Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Jacob Steinberg

Sur les lois de commutation de certaines transformations intégrales

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 10, nº 1-2 (1956), p. 25-33

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1956_3_10_1-2_25_0>

SUR LES LOIS DE COMMUTATION DE CERTAINES TRANSFORMATIONS INTEGRALES

par JACOB STEINBERG (Haifa)

1. LOIS DE COMMUTATION. Une des propriétés fondamentales de la transformation de Laplace

$$\mathcal{L} f(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

est de vérifier les deux lois

$$D \mathcal{L} f(t) = -\mathcal{L}\, t f(t) \tag{1}$$

$$s\, \mathcal{L} f(t) = \mathcal{L} D f(t) - f(0) \tag{2}$$

dans lesquelles D désigne la dérivation. L'application de ces lois à l'intégration des équations différentielles linéaires est bien connue; elle a été généralisée avec fruit à des transformations intégrales

$$\mathcal{K} f(t) = \int_a^b K(s, t)\, f(t)\, dt, \tag{3}$$

dont le noyau $K(s, t)$ vérifie une équation différentielle aux dérivées partielles du type

$$\Phi_s K = \Psi_t K \tag{4}$$

où Φ et Ψ sont des opérateurs différentiels linéaires agissant sur la variable indiquée en indice. On peut démontrer alors que l'on a l'identité

$$\Phi \int_a^b K(s, t)\, f(t)\, dt = \int_a^b K(s, t)\, \Psi^* f(t)\, dt + \Big\{ P_\psi [K(s, t), f(t)] \Big\}_a^b \tag{5}$$

où Ψ^* est l'opérateur adjoint de Ψ et $P_\psi(u, v)$ est la forme differentielle bilinéaire de Lagrange, qui correspond à Ψ. (Voir Ince. Ordinary Differential Equations. Chapter VIII).

Si nous posons

$$\mathcal{P}_\psi f(t) \equiv \{P_\psi [K(s, t), f(t)]\}_a^b, \tag{6}$$

la relation s'écrit, brièvement

$$\Phi \mathcal{K} = \mathcal{K} \Psi^* + \mathcal{P}_\psi . \tag{7}$$

Remarquons que l'opération fonctionnelle $\mathcal{P}_\psi$, définie par (6), fait correspondre à toute fonction $f(t)$ possédant les $n - 1$ premières dérivées, (n étant l'ordre de Ψ), une fonction de s qui sera une combinaison linéaire des $2n$ fonctions

$$\frac{\partial^p K(s, a)}{\partial t^p}, \quad \frac{\partial^p K(s, b)}{\partial t^p}, \quad (p = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

Comme cette transformation $\mathcal{P}_\psi$ ne jouera aucun rôle dans le présent article, nous écrirons, au lieu de (7),

$$\Phi \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \Psi^*, \tag{7'}$$

et nous appellerons (7) ou (7′) une loi de commutation de $\mathcal{K}$. D'ailleurs, nous ne considérerons que des transformations $\mathcal{K}$ non dégénérées, c'est-à-dire dont le noyau $K(s, t)$ n'est pas une somme d'un nombre fini de produits d'une fonction de s par une fonction de t. De plus, nous supposerons que ce noyau est analytique en ses deux variables.

Dans le cas de la transformation $\mathcal{L}$ de Laplace l'existence des lois

$$D \mathcal{L} = - \mathcal{L} x, \tag{1'}$$

$$x \mathcal{L} = \mathcal{L} D - \mathcal{P}_D, \tag{2'}$$

(où x désigne l'opération qui consiste à multiplier une fonction d'une variable par celle-ci), est aussi une conséquence de ce que le noyan $K(s, t) = e^{-st}$ vérifie les deux équations

$$\frac{\partial K}{\partial s} = - t K, \qquad (\Phi \equiv D; \ \Psi \equiv - x),$$

$$s K = - \frac{\partial K}{\partial t}, \qquad (\Phi \equiv x; \ \Psi \equiv - D).$$

De même, pour la transformation de Fourier,

$$\mathcal{F} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t)\, dt\,,$$

on a les lois bien connues

$$D\,\mathcal{F} = i\,\mathcal{F}\,x\,,$$

$$x\,\mathcal{F} = i\,\mathcal{F}\,D\,,$$

Pour la transformation de Gauss

$$\mathcal{G}_a f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{s-t}{a}\right)^2} f(t)\, dt\,,$$

on peut vérifier facilement les lois

$$D\,\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_a\,D\,,$$

$$x\,\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_a\left(-\frac{a^2}{2}\,D + x\right)$$

Dans les trois exemples considérés, les deux lois données sont respectivement des types

$$D\,\mathcal{K} \to \mathcal{K}\,\Delta\,; \qquad x\,\mathcal{K} \to \mathcal{K}\,\xi\,.$$

Dans le théorème qui suivra nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes pour les opérateurs Δ et ξ, pour qu'il existe une transformation intégrale $\mathcal{K}$, possédant à la fois deux lois de ce genre. Nous commencerons par donner deux lemmes dont nous aurons besoin.

