ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

VITTORIO CHECCUCCI

Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni di una omografia

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 9, nº 3-4 (1955), p. 201-206
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_3-4_201_0>

SULLA RIDUZIONE A FORMA CANONICA DELLE EQUAZIONI DI UNA OMOGRAFIA

di VITTORIO CHECCUCCI (Pisa)

La riduzione a forma canonica, mediante una opportuna scelta del sistema di riferimento, delle equazioni di una omografia ω non degenere di uno spazio S_n (proiettivo, complesso, ad n dimensioni) in sè, è ottenuta dai vari Autori che si sono occupati dell'argomento [1], con procedimenti alquanto laboriosi e che talvolta richiedono considerazioni delicate ed estranee alla natura geometrica ed elementare del problema.

Non ci sembra perciò privo di interesse esporre qui un procedimento geometrico, rapido ed elementare, per ottenere la suddetta forma canonica.

Richiamate (nel n. 1) le poche nozioni sulle omografie che ci occorreranno nel seguito, nei nn. 2, 3 faremo vedere direttamente che, qualunque sia la ω (non degenere), esiste sempre in S_n un gruppo di spazi che sono uniti, indipendenti, appartengono ad S_n, e su ciascuno dei quali l'omografia subordinata ha un solo punto unito. Con ciò la riduzione alla forma canonica di JORDAN delle equazioni della ω può dirsi conseguita, perchè è ricondotta a quella delle omografie con un solo punto unito, e questa si ottiene, come è noto, in modo molto semplice (n. 4). Infine faremo vedere che le suddette equazioni canoniche sono univocamente determinate dalla ω e non dipendono dal procedimento adoperato per ottenerle (nel senso che verrà precisato nel n. 6); otterremo così anche le ben note condizioni di WEIERSTRASS e C. SEGRE, necessarie e sufficienti per l'identità birazionale di due omografie.

---

(1) Per le notizie storiche vedasi: ENRIQUES e CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni ecc.,* Bologna 1918, Vol. II, pag. 681.

Vedasi anche:

G. SCORZA, *Corpi numerici ed algebre,* Messina, 1921, pag. 429.

E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi,* Messina, 1922, pag. 100.

S. CHERUBINO, *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica,* Rend. Acc. Lincei, Serie 6a, Vol. XXIII, 1936, Nota I e II.

W. HODGE and D. PEDOE, *Methods of Algebraic Geometry* Cambridge, 1947, Vol. I, pag. 327.

1. — Sia ω una omografia (non degenere) di uno spazio (proiettivo complasso S_n in sè. Nel seguito avremo occasione di adoperare le seguenti proprietà che, come è ben noto, sono conseguenza immediata delle equazioni della ω.

a) La ω ha almeno un punto unito e almeno un iperpiano unito.

b) Se ω ha un solo punto unito allora esso ha un solo iperpiano unito, e viceversa.

c) In ogni spazio unito la ω subordina una omografia.

d) In ogni stella di rette avente per centro un punto unito la ω subordina una omografia.

2. — Diremo che l'omografia ω è ***riducibile*** se esistono due spazi uniti indipendenti ed appartenenti ad S_n, cioè se esistono due spazi uniti S_h ed S_{n-h-1} privi di punti a comune; se non esistono due tali spazi diremo che la ω è *irriducibile.*

Dalla definizione segue subito che, *qualunque sia* ω (riducibile o no) *esiste sempre un gruppo di spazi*

$$S_{h_1}, S_{h_2}, \ldots, S_{h_m} \qquad (1 \leq m \leq n+1) \tag{1}$$

che sono uniti, indipendenti (2), *appartengono ad* S_n (3), *e su ciascuno dei quali la* ω *subordina una omografia irriducibile.*

Infatti, se ω è irriducibile, lo spazio S_n forma da solo un gruppo del tipo (1). Se invece la ω è riducibile, allora esistono due spazi S_h ed S_{n-h-1} che sono uniti, indipendenti, ed appartengono ad S_n; se in ciascuno dei detti due spazi la ω subordina una omografia irriducibile, allora S_h ed S_{n-h-1} formano un gruppo del tipo (1). Se invece l'omografia subordinata da ω in uno di essi, per esempio in S_h, è riducibile, allora esistono (entro S_h) due spazi $S_{h'}$ ed $S_{h-h'-1}$ che sono uniti, indipendenti, ed appartengono ad S_h, e i tre spazi $S_{h'}, S_{h-h'-1}, S_{n-h-1}$, sono indipendenti ed appartengono ad S_n. Se le omografie subordinate da ω in ciascuno di questi tre spazi sono tutte irriducibili, allora essi formano un gruppo del tipo (1); in caso diverso si continui come sopra. Il procedimento ha termine certamente perchè il numero degli spazi (indipendenti) di ciascuno dei gruppi che via via si ottengono non può superare $n+1$.

