più approfondito permette di trovare in $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ anche una funzione minima.

Indichiamo con $\inf_{(a, b)} [f(x)]$ l'estremo inferiore dei valori che la funzione $f(x)$ assume nell'intervallo chiuso (a, b) . Indichiamo poi con $\inf_0 [f(x)]$ il

maggiore tra i due numeri $\inf_{(a, b)} [f(x)]$ e 0. Conserviamo la notazione, con analogo significato, se $a = b$. Con tali notazioni la funzione minima di $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ è data da

$$\Phi_{1,0}(x, y) = \Phi(x) - \inf_{(x, y)} [\Phi(z) - \Psi(z)] \quad \text{per } x \leq y$$

$$\Phi_{1,0}(x, y) = \Psi(y) - \inf_{(y, x)} [\Psi(z) - \Phi(z)] \quad \text{per } x \geq y$$

Per $x=y$ le due definizioni date coincidono e risulta $\Phi_{1,0}(xy) = \min[\Phi(x), \Psi(y)]$. La (14) è così soddisfatta. Resta da dimostrare che la $\Phi_{1,0}(xy)$ appartiene a $\Gamma(\Phi, \Psi)$, cioè che soddisfa alle condizioni (2) e (3). Per la (3) la verifica è immediata: basta notare che da un certo punto in poi la $\Phi_{1,0}(xy)$ si esprime mediante una delle due forme (ad es. per $x \rightarrow +\infty$ da $x=y$ in poi conserva la seconda forma) e sfruttare le (9). Più lunga e difficile è la verifica della (2). Nel considerare la variazione doppia, data la diversa forma che la funzione assume nei due semipiani, bisogna distinguere diversi casi a seconda della posizione dei vertici del rettangolo su cui si calcola la variazione rispetto alla retta $x=y$.

Esaminiamo ad esempio il caso che i punti (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_2) si trovino nel semipiano $x \leq y$ e per il punto (x_2, y_1) sia $x > y$. È allora $x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2$, e la variazione doppia è data da

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)} \Phi_{1,0}(x, y) &= \Phi(x_1) - \inf_{(x_1, y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)] - \Phi(x_1) + \inf_{(x_1, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] + \\ &+ \Phi(x_2) - \inf_{(x_2, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] - \Psi(y_1) + \inf_{(y_1, x_2)} [\Psi(z) - \Phi(z)]. \end{aligned}$$

Se è $\inf_{(y_1, x_2)} [\Psi(z) - \Phi(z)] > 0$ allora è, per $y_1 \leq z \leq x_2$, $\Phi(z) < \Psi(z)$ e ne segue, per la definizione,

$$\inf_{(x_1, y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = \inf_{(x_2, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = 0.$$

Inoltre, sempre per $y_1 \leq z \leq x_2$,

$$\Psi(y_1) - \Phi(x_2) \leq \Psi(z) - \Phi(z)$$

$$\Psi(y_1) - \Phi(x_2) \leq \inf_{(y_1, x_2)} [\Psi(z) - \Phi(z)]$$

da cui

$$\Delta^{(2)} \Phi_{1,0}(x, y) \geq 0.$$

Se invece è $\inf_{(y_1, x_2)} [\Psi(z) - \Phi(z)] = 0$, rimane

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)} \Phi_{1,0}(x, y) &= \inf_{(x_1, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] - \inf_{(x_1, y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)] - \\ &- \inf_{(x_2, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] + \Phi(x_2) - \Psi(y_1). \end{aligned}$$

Essendoci in (y_1, x_2) almeno un punto z in cui è $\Phi(z) \geq \Psi(z)$, segue

$$\Phi(x_2) - \Psi(y_1) \geq 0.$$

È inoltre

$$\Phi(x_2) - \Psi(y_1) \geq \Phi(x_2) - \Psi(x_2) \geq \inf_{(x_2, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)]$$

$$\Phi(x_2) - \Psi(y_1) \geq \Phi(y_1) - \Psi(y_1) \geq \inf_{(x_1, y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)]$$

e quindi

$$\Phi(x_2) - \Psi(y_1) \geq \inf_{(x_1, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)]; \quad \Phi(x_2) - \Psi(y_1) \geq \inf_{(x_1, y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)].$$

Allora se

$$\inf_{(x_1, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = \inf_{(x_1, y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)] \text{ o } \inf_{(x_1, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = \inf_{(x_2, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)]$$

la disuguaglianza è immediatamente verificata; in caso contrario

$$\inf_{(x_1, y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)] \text{ e } \inf_{(x_2, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)]$$

sono maggiori di zero, e

$$\inf_{(x_1, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = \inf_{(y_1, x_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)].$$

Allora da

$$\Phi(y_1) - \Psi(x_2) \leq \Phi(z) - \Psi(z)$$

verificata per $y_1 \leq z \leq x_2$, segue

$$\Phi(y_1) - \Psi(x_2) \leq \inf_{(y_1, x_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = \inf_{(x_1, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)]$$

e quindi

$$\begin{aligned} \Phi(x_2) - \Psi(y_1) + \inf_{(x_1, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] &\geq \Phi(x_2) - \Psi(y_1) + \Phi(y_1) - \Psi(x_2) \geq \\ &\geq \inf_{(x_2, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] + \inf_{(x_1, y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)], \end{aligned}$$

cioè $\Delta^{(2)} \Phi_{1,0}(x, y) \geq 0$.

Dopo aver in modo analogo verificato anche gli altri casi che si presentano, resta dimostrato che $\Phi_{1,0}(x, y)$ appartiene a $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$. Dimostriamo ora che in ogni punto essa assume il minimo valore compatibile con le condizioni della classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$. Supponiamo per assurdo che in un punto (x, y) (prendiamo ad es. $x < y$) sia:

$$\Phi(x, y) = \Phi(x) - \inf_{(x, y)} [\Phi(z) - \Psi(z)] - d \quad (d > 0)$$

Se in un punto x_1 con $x \leq x_1 \leq y$ è $\Phi(x_1) \leq \Psi(x_1)$, e quindi $\inf_{(x,y)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = 0$, si ha, per $y \geq x_1$, $\Phi(x_1, y) = \Phi(x_1)$ per cui è

$$\begin{aligned} \Phi(xy) - \Phi(x_1, y) - \Phi(xy_1) + \Phi(x_1 y_1) &= \Phi(x) - d - \Phi(x_1) - \\ &- \Phi(xy_1) + \Phi(x_1) \rightarrow -d. \end{aligned}$$

E al limite per $y_1 \rightarrow +\infty$ la variazione risulta negativa.

In caso contrario è

$$\inf_{(x,y)} [\Phi(z) - \Psi(z)] \geq 0$$

esiste allora nell'intervallo (x, y) almeno un punto x_1 in cui è

$$\Phi(x_1) - \Psi(x_1) \leq \inf_{(xy)} [\Phi(z) - \Psi(z)] + d' \text{ dove } d' < d.$$

È allora

$$\begin{aligned} \Phi(xy) + \Phi(x_1 y_1) - \Phi(x_1 y) - \Phi(x, x_1) &\leq \\ &\leq \Phi(xy) + \Phi(x_1 y_1) - \Phi(x, y_1) - \Phi(x_1 x_1) = \\ &= \Phi(x) - \inf_{(xy)} [\Phi(z) - \Psi(z)] - d + \Phi(x_1 y_1) - \Phi(x y_1) - \Psi(x_1). \end{aligned}$$

e facendo tendere y_1 a $+\infty$, si ottiene

$$\Phi(x) - \inf_{(xy)} [\Phi(z) - \Psi(z)] - d + \Phi(x_1) - \Phi(x) - \Psi(x_1) \leq d' - d < 0$$

cioè la variazione doppia al primo membro risulta, contrariamente all'ipotesi, negativa.

La $\Phi_{1,0}(x, y)$ è quindi la funzione minima in $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$. Ricordando la funzione massima definita dalla (5) si ha per le funzioni di $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ in ogni punto

$$\Phi_{1,0}(x, y) \leq \Phi(xy) \leq \Phi_1(xy).$$

Se le funzioni $\Phi_{1,0}(xy)$ e $\Phi_1(xy)$ sono distinte, esistono infinite altre funzioni. Infatti (v. Fréchet) date due funzioni $\Phi'(xy)$ e $\Phi''(xy)$ della classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ appartiene anche alla classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ ogni funzione $\Phi_\lambda(x, y)$ del tipo

$$\Phi_\lambda(xy) = \frac{\Phi'(xy) + \lambda \Phi''(xy)}{1 + \lambda} \text{ con } \lambda \text{ reale positivo.}$$

Se in particolare $\Phi'(xy)$ e $\Phi''(xy)$ appartengono alla classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$, mediante la (14) si vede subito che anche le $\Phi_\lambda(xy)$ vi appartengono.

Quindi appartengono a $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ le funzioni del tipo

$$\Phi_\lambda(xy) = \frac{\Phi_{1,0}(xy) + \lambda \Phi_1(xy)}{1 + \lambda}.$$

E con ciò il teorema risulta dimostrato.