2. LEMME 1. *Si la transformation $\mathcal{K}$ possède une loi*

$$\Phi\,\mathcal{K} \to \mathcal{K}\,\Psi\,,$$

alors Ψ est déterminé univoquement par Φ et inversément.

Démonstration

Supposons que l'on ait une seconde loi

$$\Phi\,\mathcal{K} \to \mathcal{K}\,\overline{\Psi}\,.$$

Alors le noyan $K\ (s,\ t)$ de $\mathcal{H}$ vérifierait simultanément les deux équations

$$\Phi_s\, K = \Psi_t^* K\,,$$
$$\Phi_s\, K = \overline{\Psi}_t^*\, K\,,$$

desquelles on déduirait, par soustraction,

$$(\Psi^* - \overline{\Psi}^*)_t\, K = 0. \tag{8}$$

Supposons que l'opérateur différentiel $\Psi^* - \overline{\Psi}^*$ soit d'ordre $n \geq 1$, et soit $y_1\,(t)\,, \ldots\,,\ y_n\,(t)$ un système fondamental de solutions de l'équation

$$(\Psi^* - \overline{\Psi}^*)\, y\ (t) = 0\,.$$

Alors on aurait

$$K\,(s\,,\ t) = c_1\,(s)\, y_1\,(t) + \ldots + c_n\,(s)\, y_n\,(t)\,,$$

et la transformation $\mathcal{H}$ serait dégénérée, ce qui est exclu. On en déduit que $\Psi^* - \overline{\Psi}^*$ est d'ordre 0, c'est-à-dire est une fonction d'une variable $g\,(t)$. L'équation (8) s'écrira alors

$$g\ (t)\ K\,(s\,,\ t) \equiv 0$$

ce qui entraîne évidemment $g\ (t) \equiv 0$ donc

$$\Psi^* \equiv \overline{\Psi}^*; \quad \Psi \equiv \overline{\Psi}\,.$$

On demontrerait de même que Ψ détermine Φ de manière univoque.

3. LEMME 2. *Si la transformation $\mathcal{H}$ possède la loi*

$$\Phi\, \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}\, \Psi\,,$$

alors au moins l'un des opérateurs Φ et Ψ comporte la dérivation.

Démonstration. Si l'on avait

$$\Phi \equiv \varphi\,(t)\,; \quad \Psi \equiv \psi\,(t)\,,$$

le noyau $K\,(s\,,\ t)$ vérifierait l'équation

$$\varphi\,(s)\, K \equiv \psi\,(t)\, K$$

ou

$$[\varphi\,(s) - \psi\,(t)]\ K \equiv 0\,,$$

ce qui entraînerait

$$K \equiv 0.\,.$$

4. Théorème. *Pour qu' il existe une transformation $\mathcal{H}$, non dégénérée, possédant les deux lois de commutation*

$$D\,\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}\,\Delta\,; \quad x\,\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}\,\xi\,,$$

il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites

a) *ξ est d'ordre 1 au moins, c'est-à-dire qu' il comporte la dérivation.*

b) $\Delta\,\xi - \xi\,\Delta \equiv 1$.

Démonstration.