3. — *Le omografie irriducibili sono tutte e sole quelle che hanno un solo punto unito.*

---

(2) Cioè lo spazio congiungente ha dimensione $h_1 + h_2 + \ldots + h_m + m - 1$.

(3) Cioè lo spazio congiungente è S_n; quindi è $\sum_{r=1}^{m} (h_r + 1) = n + 1$.

Infatti una omografia riducibile ha almeno due punti uniti, perchè essa ha due spazi uniti privi di punti a comune ed in ciascuno di essi ha almeno un punto unito [n. 1, c) e a)].

Dimostriamo ora che se una omografia ω di S_n ha due punti uniti distinti P e Q, essa allora è riducibile, e inoltre gli spazi uniti e privi di punti a comune S_h ed S_{n-h-1} (che esistono per la definizione di riducibilità) possono essere scelti in modo che uno di essi contenga P. La proprietà è senz'altro vera per $n=1$; supponiamo che sia vera per ogni S_r di dimensione $r<n$ e dimostriamola per la dimensione $r=n$.

A tal fine consideriamo l'omografia ω_P subordinata dalla ω nella stella di rette Σ_{n-1} avente per centro il punto unito P [n. 1, *d*)]. Se la ω_P ha una sola retta unita, allora essa ha un solo iperpiano unito [n. 1, *b*)], e quindi la ω ha un solo iperpiano unito passante per P. Ma la ω ha almeno due iperpiani uniti perchè ha uniti i due punti distinti P e Q [n. 1, *b*)]; ne segue che la ω ha almeno un iperpiano unito S^*_{n-1} non passante per P, e dalla esistenza dei due spazi uniti P, S^*_{h-1} segue la proprietà che volevamo dimostrare.

Se invece la ω_P ha più di una retta unita, allora, essendo $r=n-1$ la dimensione della stella di rette Σ_{n-1}, per quanto abbiamo ammesso la ω_P è riducibile, quindi in Σ_{n-1} esistono due stelle unite Σ_{k-1} e Σ_{n-k-1} (di dimensioni $k-1$ e $n-k-1$) prive di rette a comune e tali che una di esse, per esempio Σ_{k-1} contenga la retta PQ. Gli spazi S_k ed S_{n-k} ambienti di queste due stelle sono uniti nella ω ed hanno a comune il solo punto P. E poichè lo spazio unito S_k ha dimensione $k<n$ e contiene i due punti uniti P e Q, per quanto abbiamo ammesso si ha che l'omografia subordinata da ω in esso è riducibile ed esistono (in S_k) due spazi S_h ed S_{k-h-1} uniti, privi di punti a comune e tali che uno di essi, per esempio S_{k-h-1}, contiene P. Gli spazi S_{n-k} ed S_{k-h-1} sono uniti nella ω ed hanno a comune il solo punto P, quindi il loro spazio congiungente S_{n-h-1}, ha la dimensione $n-h-1$, è unito nella ω, contiene P, e non ha punti a comune con lo spazio unito S_h. Con ciò la nostra proprietà risulta dimostrata completamente.

4. — *Con una opportuna scelta del sistema di riferimento le equazioni di una omografia ω irriducibile si possono scrivere nella forma* (4):

$$\begin{cases} \varrho\, x'_i = x_i + x_{i+1} \qquad (i=0,\ 1, \dots, n-1) \\ \varrho\, x'_n = x_n \end{cases} \tag{2}$$

(4) Ciò è ben noto (vedi per es. ENRIQUES- CHISINI, *Loc. cit.*, pag. 679). Ne esponiamo qui una semplice dimostrazione, solo per completezza.

Poichè la ω ha un solo punto unito (n. 3), essa ha [n. 1 *b*)] un solo iperpiano unito S^*_{n-1}; in questo S^*_{n-1} la ω subordina una omografia con un solo punto unito e quindi con un solo S^*_{n-2} unito; in questo S^*_{n-2} la ω subordina una omografia con un solo S^*_{n-3} unito; ecc. Fissiamo ora un punto A_n ad arbitrio, purchè fuori di S^*_{n-1}. Il corrispondente A'_n di A_n è distinto da A_n (perchè ω ha un solo punto unito che sta quindi in tutti gli spazi S^*_i), non sta in S^*_{n-1} (perchè S^*_{n-1} è unito in ω), e la retta $A_n\, A'_n$ incontra S^*_{n-1} in un punto A_{n-1} che non sta in S^*_{n-2} (perchè altrimenti l'iperpiano congiungente S^*_{n-2} ed A_n sarebbe unito e distinto da S^*_{n-1}). Analogamente si vede che il corrispondente A'_{n-1} di A_{n-1} è distinto da A_{n-1}, non sta in S^*_{n-2}, e la retta $A_{n-1}\, A'_{n-1}$ incontra S^*_{n-2} in un punto A_{n-2} che non sta in S^*_{n-3}. Così continuando si ottengono $n+1$ punti $A_n, A_{n-1}, \dots, A_0 \equiv S^*_0$, che sono indipendenti perchè lo spazio congiungente $A_0, A_1, \dots, A_i$ è lo spazio unito S^*_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$, e A_n sta fuori di S^*_{n-1}.