3. Il massimo di $M_r[\Phi]$.

Per la ricerca delle funzioni che rendono massimo l'integrale $M_r[\Phi]$ si possono fare delle considerazioni del tutto analoghe a quelle del numero precedente. Si giunge così ad affermare:

TEOREMA II. *Nelle ipotesi del teorema I esiste una classe $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ di funzioni della classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ per cui il momento $M_r[\Phi]$ rispetto alla retta $y=x$ assume il valore massimo (sempre finito)*

$$(15) \quad \int_{-\infty}^a [\Phi(x) + \Psi(x)] dx + \int_a^{+\infty} [1 - \Phi(x)] + [1 - \Psi(x)] dx.$$

La classe $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ è costituita dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla condizione

$$(16) \quad \Phi(x) = \max [\Phi(x) + \Psi(x) - 1, 0].$$

Per la dimostrazione partiamo ancora dalla (13): si trova immediatamente che le funzioni massime sono tutte e sole le funzioni della classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che assumono in ciascun punto della retta $x=y$ il valore minimo, che è dato appunto, per la (7), dalla

$$(16) \quad \Phi(x) = \max [\Phi(x) + \Psi(x) - 1, 0].$$

Per calcolare il valore che $M_r[\Phi]$ assume sotto questa condizione, notiamo che dalla non decrescenza di $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ segue la non decrescenza di $\Phi(x) + \Psi(x) - 1$. Chiamando allora a l'estremo superiore degli x per cui è $\Phi(x) + \Psi(x) - 1 \leq 0$, per tutte le funzioni $\Phi(x, y)$ che verificano la (16) si ha

$$(15) \quad M_r[\Phi] = \int_{-\infty}^a [\Phi(x) + \Psi(x)] dx + \int_a^{+\infty} [1 - \Phi(x)] + [1 - \Psi(x)] dx$$

dove, per le condizioni (9) i due integrali al secondo membro sono finiti.

Una funzione di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfa alla (15) è la

$$(6) \quad \Phi_0(x, y) = \max [\Phi(x) + \Psi(y) - 1, 0]$$

che, essendo minima in $\Gamma(\Phi, \Psi)$, è anche minima in $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$.

Come per il minimo, tale funzione non è in generale unica. Un esempio è dato dalle funzioni:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{per } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{per } x > 2 \end{cases} \quad \Psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{per } 1 < y \leq 2 \\ \frac{2}{3} & \text{per } 2 < y \leq 3 \\ 1 & \text{per } y > 3. \end{cases}$$

Semplici considerazioni, come per la classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ mostrano che ogni funzione definita dalla (6) fuori del quadrato $Q: 0 < x \leq 1, 2 < y \leq 3$, e che ha in Q un valore costante arbitrario tra 0 e $1/3$ soddisfa al problema.

L'enunciato è così dimostrato. Mentre però nella classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ esistevano una funzione massima ad una minima in ogni punto, ciò non accade nella classe $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$. Essa ha, come abbiamo visto, una funzione minima ogni punto; ma le seguenti considerazioni mostrano che $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ non ha in una funzione massima.

Detto ancora a l'estremo superiore degli x per cui $\Phi(x) + \Psi(x) - 1 \leq 0$ le rette $x = a, y = a$ dividono il piano in quattro quadranti. Nei punti (x, y) con $x \leq a, y \leq a$ è evidentemente, per le condizioni di non decrescenza, $\Phi(xy) = 0$. Nei punti con $x > a, y > a$ (supponiamo ad es. $x > y$) è

$$\Phi(x) + \Psi(y) - 1 \geq \Phi(y) + \Psi(y) - 1 > 0$$

deve essere inoltre

$$-\Phi(x, y) + \Phi(y, y) + \Phi(x, y') - \Phi(y, y') \geq 0 \quad y' > y$$

da cui, facendo tendere y' a $+\infty$, si ottiene:

$$-\Phi(xy) + \Phi(y) + \Psi(y) - 1 + \Phi(x) - \Phi(y) \geq 0$$

che con la (4) dà

$$\Phi(xy) = \Phi(x) + \Psi(y) - 1.$$

Le funzioni minimanti restano perciò indeterminate solo nei punti del II e del IV quadrante. In essi soddisfano manifestamente alle

$$(17) \quad \begin{aligned} \Phi(x, y) &\leq \min[\Phi(x), \Phi(a^-) + \Psi(y) - 1] && \text{per il II} \\ \Phi(x, y) &\leq \min[\Psi(y), \Phi(x) + \Phi(a^-) - 1] && \text{per il IV quadrante.} \end{aligned}$$

Ora la funzione definita dalle (17) con il segno $=$ non è in generale una funzione di ripartizione, perchè non verifica la (2). D'altra parte esistono per ogni punto (x, y) funzioni di $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ che assumono in quel punto il valore massimo dato dalle (17). Chiariamo ciò con un esempio, dato da funzioni costanti a tratti già usate altre volte. Sia

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{per } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{per } x > 2 \end{cases} \quad \Psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{per } 0 < y \leq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{per } 1 < y \leq 2 \\ 1 & \text{per } y > 2 \end{cases}$$

La (16) e le condizioni di non decrescenza determinano le $\Phi(xy)$ su tutto il piano tranne i punti dei due quadrati $Q_1: 0 < x \leq 1, 1 < y \leq 2$ e $Q_2: 1 < x \leq 2, 0 < y \leq 1$. In essi le (17) danno $\Phi(xy) \leq \frac{1}{3}$ e si vede immediatamente che la funzione definita uguale a $\frac{1}{3}$ in Q_1 e Q_2 non è funzione di ripartizione, mentre sono funzioni di ripartizione, appartenenti a $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$, quella ottenuta ponendo

$$\Phi(xy) = 0 \quad \text{in } Q_1 \quad \Phi(xy) = \frac{1}{3} \quad \text{in } Q_2$$

e l'altra

$$\Phi(xy) = \frac{1}{3} \quad \text{in } Q_1 \quad \Phi(xy) = 0 \quad \text{in } Q_2$$

4. Il momento $M_r[\Phi]$ rispetto ad una retta qualunque con coefficiente angolare positivo.

I teoremi dei numeri 2 e 3 si possono facilmente generalizzare ad una retta qualsiasi data dall'equazione $y = mx + p$ con $m > 0$. Si ottiene:

TEOREMA III. *Date due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ non decrescenti soddisfacenti alle (9) e una retta r con coefficiente angolare positivo, esiste una classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ di funzioni della classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ per le quali il momento $M_r[\Phi]$ rispetto ad r assume il valore minimo; tale valore è dato da*

$$m \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x) - \Psi(mx + p)| dx.$$

La classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ è costituita dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla condizione

$$(14') \quad \Phi(x, mx + p) = \min [\Phi(x), \Psi(mx + p)]$$

Essa ha una funzione massima $\Phi_1(x, y)$ e una funzione minima $\Phi_{1,0}(xy)$.

TEOREMA IV. Nelle ipotesi del teorema III, esiste una classe $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ di funzioni della classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ per cui l'integrale $M_r[\Phi]$ assume il valore massimo, sempre finito,

$$(15') \quad m \int_{-\infty}^a [\Phi(x) - \Psi(mx + p)] dx + m \int_a^{+\infty} [1 - \Phi(x)] + [1 - \Psi(mx + p)] dx.$$

La classe $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ è costituita dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla condizione.

$$(16') \quad \Phi(x, mx + p) = \max [\Phi(x) + \Psi(mx + p) - 1, 0].$$

La dimostrazione si fa mediante un cambiamento di variabili. Il momento sia calcolato rispetto alla retta r di equazione

$$y = mx + p \quad (m > 0)$$

Poniamo

$$(18) \quad \begin{aligned} x' &= mx + p \\ y' &= y \end{aligned}$$

La funzione $\Phi(x)$ diventerà $\Phi\left(\frac{x' - p}{m}\right)$, e questa, considerata come funzione di x' è ancora una funzione di ripartizione che chiameremo $\Phi'(x')$. Se poniamo

$$(19) \quad \begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi\left(\frac{x' - p}{m}\right) = \Phi'(x') \\ \Psi(y) &= \Psi(y') \\ \Phi(xy) &= \Phi\left(\frac{x' - p}{m}, y'\right) = \Phi'(x', y') \end{aligned}$$

$\Phi'(x' y')$ è una nuova funzione di ripartizione doppia che ha per distribuzioni marginali $\Phi'(x)$ e $\Psi(y')$ ⁽⁴⁾.

D'altra parte nel piano $(x' y')$ l'equazione della retta r diviene $y' = x'$ e l'integrale da studiare è

$$M_r[\Phi'] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y' - x'| d\Phi'(x' y')$$

Per esso valgono il teorema I e il teorema II. Perciò passando mediante le (18) e (19) dal piano $(x' y')$ al piano $(x y)$, si può affermare che esiste una classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ di funzioni $\Phi(xy)$ minimanti ed una classe $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ di funzioni massimanti il momento $M_r[\Phi]$.