Nécessité. La condition a est une conséquence immédiatedu *lemme* 2. La nécessité de la condition *b* se démontre comme suit. Le noyan $K(s\,,\,t)$ satisfaisant aux deux équations

$$D_s\,K = \Delta_t^*\,K\,; \qquad s\,K = \xi_t^*\,K\,,$$

on en déduit

$$D_s\,s\,K = D_s\,\xi_t^*\,K = \xi_t^*\,D_s\,K = \xi_t^*\,\Delta_t^*\,K\,;$$

$$s\,D_s\,K = s\,\Delta_t^*\,K = \Delta_t^*\,s\,K = \Delta_t^*\,\xi_t^*\,K\,.$$

Par soustraction, on obtient

$$(D\,x - x\,D)_s\,K = (\xi^*\,\Delta^* - \Delta^*\,\xi^*)_t\,K\,. \tag{9}$$

En vertu des identités

$$D\,x - x\,D \equiv 1\,; \quad \xi^*\,\Delta^* - \Delta^*\,\xi^* \equiv (\Delta\,\xi - \xi\,\Delta)^*\,,$$

l'équation (9) peut s'écrire

$$K = (\Delta\,\xi - \xi\,\Delta)_t^*\,K\,.$$

De cette équation différentielle ordinaire pour $K(s\,,\,t)$, on déduira, de même que dans la démonstration du lemme 1, que l'on doit avoir

$$(\Delta\,\xi - \xi\,\Delta)^* \equiv 1\,,$$

ou

$$\Delta\,\xi - \xi\,\Delta \equiv 1^* \equiv 1\,.$$

Suffisance. Il s'agit de démontrer que, si les conditions a et *b* sont remplies, il existe un noyan $K\,(s\,,\,t)$, non dégénéré, qui est une solution commune aux deux équations

$$s\,K = \xi_t^*\,K \tag{10}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \Delta_t^*\,K \tag{11}$$

Montrons d'abord qu'une solution de (11) ne peut pas être la somme d'un nombre fini de produits d'une fonction de s par une fonction de t. En effet, si l'on avait une solution de la forme

$$K(s\,,\; t) = \sum_{p=1}^{N} h_p(s)\, l_p(t) \tag{12}$$

(où les h_p, de même que les l_p sont supposés linéairement indépendants, sans quoi on pourrait réduire le nombre N dans le somme (12)), on aurait, en introduisant cette expression dans (10)

$$\sum_{p=1}^{N} h_p(s)\,[s\; l_p(t) - \xi^*\; l_p(t)] = 0 \tag{13}$$

Dérivons cette dernière relation $N-1$ fois par rapport à t; nous obtenons

$$\sum_{p=1}^{N} h_p(s)\,[s\; l_p^{(q)}(t) - D^q\,\xi^*\; l_p(t)] = 0\,, \quad (q = 1\,,\; 2\,, \ldots,\; N-1)\,, \tag{14}$$

Considérons les équations (13) et (14) comme formant un système de N équations linéaires pour les $h_p(s)$. Comme ce système est homogène et comme aucune des fonctions ne peut être nulle, le déterminant doit être nul quels que soient s et t; on a donc

$$\|\, s\; l_p^{(q)}(t) - D^q\; \xi^*\; l_p(t) \,\| = 0 \qquad (p = 1\,,\; 2\,, \ldots,\; N\,; \; q = 0\,,\; 1\,, \ldots,\; N-1).$$

Si l'on développe ce déterminant on obtient un polynôme de degré N en s; le coefficient de s^N est visiblement le Wronskien des N fonctions $l_p(t)$ et celui-ci doit donc être nul. Comme les fonctions $l_p(t)$ sont indéfiniment dérivables, elles satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre N et doivent, par conséquent être linéairement indépendantes, contrairement à l'hypothesè.

A présent, appelons n l'ordre de l'opérateur ξ. D'après la condition a, on a $n \geq 1$. Léquation (11) est une équation différentielle ordinaire d'ordre n, la variable indépendante étant t, tandis que s figure comme paramètre.

Soient $g_1(s\,,\,t)\,,\ldots,\,g_n(s\,,\,t)$ un système fondamental de solution de cette équation. La solution générale sera de la forme

$$h_1(s)\,g_1(s\,,\,t)+\ldots+h_n(s)\,g_n(s\,,\,t)\,. \tag{15}$$

Nous allons voir que la condition b permet de démontrer l'existence de n fonctions $h_p(s)$ telles que (15) soit une solution de (10). Introduisons l'expression (15) dans (10) à la place de K, on obtient

$$\sum_{p=1}^{n} h'_p(s)\,g_p(s\,,\,t)+h_p(s)\left[\frac{\partial\, g_p(s\,,\,t)}{\partial\, s}-\Delta_t^*\,g_p(s\,,\,t)\right]=0\,. \tag{16}$$