Notando che è

$$\Phi'(x' x') = \Phi\left(\frac{x' - p}{m}, x'\right) = \Phi(x, mx + p)$$

le condizioni (14) e (15) si trasformano nelle

$$(14') \quad \Phi(x, mx + p) = \max[\Phi(x), \Psi(mx + p)]$$

$$(15') \quad \Phi(x, mx + p) = \min[\Phi(x) + \Psi(mx + p) - 1, 0].$$

Le funzioni minima e massima della classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ sono ora

$$\begin{cases} \Phi'_{1,0}(x' y') = \Phi'(x') - \inf_{(x' y')} [\Phi'(z) - \Psi(z)] & \text{per } x' \leq y' \\ \Phi'_{1,0}(x' y') = \Psi(y') - \inf_{(y' x')} [\Phi'(z) - \Psi(z)] & \text{per } x' \geq y' \end{cases}$$

$$\Phi'_1(x' y') = \min[\Phi'(x'), \Psi(y')]$$

⁽⁴⁾ La condizione $m > 0$ è essenziale perchè ciò accada. Essendo $m > 0$ da $x'_2 > x'_1$ segue $x_2 > x_1$ e quindi

$$\Phi'(x'_2) = \Phi(x_2) \geq \Phi(x_1) = \Phi'(x'_1)$$

e la $\Phi'(x')$ è non decrescente e inoltre:

$$\lim_{x' \rightarrow +\infty} [1 - \Phi'(x')] x'^\gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - \Phi(x)] (mx + p)^\gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - \Phi(x)] x^\gamma \left(m + \frac{p}{x}\right)^\gamma = 0$$

$$\lim_{x' \rightarrow -\infty} \Phi'(y') x'^\gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) (mx + p)^\gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) x^\gamma \left(m + \frac{p}{x}\right)^\gamma = 0$$

e sono quindi verificate le (9). Analogamente si dimostrano con calcoli immediati le altre affermazioni.

cioè nel piano (x, y)

$$\begin{cases} \Phi_{1,0}(x, y) = \Phi(x) - \inf_{(mx+p, y)} \left[\Phi\left(\frac{2-p}{m}\right), \psi(z) \right] & y \geq mx + p \\ \Phi_{1,0}(x, y) = \Psi(y) - \inf_{(y, mx+p)} \left[\Phi\left(\frac{2-p}{m}\right), \Psi(z) \right] & y \leq mx + p \end{cases}$$

Il teorema III è così dimostrato. Procedendo analogamente per il massimo, si dimostra immediatamente anche il teorema IV. Anche per il massimo del momento rispetto alla retta r valgono le considerazioni fatte per la retta $y = x$: la classe $I_2(\Phi, \Psi)$ ha una funzione minima ma non ha una funzione massima, come si vede subito adattando alla nuova retta l'esempio del numero 3.

§ 2. MOMENTO DI ORDINE 1 RISPETTO AD UNA RETTA CON COEFFICIENTE ANGOLARE NEGATIVO

1. Altra espressione di $M_r[\Phi]$.

Per le rette con coefficiente angolare $m < 0$ bisogna modificare leggermente tutto il procedimento. Come già per $m > 0$, restringiamo da principio lo studio alla retta $y = -x$. Abbiamo cioè il momento

$$M_r[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y + x| d\Phi(x, y)$$

Possiamo ancora servirci della successione di quadrati che hanno per centro l'origine e lato $2h$. Applicando la formula di integrazione per parti (8) si ha:

$$\begin{aligned} (20) \quad \int_{-h}^h \int_{-h}^h |y + x| d\Phi(x, y) &= \Delta_x^{h+} - \Delta_y^{h+} |y + x| \Phi(x, y) - \Delta_x^{h+} \int_{-h}^h \Phi(x, y) dy |y + x| - \\ &- \Delta_y^{h+} \int_{-h}^h \Phi(x, y) dx |y + x| + \int_{-h}^h \int_{-h}^h \Phi(x, y) d|y + x|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{-h}^{h+} \int_x \Delta_{-h}^{h+} \int_y |y+x| \Phi(xy) &= 2h \Phi(h^+, h^+) + 2h \Phi(-h^-, -h^-) . \\
\Delta_{-h}^{h+} \int_x \int_{-h}^h \Phi(xy) dy |y+x| &= \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) dy |h+y| - \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy |-h+y| = \\
&= \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) dy + \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy \\
\Delta_{-h}^{h+} \int_y \int_{-h}^h \Phi(xy) dx |y+x| &= \int_{-h}^h \Phi(x, h^+) dx + \int_{-h}^h \Phi(x, -h^-) dx .
\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'integrale doppio si segue lo stesso procedimento del paragrafo 2. L'unica differenza è data dal segno che si ottiene. Infatti nel caso della retta $y=x$ la variazione $V_r |y-x|$ su un quadrato avente per diagonale la retta stessa risultava negativa, mentre nel caso della retta $y=-x$ la $|y+x|$ si annulla nei vertici che danno il contributo negativo, e la $V_r |y+x|$ risulta positiva. Si ottiene quindi

$$\int_{-h}^h \int_{-h}^h \Phi(xy) d|y+x| = 2 \int_r \Phi(xy) dx = 2 \int_{-h}^h \Phi(x, -x) dx$$

e la (20) diventa

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^h \int_{-h}^h |y+x| d\Phi(xy) &= 2h \Phi(h^+, h^+) + 2h \Phi(-h^-, -h^-) - \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) dy - \\
&- \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy - \int_{-h}^h \Phi(x, h^+) dx - \int_{-h}^h \Phi(x, -h^-) dx + \int_{-h}^h \Phi(x, -x) dx
\end{aligned}$$

che, con le considerazioni di pag. 41 si può scrivere

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^h \int_{-h}^h |y+x| d\Phi(xy) &= 2h - \int_{-h}^h \Psi(y) dy - \int_{-h}^h \Phi(x) dx + 2 \int_{-h}^h \Phi(x, -x) dx + \varepsilon \left(\frac{1}{h} \right) = \\
&= \int_{-h}^h dx - \int_{-h}^h \Psi(x) dx - \int_{-h}^h \Phi(x) dx + 2 \int_{-h}^h \Phi(x, -x) dx + \varepsilon \left(\frac{1}{h} \right) = \\
&= \int_{-h}^h [1 - \Phi(x) - \Psi(-x) + 2 \Phi(x, -x)] dx + \varepsilon \left(\frac{1}{h} \right)
\end{aligned}$$

da cui, passando al limite per $h \rightarrow +\infty$

$$(21) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y+x| d\Phi(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \Phi(x) - \Psi(-x) + 2\Phi(x, -x)] dx.$$

2. Gli estremi del momento rispetto alla retta $y = -x$.

Mediante la (21) si dimostrano facilmente i teoremi:

TEOREMA V. *Nelle ipotesi del teorema I il momento $M_r[\Phi]$ rispetto alla retta $y = -x$ ha in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una classe $\Gamma'_1(\Phi, \Psi)$ di funzioni minimanti. Tale classe è data dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla*

$$(22) \quad \Phi(x, -x) = \max [\Phi(x) + \Psi(-x) - 1, 0]$$

e il minimo di $M_r[\Phi]$ è dato da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x) + \Psi(-x) - 1| dx.$$

La classe $\Gamma'_1(\Phi, \Psi)$ ha una funzione minima $\Phi_0(x, y)$ e una funzione massima $\Phi_{1,0}(x, y)$.

TEOREMA VI. *Nelle ipotesi del teorema I il momento $M_r[\Phi]$ rispetto alla retta $y = -x$ ha in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una classe $\Gamma'_2(\Phi, \Psi)$ di funzioni massimanti. Tale classe è data dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla condizione*

$$(23) \quad \Phi(x, -x) = \min [\Phi(x), \Psi(-x)]$$

e il massimo di $M_r(\Phi)$ è dato dal valore (sempre finito)

$$\int_{-\infty}^b \{[1 - \Psi(-x)] + \Phi(x)\} dx + \int_b^{+\infty} \{[1 - \Phi(x)] + \Psi(-x)\} dx.$$

La dimostrazione di questi teoremi si conduce analogamente a quelle del paragrafo 1. Scritto infatti $M_r[\Phi]$ nella forma (21) si nota che la funzione integranda è non negativa: infatti è

$$\Phi(x, -x) \geq \max [\Phi(x) + \Psi(-x) - 1, 0]$$

e la funzione integranda è allora maggiore o uguale a

$$1 - \Phi(x) - \Psi(-x) + 2 \max [\Phi(x) + \Psi(-x) - 1, 0] = |1 - \Phi(x) - \Psi(-x)|$$

Quindi per avere il minimo occorre e basta rendere minima in ogni punto la funzione $\Phi(x, -x)$, il che per la (4) si ottiene ponendo

$$(22) \quad \Phi(x, -x) = \max [\Phi(x) + \Psi(-x) - 1, 0]$$

e questa condizione, per le considerazioni fatte sopra dà a $M_r[\Phi]$ il valore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |1 - \Phi(x) - \Psi(-x)| dx.$$

Tale valore è finito nelle nostre ipotesi: basta infatti, fissato un numero reale arbitrario a , scrivere

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |1 - \Phi(x) - \Psi(-x)| dx &\leq \int_{-\infty}^a \{[1 - \Psi(x)] + \Phi(x)\} + \\ &+ \int_a^{+\infty} \{[1 - \Phi(x)] + \Psi(-x)\} dx \end{aligned}$$

per vedere che le (9) assicurano l'esistenza dell'integrale.

Una funzione minimante è la funzione minima della classe di Fréchet $\Phi_0(x, y)$. Essa non è in generale unica, ma esiste tutta una classe $\Gamma'_1(\Phi, \Psi)$ di funzioni minimanti.

La funzione $\Phi_0(x, y)$, minima in $\Gamma(\Phi, \Psi)$, è minima anche in $\Gamma'_1(\Phi, \Psi)$. Esiste anche in $\Gamma'_1(\Phi, \Psi)$ una funzione massima. Essa è data, con le notazioni del par. 3, da:

$$\begin{aligned} \Phi_{0,1}(x, y) &= \Phi(x) + \Psi(y) - 1 + \inf_{(-y, x)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] \quad x \geq -y \\ \Phi_{0,1}(x, y) &= \inf_{(x, -y)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] \quad x \leq -y \end{aligned}$$

per $x = -y$ le due definizioni coincidono e si ritrova la (22).

La $\Phi_{0,1}(x, y)$ deve soddisfare in ogni punto alla disuguaglianza

$$(24) \quad \Phi(x, y) \leq \Phi_{0,1}(x, y)$$

per ogni funzione della classe $\Gamma'_1(\Phi, \Psi)$.

Cominciamo col dimostrare la (24) per i punti (x, y) con $x > -y$. Consideriamo un punto qualunque $(z, -z)$ della retta $y = -x$, con $-y \leq z \leq x$ ⁽⁵⁾ e il punto ausiliario (z, y) . Preso un $x' > z$, è

$$\Phi(z, -z) - \Phi(z, y) + \Phi(x', y) - \Phi(x', -z) \geq 0$$

$$\Phi(z, y) \leq \Phi(z, -z) + \Phi(x', y) - \Phi(x', -z)$$

e facendo tendere x' a $+\infty$,

$$(25) \quad \Phi(z, y) \leq \Phi(z, -z) + \Psi(y) - \Psi(-z)$$

Considerando ora i punti (z, y) e (x, y) e un numero $y' > y$, e facendo tendere y' a $+\infty$, si ottiene

$$\Phi(xy) \leq \Phi(z, y) - \Phi(z) + \Phi(x)$$

che, con la (25) dà

$$(26) \quad \begin{aligned} \Phi(xy) &\leq \Phi(z, -z) + \Psi(y) - \Psi(-z) - \Phi(z) + \Phi(x) = \\ &= \Phi(z, -z) + \Phi(x) + \Psi(y) - 1 + 1 - \Phi(z) - \Psi(-z) \end{aligned}$$

che vale per ogni z con $-y \leq z \leq x$.

Se esiste una $\bar{z}$ in cui è $\Phi(\bar{z}) + \Psi(\bar{z}) - 1 \geq 0$, sarà:

$$\Phi(\bar{z}, -\bar{z}) = \Phi(\bar{z}) + \Psi(-\bar{z}) - 1$$

e quindi

$$\Phi(xy) \leq \Phi(x) + \Psi(y) - 1$$

mentre

$$\inf_{(-y, x)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] = 0$$

e la (24) è dimostrata.

Se invece è sempre, per $-y \leq z \leq x$, $\Phi(z) + \Psi(z) - 1 < 0$ risulta

$$\Phi(z, -z) = 0$$

e si ha per la (26)

$$\Phi(xy) \leq \Phi(x) + \Psi(y) - 1 + \inf_{(-y, x)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)]$$

che dimostra ancora la (24).

⁽⁵⁾ Per $z = -y$ o $z = x$, la dimostrazione è leggermente semplificata non essendoci bisogno di ricorrere al punto ausiliario,

Passando ai punti (x, y) con $x \leq -y$, sempre scegliendo il punto ausiliario (z, y) , si ha

$$(27) \quad \Phi(xy) \leq \Phi(z, y) \leq \Phi(z, -z)$$

per cui se in un punto $\bar{z}$ è $\Phi(\bar{z}) + \Psi(-\bar{z}) - 1 \leq 0$, è

$$\Phi(\bar{z}, -\bar{z}) = 0, \quad \inf_{(x, -y)} [\Phi(z) + \Psi(z) - 1] = 0$$

e la (24) è soddisfatta. Se invece è sempre $\Phi(z) + \Psi(-z) - 1 > 0$ ne segue

$$\Phi(z, -z) = \Phi(z) + \Psi(-z) - 1$$

e per la (27) si ha

$$\Phi(xy) \leq \inf_{(x, -y)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] = \inf_{(x, -y)} [\Phi(z) + \Psi(z) - 1].$$

La (24) è così dimostrata. Bisogna ora dimostrare che la $\Phi_{0,1}(xy)$ appartiene alla $\Gamma'_1(\Phi, \Psi)$, e per questo, essendo verificata la (22) e dimostrandosi immediatamente le (3), resta da provare che vale la (2). Come nel par. 1, ciò si ottiene esaminando i diversi modi in cui i quattro vertici del rettangolo su cui si calcola la variazione $\Delta^{(2)}$ si dispongono rispetto alla retta $y = -x$, e calcolando per ciascuno di essi le possibili espressioni di $\Phi_{0,1}(xy)$. Limitiamoci a farlo per il caso di meno immediata dimostrazione, quello in cui due punti, (ad es. (x_1, y_2) e (x_2, y_2)) stanno nel semipiano $x > -y$. Si ha allora $-y_2 < x_1 < x_2 < -y_1$, e la variazione doppia diventa

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)} \Phi_{0,1}(xy) = & \inf_{(x_1, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] - \inf_{(x_2, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] + \\ & + \inf_{(-y_2, x_2)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] - \inf_{(-y_2, x_1)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] + \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \end{aligned}$$

Trascurando il caso banale che si annullino i primi quattro termini, sia diverso da zero solo il secondo termine (o il quarto: il procedimento è analogo); allora è

$$\inf_{(x_1, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] = \inf_{(x_1, x_2)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] \leq 0$$

ed è, per $x_1 \leq z \leq x_2$,

$$\Phi(z) + \Psi(-z) - 1 \geq \Phi(x_1) + \Psi(-x_2) - 1$$

$$\Phi(x_1) + \Psi(-x_2) - 1 \leq 0.$$

D'altra parte, da $\inf_0^{(x_2, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] > 0$ segue

$$\begin{aligned} \inf_0^{(x_2, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] &\leq \Phi(x_2) + \Psi(-x_2) - 1 \\ \Phi(x_2) - \Phi(x_1) - \inf_0^{(x_2, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] &\geq \Phi(x_2) - \Phi(x_1) - \\ &\quad - \Phi(x_2) - \Psi(-x_2) + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Supponiamo ora diversi da zero il secondo e il quarto termine, nulli il primo e il terzo. Sarà:

$$\begin{aligned} \inf_0^{(x_2, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] &\leq \Phi(x_2) + \Psi(-x_2) - 1 \\ \inf_0^{(-y_2, x_1)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] &\leq 1 - \Phi(x_1) - \Psi(-x_1) \\ \Phi(x_2) - \Phi(x_1) - \inf_0^{(x_2, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] &- \\ - \inf_0^{(-y_2, x_1)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] &\geq \Phi(x_2) - \Phi(x_1) - \Phi(x_2) - \Psi(-x_2) + 1 - \\ &\quad - 1 + \Phi(x_1) + \Psi(-x_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Se infine con si verifica uno dei casi precedenti, sarà diverso da zero il primo o il terzo termine (non possono essere contemporaneamente diversi da zero per la loro definizione). Sia ad es. $\inf_0^{(x_1, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] \neq 0$. Ciò significa $\Phi(z) + \Psi(-z) - 1 > 0$ per $x_1 \leq z \leq -y_1$, e quindi

$$\inf_0^{(-y_2, x_2)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] = \inf_0^{(-y_2, x_1)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] = 0.$$

Se $\inf_0^{(x_1, -y_1)} [\Phi(z) - \Psi(-z) - 1] = \inf_0^{(x_2, -y_2)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1]$ la cosa è immediata. In caso contrario è

$$\inf_0^{(x_1, -y_1)} [\Phi(z) - \Psi(-z) - 1] = \inf_0^{(x_1, x_2)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1]$$

e quindi, per $x_1 \leq x \leq x_2$

$$\begin{aligned} \Phi(z) + \Psi(-z) - 1 &\geq \Phi(x_1) + \Psi(-x_2) - 1 \\ (\inf_0^{(x_1, x_2)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] &\geq \Phi(x_1) + \Psi(-x_2) - 1 \\ \inf_0^{(x_1, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] + \Phi(x_2) - \Phi(x_1) &\geq \Phi(x_2) - \Phi(x_1) + \Phi(x_1) + \\ &\quad + \Psi(-x_2) - 1 \geq \inf_0^{(x_2, -y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] \end{aligned}$$

cioè, anche in quest'ultimo caso, $\Delta^{(2)} \Phi_{0,1}(xy) \geq 0$.