Les expressions entre crochets

$$\frac{\partial\, g_p}{\partial\, s}-\Delta_t^*\,g_p \qquad (p=1\,,\,2\,,\ldots,\,n)$$

sont, chacune, solutions de (10); en effet, on a

$$s\left(\frac{\partial\, g_p}{\partial\, s}-\Delta_t^*\,g_p\right)=\frac{\partial}{\partial\, s}(s\,g_p)-g_p-\Delta_t^*\,(s\,g_p)=\frac{\partial}{\partial\, s}(s\,g_p)-g_p-\Delta_t^*\,\xi_t^*\,g_p \tag{17}$$

Or, d'après la condition b, on a

$$\Delta^*\,\xi^*\equiv\xi^*\,\Delta^*-1\,.$$

Le dernier membre de (17) devient donc

$$\frac{\partial}{\partial\, s}(s\,g_p)-g_p-(\xi_t^*\,\Delta_t^*-1)\,g_p=\frac{\partial}{\partial\, s}(s\,g_p)-\xi_t^*\,\Delta_t^*\,g_p \tag{18}$$

Or, on a

$$s\,g_p=\xi_t^*\,g_p\,;$$

le dernier membre de (18) s'écrira donc

$$\xi_t^*\left(\frac{\partial\, g_p}{\partial\, s}-\Delta_t^*\,g_p\right).$$

Revenant au premier membre de (17) on obtient les relations

$$s\left(\frac{\partial\, g_p}{\partial\, s}-\Delta_t^*\,g_p\right)=\xi_t^*\left(\frac{\partial\, g_p}{\partial\, s}-\Delta_t^*\,g_p\right),\qquad (p=1\,,\,2\,,\ldots,\,n)\,,$$

ce qui démontre notre assertion. Nous aurons donc des relations de la forme

$$\frac{\partial g_p}{\partial s} - \Delta_t^* g_p = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(s)\, g_q(s, t), \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

dans lesquelles les fonctions $f_{p,q}(s)$ sont continues, puisque les $g_p(s, t)$ sont solutions de (11) contenant le paramètre s.

L'équation (16) prend, maintenant la forme

$$\sum_{p=1}^{n} \left\{ h_p'(s)\, g_p(s, t) + h_p(s) \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(s)\, g_q(s, t) \right\} = 0$$

ou

$$\sum_{p=1}^{n} h_p'(s)\, g_p(s, t) + \sum_{q=1}^{n} \left\{ \sum_{p=1}^{n} h_p(s)\, f_{p,q}(s) \right\} g_q(s, t) = 0.$$

Si l'on intervertit la dénomination des indices p, q dans la somme double, on obtient

$$\sum_{p=1}^{n} \left\{ h_p'(s) + \sum_{q=1}^{n} h_q(s)\, f_{q,p}(s) \right\} g_p(s, t) = 0.$$

Comme les fonctions $g_p(s, t)$ sont, pour tout s, linéairement indépendantes, les fonctions $h_p(s)$ doivent vérifier le système d'équations différentielles linéaires sous forme canonique

$$h_p'(s) + \sum_{q=1}^{n} f_{q,p}(s)\, h_q(s) = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Vu la continuité des $f_{q,p}(s)$, ce système possède une solution $h_1(s), \ldots, h_n(s)$.

c. q. f. d.

5. APPLICATION. Proposons-nous de trouver les transformations intégrales qui possèdent deux lois de commutation du type

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} D\,\mathcal{H} \to \mathcal{H}(l\,D + m\,x) \\ x\,\mathcal{H} \to \mathcal{H}(p\,D + q\,x) \end{cases}$$

où l, m, p et q sont des contantes. D'après le théorême, les deux conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\mathcal{H}$ sont

$$a)\ p \neq 0\,; \qquad b)\ l\,q - m\,p = 1\,.$$

La transformation linéaire des opérateurs D et x, définie par (19), doit donc être unimodulaire. Pour trouver le noyau $K(s, t)$ de $\mathcal{H}$, on doit trouver une solution commune aux deux équations différentielles

$$\frac{\partial K}{\partial s} = -l\frac{\partial K}{\partial t} + m\,t\,K$$

$$s\,K = -p\frac{\partial K}{\partial t} + q\,t\,K\,.$$

Les calculs donnent, à une constante multiplicative près,

$$K(s, t) = e^{\frac{l s^2 - 2st + qt^2}{2p}}\,.$$

Appelons la matrice $\begin{pmatrix} l & m \\ p & q \end{pmatrix}$, la matrice de commutation de $\mathcal{H}$; alors, on vérifièra que les matrices de commutation de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}_a$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a^2}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$