Con procedimenti analoghi la dimostrazione può completarsi, ottenendo che la $\Phi_{0,1}(x, y)$ è una funzione di $I'_1(\Phi, \Psi)$. Il teorema V risulta in tal modo dimostrato.

Per ottenere il massimo dell'integrale (21) occorre e basta rendere massima la funzione $\Phi(x, y)$ sulla retta $y = -x$, cioè, per la (5), porre la condizione

$$(23) \quad \Phi(x, -x) = \min[\Phi(x), \Psi(-x)]$$

e tale condizione caratterizza la classe $I'_2(\Phi, \Psi)$ delle funzioni massimanti.

L'integrale (21) diventa allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \Phi(x) - \Psi(-x) + 2 \min[\Phi(x), \Psi(-x)]] dx$$

Poichè, al crescere di x , $\Phi(x)$ non decresce, mentre $\Psi(-x)$ non cresce, esisterà un punto b tale che

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\leq \Psi(-x) & x < b \\ \Phi(x) &\geq \Psi(-x) & x > b \end{aligned}$$

Si ha allora

$$M_r[\Phi] = \int_{-\infty}^b \{[1 - \Psi(-x)] + \Phi(x)\} dx + \int_b^{+\infty} \{[1 - \Phi(x)] + \Psi(-x)\} dx$$

e gli integrali al secondo membro hanno, per le (9), valore finito.

Anche il teorema VI è così dimostrato. È opportuno notare che, come per la retta $y = x$, la classe $I'_2(\Phi, \Psi)$ non ha in generale le due funzioni estreme. Essa ha una funzione massima, la (7), ma non ha necessariamente una funzione minima in ogni punto.

3. Il momento $M_r[\Phi]$ rispetto ad una retta qualunque con coefficiente angolare negativo.

I due teoremi del numero precedente si generalizzano immediatamente al caso di una retta qualsiasi con coefficiente angolare negativo. Si ottengono i teoremi

TEOREMA VII. *Date due funzioni non decrescenti $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ soddisfacenti alle (9) ed una retta r con coefficiente angolare negativo, il momento*

$M_r[\Phi]$ ha in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una classe $\Gamma'_1(\Phi, \Psi)$ di funzioni minimanti. Tale classe è data dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla

$$(22') \quad \Phi(x, mx + p) = \max[\Phi(x) + \Psi(mx + p) - 1, 0]$$

e il minimo di $M_r[\Phi]$ è dato da

$$-m \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x) + \Psi(mx + p) - 1| dx.$$

La classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ ha una funzione minima $\Phi_0(xy)$ e una funzione massima

TEOREMA VIII. Nelle ipotesi del teorema VII il momento $M_r[\Phi]$ in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ ha una classe $\Gamma'_2(\Phi, \Psi)$ di funzioni massimanti. Tale classe è data dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla condizione

$$(23') \quad \Phi(x, mx + p) = \min[\Phi(x), \Psi(mx + p)]$$

e per esse $M_r[\Phi]$ assume il valore, sempre finito,

$$-m \int_{-\infty}^b \{[1 - \Psi(mx + p)] + \Phi(x)\} dx - m \int_b^{+\infty} \{[1 - \Phi(x)] + \psi(mx + p)\} dx.$$

La dimostrazione di tali teoremi è del tutto analoga a quella condotta nel § 1, n. 4, per i teoremi III e IV. Il cambiamento di variabili che ora si sfrutta è dato da

$$x' = -mx - p$$

$$y' = y$$

Essendo $m < 0$, si ha anche ora che, per $x \rightarrow +\infty$, anche $x' \rightarrow +\infty$ e viceversa. La dimostrazione quindi può procedere in modo analogo.

Con i successivi ampliamenti, si sono trovati gli estremi del momento $M_r[\Phi]$ rispetto a qualunque retta del piano, che non sia parallela ad uno degli assi. Per ciascuna retta si è trovata una classe di funzioni minimanti ed una classe di funzioni massimanti. È opportuno notare quale ruolo giochino in queste classi le funzioni minima $\Phi_0(xy)$ e massima $\Phi_1(xy)$ della classe di Fréchet. Per ogni retta r con coefficiente positivo la $\Phi_1(xy)$ è una funzione minimante, anzi tutte le classi $\Gamma'_1(\Phi, \Psi)$ rispetto a rette diverse

la hanno come funzione massima, mentre la $\Phi_0(xy)$ è massimante ed è la funzione minima in ogni $I_2(\Phi, \Psi)$. Quando si passa alle rette con coefficiente negativo, i risultati si invertono: per ogni retta la $\Phi_0(xy)$ è una funzione minimante e la $\Phi_1(xy)$ una funzione massimante, ed entrambe hanno ancora nelle classi $I'_1(\Phi, \Psi)$ e $I'_2(\Phi, \Psi)$ le stesse proprietà. Questa inversione dei risultati apparirà in forma più semplice nel caso del momento di ordine $\alpha > 1$.

§ 3. IL MOMENTO DI ORDINE α .

1. Trasformazione dell'integrale $M_r^\alpha[\Phi]$.

Passiamo al momento di ordine α , con α numero reale maggiore di 1. Date due funzioni di ripartizione $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ ed una retta r di equazione $y = mx + p$, esso è dato dall'integrale di Stieltjes

$$M_r^\alpha[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - mx - p|^\alpha d\Phi(xy)$$

dove $\Phi(xy)$ è una funzione della classe di Fréchet $I(\Phi, \Psi)$.

Supponiamo ancora, per la ricerca degli estremi, che le funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ soddisfino alle (9).

Come già per $\alpha = 1$, il procedimento che seguiremo è quello di ridurre l'integrale $M_r^\alpha[\Phi]$ ad un integrale di Lebesgue, in modo da ottenere una forma particolarmente semplice che, analogamente alla (13) ed alla (21), ci permetta una ricerca immediata degli estremi. Le condizioni (9), oltre a permetterci di ridurre $M_r^\alpha[\Phi]$ a tale forma, ci assicurano, come vedremo nel seguito, che il momento $M_r^\alpha[\Phi]$ ha sempre valore finito.

Anche per $\alpha > 1$ bisogna distinguere due casi, a seconda che la retta r abbia coefficiente angolare positivo o negativo; e ciò per leggere modifiche nella trattazione, e per i risultati addirittura invertiti che, come già accennato, per essi si ottengono. Partiremo anche ora dallo studio del momento rispetto alle bisettrici, (rispettivamente $y = x$ nel primo e $y = -x$ nel secondo caso), che ci permettono una notevole semplificazione dei calcoli, per ricondurre poi mediante un cambiamento di variabili al caso generale.

Cominciando perciò con il momento rispetto alla retta $y = x$, avremo

$$M_r^a[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - x|^a d\Phi(xy)$$

Seguendo il procedimento già usato, ci limiteremo a calcolare l'integrale nei quadrati di centro l'origine e lato $2h$, passando poi al limite per h tendente a $+\infty$.

Ciò premesso, applichiamo la formula (8) di integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \int_{-h}^h |y - x|^a d\Phi(xy) &= \Delta_{x-h-}^{h+} \Delta_{y-h-}^{h+} |y - x| \Phi(xy) - \\ (28) \quad &- \Delta_{x-h-}^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dy |y - x|^a - \Delta_{y-h-}^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dx |y - x|^a + \\ &+ \int_{-h}^h \int_{-h}^h \Phi(xy) d|y - x|^a. \end{aligned}$$

Trasformiamo i termini del secondo membro

$$\begin{aligned} \Delta_{x-h-}^{h+} \Delta_{y-h-}^{h+} |y - x| \Phi(xy) &= - (2h)^a [\Phi(h^+, -h^-) + \Phi(-h^-, h^+)] \\ \Delta_{x-h-}^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dy |y - x|^a &= \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) dy |h - y|^a - \\ &- \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy |-h - y|^a = \\ &= \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) dy (h - y)^a - \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) dy (h + y)^a = \\ &= - \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) \alpha (h - y)^{\alpha-1} dy - \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) \alpha (h + y)^{\alpha-1} dy. \end{aligned}$$

Analogamente si trova

$$\begin{aligned} \Delta_{y-h}^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dx |y-x|^\alpha &= - \int_{-h}^h \Phi(x, h^+) \alpha (h-x)^{\alpha-1} dx - \\ &- \int_{-h}^h \Phi(x, -h^-) \alpha (h+x)^{\alpha-1} dx. \end{aligned}$$

Per calcolare il successivo integrale doppio della (28), spezziamo il campo di integrazione nei due triangoli ottenuti tagliando il quadrato R con la retta $y=x$. In ciascuno di essi la funzione $(y-x)^\alpha$ è di segno costante ed è assolutamente continua. Ricorrendo per l'integrazione alla derivata seconda mista, questa è data da

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} |y-x|^\alpha = \begin{cases} -\alpha(\alpha-1)(x-y)^{\alpha-2} & \text{per } x > y \\ -\alpha(\alpha-1)(y-x)^{\alpha-2} & \text{per } x < y \end{cases}$$

di conseguenza è

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \int_{-h}^h \Phi(xy) d|y-x|^\alpha &= \iint_{T_1} \Phi(xy) d(x-y)^\alpha + \iint_{T_2} \Phi(xy) d(y-x)^\alpha = \\ &= - \iint_{T_1} \Phi(xy) \alpha(\alpha-1)(x-y)^{\alpha-2} dx dy - \iint_{T_2} \Phi(xy) \alpha(\alpha-1)(y-x)^{\alpha-2} dx dy = \\ &= - \int_{-h}^h dy \int_y^h \Phi(xy) \alpha(\alpha-1)(x-y)^{\alpha-2} dx - \int_{-h}^h dx \int_x^h \Phi(xy) \alpha(\alpha-1)(y-x)^{\alpha-2} dy. \end{aligned}$$

La (28) si riduce quindi a

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \int_{-h}^h |y-x|^\alpha d\Phi(xy) &= -(2h)^\alpha [\Phi(h^+ - h^-) + \Phi(-h^-, h^+)] + \\ &+ \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) \alpha (h-y)^{\alpha-1} dy + \int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) \alpha (h+y)^{\alpha-1} dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-h}^h \Phi(x, h^+) \alpha (h-x)^{\alpha-1} dx + \int_{-h}^h \Phi(x, -h^-) \alpha (h+x)^{\alpha-1} dx - \\
& - \int_{-h}^h dy \int_y^h \Phi(xy) \alpha (\alpha-1) (x-y)^{\alpha-2} - \int_{-h}^h dx \int_x^h \Phi(xy) \alpha (\alpha-1) (y-x)^{\alpha-2} dy.
\end{aligned}$$

Per le (9) il termine $-(2h)^\alpha [\Phi(h^+, -h^-) + \Phi(-h^-, h^+)]$ tende a zero al tendere di h a $+\infty$, e si annullano al limite anche i due integrali

$$\int_{-h}^h \Phi(-h^-, y) \alpha (h+y)^{\alpha-1} dy, \int_{-h}^h \Phi(x, -h^-) \alpha (h+x)^{\alpha-1} dx.$$

Inoltre si ha per la (4) $\Psi(y) - \Phi(h^+, y) \leq 1 - \Phi(h^+)$

$$\begin{aligned}
& \int_{-h}^h \Psi(y) \alpha (h-y)^{\alpha-1} dy - \int_{-h}^h \Phi(h^+, y) \alpha (h-y)^{\alpha-1} dy = \\
& = \int_{-h}^h [\Psi(y) - \Phi(h^+, y)] \alpha (h-y)^{\alpha-1} dy \leq \\
& \leq [1 - \Phi(h^+)] \int_{-h}^h \alpha (h-y)^{\alpha-1} dy = [1 - \Phi(h^+)] (2h)^\alpha
\end{aligned}$$

che per le (9) tende a zero per $h \rightarrow +\infty$. Si ha cioè

$$\int_{-h}^h \Phi(h^+, y) \alpha (h-y)^{\alpha-1} dy = \int_{-h}^h \Psi(y) \alpha (h-y)^{\alpha-1} dy + \varepsilon_1 \left(\frac{1}{h} \right)$$

e analogamente

$$\int_{-h}^h \Phi(x, h^+) \alpha (h-x)^{\alpha-1} dx = \int_{-h}^h \Phi(x) \alpha (h-x)^{\alpha-1} dx + \varepsilon_2 \left(\frac{1}{h} \right).$$

Rimane perciò

$$(29) \quad \int_{-h}^h \int_{-h}^h |y-x|^\alpha d\Phi(xy) = \int_{-h}^h \Psi(y) \alpha (h-y)^{\alpha-1} dy + \int_{-h}^h \Phi(x) \alpha (h-x)^{\alpha-1} dx - \\ - \int_{-h}^h dy \int_y^h \Phi(xy) \alpha (\alpha-1) (x-y)^{\alpha-2} dx - \int_{-h}^h dx \int_x^h \Phi(xy) \alpha (\alpha-1) (y-x)^{\alpha-2} dy + \varepsilon \left(\frac{1}{h} \right).$$

Esprimiamo ora i primi due integrali al secondo membro della (29) come integrali doppi. Essendo $\alpha > 1$ si può scrivere

$$\Psi(y) (h-y)^{\alpha-1} = \int_y^h d_x \Psi(y) (x-y)^{\alpha-1} = \int_y^h \Psi(y) (\alpha-1) (x-y)^{\alpha-2} dx \\ \int_{-h}^h \Psi(y) \alpha (h-y)^{\alpha-1} dy = \alpha (\alpha-1) \int_{-h}^h dy \int_y^h \Psi(y) (x-y)^{\alpha-2} dx.$$

Analogamente si ha

$$\int_{-h}^h \Phi(x) \alpha (h-x)^{\alpha-1} dx = \alpha (\alpha-1) \int_{-h}^h dx \int_x^h \Phi(x) (y-x)^{\alpha-2} dy$$

e la (29) si può scrivere

$$\int_{-h}^h \int_{-h}^h |y-x|^\alpha d\Phi(xy) = \alpha (\alpha-1) \int_{-h}^h dy \int_y^h [\Psi(y) - \Phi(xy)] (x-y)^{\alpha-2} dx + \\ + \alpha (\alpha-1) \int_{-h}^h dx \int_x^h [\Phi(x) - \Phi(xy)] (y-x)^{\alpha-2} dy + \varepsilon \left(\frac{1}{h} \right).$$

Di qui facendo tendere h all'infinito, si ottiene

$$(30) \quad M_r^\alpha[\Phi] = \alpha (\alpha-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} [\Psi(y) - \Phi(xy)] (x-y)^{\alpha-2} dx + \\ + \alpha (\alpha-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} [\Phi(x) - \Phi(xy)] (y-x)^{\alpha-2} dy$$

che è la formula cercata analoga alla (13) del par. 1.

2. Gli estremi del momento rispetto ad una retta con coefficiente angolare positivo.

Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA IX. *Date due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ non decrescenti che soddisfanno alle (9), esistono nella classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una ed una sola funzione minimante e una sola funzione massimante l'integrale $M_r^\alpha[\Phi]$.*

La funzione minimante è data dalla (7) e per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ diventa

$$(31) \quad M_r^\alpha[\Phi_1] = \alpha(\alpha-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} \max[\Psi(y) - \Phi(x), 0] (x-y)^{\alpha-2} dx + \\ + \alpha(\alpha-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \max[\Phi(x) - \Psi(y), 0] (y-x)^{\alpha-2} dy.$$

La funzione massimante è data dalla (6) e per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ assume il valore finito

$$(32) \quad M_r^\alpha[\Phi_0] = \alpha(\alpha-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)] (x-y)^{\alpha-2} dx + \\ + \alpha(\alpha-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \min[1 - \Psi(y), \Phi(x)] (y-x)^{\alpha-2} dy.$$

Premettiamo che $M_r^\alpha[\Phi]$ ha sempre valore finito; ciò deriva dal fatto che, come si vedrà nel seguito, il massimo di $M_r^\alpha[\Phi]$ esiste finito per le (9).

Dimostriamo l'enunciato relativo al minimo. Essendo la funzione sotto il segno positiva, bisogna che per ogni y sia minimo l'integrale

$$\int_y^{+\infty} [\Psi(y) - \Phi(x)] (x-y)^{\alpha-2} dx$$

e per ogni x minimo l'integrale

$$\int_x^{+\infty} [\Phi(x) - \Psi(y)] (y-x)^{\alpha-2} dy$$

Per la prima condizione deve essere, per $x > y$, $\Phi(x, y)$ massima; per la seconda $\Phi(x, y)$ deve essere massima per $x < y$. In conclusione il minimo di $M_r^a[\Phi]$ è dato dalla

$$(7) \quad \Phi_1(x, y)$$

La funzione integranda diventa allora

$$\begin{aligned} \max [\Psi(y) - \Phi(x), 0] (x - y)^{\alpha-2} & \quad \text{per} \quad y < x \\ \max [\Phi(x) - \Psi(y), 0] (y - x)^{\alpha-2} & \quad \text{per} \quad y > x \end{aligned}$$

ed $M_r^a[\Phi]$ assume la forma (31).

Passiamo ora al massimo. Bisognerà rendere la funzione integranda massima in ogni punto. La funzione massimante dovrà essere perciò minima in ogni punto, ed è quindi la

$$(6) \quad \Phi_0(x, y) = \max [\Phi(x) + \Psi(y) - 1, 0].$$

Se sostituiamo tale funzione nella (30) otteniamo la (32).

Per dimostrare che $M_r^a[\Phi_0]$ ha valore finito prendiamo, ed es., il primo integrale al secondo membro della (32) e spezziamo il semipiano di integrazione mediante due rette $x = a$, $y = b$, con a e b numeri reali arbitrari, $a > b$.

Consideriamo gli insiemi I_1 dei punti con $x \leq a$, I_2 dei punti con $y \geq b$, I_3 dei punti con $x \geq a$, $y \leq b$. Avremo

$$\begin{aligned} & \iint_{I_1} \min [1 - \Phi(x), \Psi(y)] (x - y)^{\alpha-2} dx dy = \\ & = \int_{-\infty}^a dy \int_y^a \min [1 - \Phi(x), \Psi(y)] (x - y)^{\alpha-2} dx \leq \int_{-\infty}^a dy \Psi(y) \int_y^a (x - y)^{\alpha-2} dx. \end{aligned}$$

Essendo $\alpha > 1$ la funzione di x $(x - y)^{\alpha-2}$ può anche essere un infinito per $x \rightarrow y$, ma è sempre integrabile sull'intervallo (y, a) ed è

$$\int_y^a (x - y)^{\alpha-2} dx = \frac{(a - y)^{\alpha-1}}{\alpha - 1}.$$

Ne segue

$$\iint_{I_1} \min [1 - \Phi(x), \Psi(y)] (x - y)^{\alpha-2} dx dy \leq \int_{-\infty}^a \Psi(y) \frac{(a - y)^{\alpha-1}}{\alpha - 1} dy$$

e l'ultimo integrale scritto esiste finito per le (9).

Così per I_3 si ha

$$\begin{aligned} \iint_{I_3} \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)] (x-y)^{\alpha-2} dx dy &= \int_b^{+\infty} dx \int_b^x \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)] (x-y)^{\alpha-2} dy \leq \\ &\leq \int_b^{+\infty} dx [1 - \Phi(x)] \int_b^x (x-y)^{\alpha-2} dy = \int_b^{+\infty} [1 - \Phi(x)] \frac{(x-b)^{\alpha-1}}{\alpha-1} dx \end{aligned}$$

che, sempre per le (9), esiste finito.

Avendo scelto $a > b$, l'insieme I_2 ha distanza positiva dalla retta $y = x$, e quindi la funzione integranda si mantiene in esso limitata. Inoltre essa è, per $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$, infinitesima di un ordine maggiore di un numero reale maggiore di due, e più precisamente

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)] (x-y)^{\alpha-2} (\sqrt{x^2 + y^2})^{2+r-\alpha} = 0$$

Infatti è

$$\begin{aligned} (x-y)^{\alpha-2} (\sqrt{x^2 + y^2})^{2+r-\alpha} &= \frac{(x-y)^{\alpha-2}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\alpha-2}} (\sqrt{x^2 + y^2})^r = \\ &= \left(\sqrt{1 - \frac{2xy}{x^2 + y^2}} \right)^{\alpha-2} (\sqrt{x^2 + y^2})^r \\ \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)] (x-y)^{\alpha-2} (\sqrt{x^2 + y^2})^{2+r-\alpha} &= \\ = \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)] \left(\sqrt{1 - \frac{2xy}{x^2 + y^2}} \right)^{\alpha-2} (\sqrt{x^2 + y^2})^r. \end{aligned}$$

Se ora si suppone, come è lecito, di scegliere $a > 0$, $b < 0$, in I_2 è

$$2xy < 0 \quad 0 < \frac{-2xy}{x^2 + y^2} \leq 1 \quad 1 \leq 1 - \frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 2$$

Allora sia per $\alpha - 2$ positivo che per $\alpha - 2$ negativo, il fattore è compreso tra due numeri reali positivi e quindi, per le (9) il limite del termine al secondo membro è zero.

Esiste perciò l'integrale esteso a I_2 , e da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)] (x-y)^{\alpha-2} dx \leq \iint_{I_1} + \iint_{I_2} + \iint_{I_3}$$

segue che anche il primo termine della (32) esiste finito. Ripetendo il procedimento per il secondo termine, si ottiene che $\mathcal{M}_r^\alpha[\Phi_0]$ esiste finito.

Il teorema IX è così dimostrato. Lo si può generalizzare subito nel

TEOREMA X. *Date due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ non decrescenti che soddisfano alla (9) ed una retta r di equazione $y = mx + p$ con $m > 0$, esistono nella classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una ed una sola funzione minimante e una sola funzione massimante.*

La funzione minimante è data dalla (7) e per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ diventa:

$$(31') \quad M_r^\alpha[\Phi] = m\alpha(\alpha-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} \max[\Psi(y) - \Phi(x), 0] (mx + p - y)^{\alpha-2} dx + \\ + m\alpha(\alpha-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \max[\Phi(x) - \Psi(y), 0] (y - mx - p)^{\alpha-2} dy.$$

La funzione massimante è data dalla (6) e per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ assume il valore, sempre finito

$$(32') \quad M_r^\alpha[\Phi] = m\alpha(\alpha-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)] (mx + p - y)^{\alpha-2} dx + \\ + m\alpha(\alpha-1) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \min[1 - \Psi(y), \Phi(x)] (y - mx - p)^{\alpha-2} dy.$$

Basta fare ancora il cambiamento di variabili (18) e sfruttare le (19) da esso ricavate. Nel nuovo sistema di coordinate la funzione minimante è

$$\Phi_1'(x' y') = \min[\Phi'(x'), \Psi(y')]$$

cioè, per le (19)

$$\Phi_1(x y) = \min[\Phi(x), \Psi(y)].$$

Lo stesso si ottiene per il massimo, e, sempre mediante le (18) e (19), scritta l'espressione di $M_r^\alpha[\Phi_1']$ e di $M_r^\alpha[\Phi_2']$, si ottengono rispettivamente la (31') e la (32').

Il problema per le rette con coefficiente angolare positivo è così completamente risolto.

3. Gli estremi del momento rispetto ad una retta con coefficiente angolare negativo.

Rimane da esaminare il momento $M_r^a[\Phi]$ rispetto ad una retta r con coefficiente angolare negativo.

Si possono a questo punto ripetere le considerazioni del numero precedente. Abbiamo

$$(33) \quad \int_R |y+x|^\alpha d\Phi = \Delta_{-h}^{h+} - \Delta_y^{h+} |y+x|^\alpha \Phi(xy) - \Delta_{-h}^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dy |y+x|^\alpha - \\ - \Delta_y^{h+} \int_{-h}^h |\Phi(xy) dx| |y+x|^\alpha + \iint_R \Phi(xy) d|y+x|^\alpha$$

e, trasformando i termini al secondo membro e ripetendo le considerazioni del n. 1:

$$\Delta_{-h}^{h+} - \Delta_y^{h+} |y+x|^\alpha \Phi(xy) = (2h)^\alpha \Phi(h^+, h^+) + (2h)^\alpha \Phi(-h^-, -h^-) = (2h)^\alpha + \varepsilon_1 \left(\frac{1}{h} \right) \\ \Delta_{-h}^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dy |y+x|^\alpha = \int_{-h}^h \Psi(y) \alpha (h+y)^{\alpha-1} dy + \varepsilon_2 \left(\frac{1}{h} \right) \\ \Delta_y^{h+} \int_{-h}^h \Phi(xy) dx |y+x|^\alpha = \int_{-h}^h \Phi(x) \alpha (h+x)^{\alpha-1} dx + \varepsilon_3 \left(\frac{1}{h} \right) \\ \iint_R \Phi(xy) d|y+x|^\alpha = \int_{-h}^h dy \int_{-y}^h \Phi(xy) \alpha (\alpha-1) (y+x)^{\alpha-2} dx + \\ + \int_{-h}^h dy \int_{-h}^{-y} \Phi(xy) \alpha (\alpha-1) (-y-x)^{\alpha-2} dx.$$

La (33) diventa così

$$\int_R |y+x|^\alpha d\Phi(xy) = (2h)^\alpha - \int_{-h}^h \Psi(y) \alpha (h+y)^{\alpha-1} dy - \int_{-h}^h \Phi(x) \alpha (h+x)^{\alpha-1} dx + \\ + \int_{-h}^h dy \int_y^h \Phi(xy) \alpha (\alpha-1) (y+x)^{\alpha-2} dx + \int_{-h}^h dy \int_{-h}^{-y} \Phi(xy) \alpha (\alpha-1) (-x-y)^{\alpha-2} dx + \varepsilon \left(\frac{1}{h} \right)$$

Ma con trasformazioni già adoperate, possiamo porre

$$(2h)^\alpha = \int_{-h}^h dy \int_{-y}^h \alpha(\alpha-1)(x+y)^{\alpha-2} dx$$

$$\int_{-h}^h \Psi(y) \alpha(h+y)^{\alpha-1} dy = \int_{-h}^h dy \int_{-y}^h \Psi(y) \alpha(\alpha-1)(x+y)^{\alpha-2} dx$$

e analogamente

$$\int_{-h}^h \Phi(x) \alpha(h+x)^{\alpha-1} dx = \int_{-h}^h dx \int_{-x}^h \Phi(x) \alpha(\alpha-1)(x+y)^{\alpha-2} dy =$$

$$= \int_{-h}^h dy \int_{-y}^h \Phi(x) \alpha(\alpha-1)(x+y)^{\alpha-2} dx$$

Si ottiene perciò

$$\iint_R |y+x|^\alpha d\Phi(xy) = \int_{-h}^h dy \int_{-y}^h [1 - \Phi(x) - \Psi(y) + \Phi(xy)] \alpha(\alpha-1)(x+y)^{\alpha-2} dx +$$

$$+ \int_{-h}^h dy \int_{-h}^{-y} \Phi(xy) \alpha(\alpha-1)(-x-y)^{\alpha-2} dx + \varepsilon\left(\frac{1}{h}\right)$$

che facendo tendere h a $+\infty$, ci dà

$$(34) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y+x|^\alpha d\Phi(xy) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-y}^{+\infty} [1 - \Phi(x) - \Psi(y) + \Phi(xy)] \alpha(\alpha-1)(x+y)^{\alpha-2} dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{-y} \Phi(xy) \alpha(\alpha-1)(-x-y)^{\alpha-2} dx.$$

Le due funzioni integrande, al secondo membro della (34), sono positive. La seconda è infatti una funzione di ripartizione, mentre la prima è, per la (4), maggiore di

$$(35) \quad 1 - \Phi(x) - \Psi(y) + \max[\Phi(x) + \Psi(y) - 1, 0] = \max[1 - \Phi(x) - \Psi(y), 0].$$

Quindi per rendere minimo l'integrale al secondo membro della (34), occorre e basta rendere minima la funzione integranda in ogni punto. La funzione minimante sarà perciò la (6) e l'integrale per la (35) diventa

$$(36) \quad M_r^\alpha[\Phi_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-y}^{+\infty} \max[1 - \Phi(x) - \Psi(y), 0] \alpha(\alpha-1)(y+x)^{\alpha-2} dx + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{-y} \max[\Phi(x) + \Psi(y) - 1, 0] (\alpha-1) \alpha(-y-x)^{\alpha-2} dx.$$

Tale integrale ha sempre valore finito, come apparirà nel seguito, quando si dimostrerà che anche il massimo di $M_r^\alpha[\Phi]$ in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ è sempre finito.

Infatti segue da quanto detto sopra che il massimo di $M_r^\alpha[\Phi]$, se esiste finito, è dato dalla funzione

$$(7) \quad \Phi_1(xy) = \min[\Phi(x), \Psi(y)]$$

ed è

$$(37) \quad M_r^\alpha[\Phi_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-y}^{+\infty} \min[1 - \Psi(y), 1 - \Phi(x)] \alpha(\alpha-1)(y+x)^{\alpha-2} dx + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-y} \min[\Phi(x), \Psi(y)] \alpha(\alpha-1)(-y-x)^{\alpha-2} dx.$$

Dimostriamo che i due integrali al secondo membro della (37) esistono finiti. Il procedimento è lo stesso per entrambi. Prendiamo ad es. il primo. Dividiamo ancora il semipiano su cui è esteso l'integrale con le due rette $x = a$, $y = b$ ($-b < a$). Avremo i tre insiemi $I_1(x \leq a)$, $I_2(x \geq a, y \geq b)$, $I_3(y \leq b)$. Su I_1 è

$$\int \int_{I_1} \min[1 - \Psi(y), 1 - \Phi(x)] \alpha(\alpha-1)(y+x)^{\alpha-2} dx = \\ = \int_{-a}^{+\infty} dy \int_{-y}^a \min[1 - \Psi(y), 1 - \Phi(x)] \alpha(\alpha-1)(y+x)^{\alpha-2} dx \leq \\ \leq \int_{-a}^{+\infty} dy [1 - \Psi(y)] \int_{-y}^a \alpha(\alpha-1)(y+x)^{\alpha-2} dx = \int_{-a}^{+\infty} \alpha [1 - \Psi(y)] (y+a)^{\alpha-1} dy$$

e l'ultimo integrale scritto esiste finito per le (9). Lo stesso ragionamento si può fare per I_3 , essendo

$$\begin{aligned} & \int_{I_3} \min [1 - \Psi(y), 1 - \Phi(x)] \alpha (\alpha - 1) (y + x)^{\alpha-2} dx = \\ & = \int_{-b}^{+\infty} dx \int_{-x}^b \min [1 - \Psi(y), 1 - \Phi(x)] \alpha (\alpha - 1) (y + x)^{\alpha-2} dy \leq \\ & \leq \int_{-b}^{+\infty} dy [1 - \Phi(x)] \int_{-x}^b \alpha (\alpha - 1) (y + x)^{\alpha-2} dx = \int_{-b}^{+\infty} [1 - \Phi(x)] \alpha (b + x)^{\alpha-1} dx. \end{aligned}$$

Per l'integrale su I_2 vale invece una dimostrazione analoga a quella di pag. 68. Anche ora, in conclusione da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-y}^{+\infty} \min [1 - \psi(y), 1 - \Phi(x)] \alpha (\alpha - 1) (y + x)^{\alpha-2} dx \leq \iint_{I_1} + \iint_{I_2} + \iint_{I_3}$$

si ottiene che $M_r^\alpha[\Phi_1]$ è finito. Abbiamo con ciò dimostrato il

TEOREMA XI. *Date due funzioni non decrescenti $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$, soddisfacenti alle (9), esistono nella classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una e una sola funzione minimante e una sola funzione massimante il momento $M_r^\alpha[\Phi]$ rispetto alla retta $h = -x$.*

La funzione minimante è la (6), e per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ assume il valore (36).

La funzione massimante è la (7); per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ ha il valore (sempre finito) dato dalla (37).

Col procedimento già usato, sfruttando il cambiamento di variabili di pag. 60, si ottiene:

TEOREMA XII. *Date due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$, non decrescenti, soddisfacenti alle (9), ed una retta r con coefficiente angolare negativo, il momento $M_r^\alpha[\Phi]$ nella classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ ha una e una sola funzione minimante e una e una sola funzione massimante.*

La funzione minimante è la (6). Per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ diventa:

$$\begin{aligned} M_r^\alpha[\Phi_0] = & -m \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{\frac{y-p}{m}}^{+\infty} \max [1 - \Phi(x) - \Psi(y), 0] \alpha (\alpha - 1) (y - mx - p)^{\alpha-2} dx - \\ & - m \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\frac{y-p}{m}} \max [\Phi(x) + \Psi(y) - 1, 0] \alpha (\alpha - 1) (-y + mx + p)^{\alpha-2} dx \end{aligned}$$

La funzione massimante è la (7) e dà a $M_r^\alpha[\Phi]$ il valore, sempre finito

$$M_r^\alpha[\Phi_1] = -m \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{\frac{y-p}{m}}^{+\infty} \min[1 - \Psi(y), 1 - \Phi(x)] \alpha(\alpha-1)(y-mx-p)^{\alpha-2} dx - \\ - m \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\frac{y-p}{m}} \min[\Phi(x), \Psi(y)] \alpha(\alpha-1)(-y+mx+p)^{\alpha-2} dx.$$

Con i teoremi XI e XII la ricerca degli estremi del momento $M_r^\alpha[\Phi]$ nella classe di Frechet relativa a due funzioni assegnate $\Phi(x)$ e $\psi(y)$ è completata.

Per $\alpha > 1$ tale momento ha un'espressione molto più complessa rispetto al caso $\alpha = 1$. Tale complessità porta però ad una notevole semplicità di risultati, essendo uniche la funzione minimante e la funzione massimante il momento $M_r^\alpha[\Phi]$ rispetto ad una data retta.

Tale semplicità di risultati appare ancora maggiore se si guarda il complesso dei momenti rispetto a rette diverse. Mentre per $\alpha = 1$ si hanno in generale per ogni retta una classe di infinite funzioni minimanti e una classe di infinite funzioni massimanti, e tali classi variano al variare della retta stessa, per $\alpha > 1$ solo due sono le funzioni estremanti, $\Phi_0(xy)$ e $\Phi_1(xy)$. Precisamente, qualunque sia l'ordine e qualunque sia la retta rispetto alla quale si calcola il momento, purchè con coefficiente angolare positivo, la prima è l'unica funzione massimante e la seconda l'unica funzione minimante, mentre per le rette con coefficiente angolare negativo i risultati si invertono.