Scegliendo come vertici della piramide fondamentale ordinatamente punti $A_0, A_1, \dots, A_n$, le equazioni di ω diventano del tipo:

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho\, y'_i = a\, y_i + b_{i+1}\, y_{i+1} \\ \varrho\, y'_n = a\, y_n \end{array}\right. \tag{3}$$

perchè il corrispondente A'_{i+1} di A_i sta sulla retta $A_{i+1}\, A_i$, e la ω ha un solo punto unito $(A_0 \equiv S^*_0)$. Inoltre i numeri $a, b_1, b_2, \dots, b_n$, sono tutti diversi da zero perchè ω è non degenere e irriducibile. Dalle (3), cambiando il punto unità mediante le

$$\varrho\, y_i = a^i\, b_{i+1} \dots b_n\, x_i \ [5] \tag{4}$$

si ottengono le (2).

5. — Consideriamo infine una omografia ω non degenere, qualunque, di S_n in sè. Indichiamo con

$$S_{h_1}, S_{h_2}, \dots, S_{h_m} \quad \left(\sum_{r=1}^{m} (h_r + 1) = n + 1\right)$$

un gruppo di spazi uniti, indipendenti, appartenenti ad S_n, e su ciascuno dei quali la ω subordina una omografia irriducibile. Un tale gruppo di spazi esiste per quanto abbiamo visto nel n. 2.

---

[5] Cioè scegliamo come punto unità il punto comune agli n iperpiani $S^{(i+1)}_{n-1} \equiv (A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A'_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_n)$, di equazioni $a\, y_i - b_{i+1}\, y_{i+1} = 0$.

Fissiamo i vertici della piramide di riferimento di S_n in modo che i primi $h_1 + 1$ vertici stiano in S_{h_1}, i successivi $h_2 + 1$ stiano in $S_{h_2}, \dots$, gli ultimi $h_m + 1$ stiano in S_{h_m}. Con ciò il modulo della ω diventa del tipo

$$B' = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{bmatrix}$$

dove le B_r $(r = 1, 2, \dots, m)$ indicano matrici quadrate di ordine $h_r + 1$, e sono i moduli delle omografie irriducibili ω_r subordinate da ω negli spazi S_{h_r}. Se inoltre in ogni S_{h_r} di dimensione $h_r > 0$ fissiamo i vertici della piramide di riferimento che stanno in esso, in modo che, rispetto alla omografia irriducibile ω_r essi formino un gruppo di $h_r + 1$ punti del tipo di quello descritto nel n. 4, le B_r diventano moduli di sostituzioni del tipo (3).

Infine cambiando il punto unità con una sostituzione $\varrho\, y_t = k_t\, x_t$ $(t = 0, 1, \dots, n)$ la quale operi su ciascuno dei gruppi di variabili relativi agli spazi S_{h_r} di dimensione $h_r < 0$, come operano le (4) rispetto alle (3), ogni B_r diventa del tipo

$$J_{h_r}(a_r) = \begin{bmatrix} a_r & a_r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_r & a_r & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_r & a_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_r \end{bmatrix}$$

con $a_1, a_2, \dots, a_m$, numeri diversi da zero (distinti o no).

Con una tale scelta del sistema di riferimento in S_n, *il modulo di* ω *diventa quindi una matrice* C *che è somma diretta delle matrici* $J_{h_1}(a_1), J_{h_2}(a_2), \dots, J_{h_m}(a_m)$ (6). Corrispondentemente le equazioni di ω assumono la *forma canonica di* JORDAN.

6. — Indichiamo con $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_t$ $(t \leq m)$ i numeri a_r che sono due a due distinti (cioè le radici distinte dell'equazione caratteristica $D(\varrho) \equiv$

(6) Cioè C è del tipo:

$$C = \begin{bmatrix} J_{h_1}(a_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{h_2}(a_2) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & J_{h_m}(a_m) \end{bmatrix}$$

det.$(C-\varrho J)=0$ di C); con $e_1^{(i)}\ e_2^{(i)} .., e_{ti}^{(i)}$ gli ordini di tutte le J in cui compare la stessa radice ϱ_i disposti in ordine non crescente; e infine con $\mu_1^{(i)}$, $\mu_2^{(i)}, \dots, \mu_{t_i}^{(i)}$, le molteplicità della radice ϱ_i, rispettivamente per il determinante $D(\varrho)$ e per i suoi minori di ordine n, $n-1, \dots, n-t_i+2$. Per la particolare forma del determinante $D(\varrho)$ si vede subito che è

$$\mu_1^{(i)} = e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \dots + e_{t_i}^{(i)}, \mu_2^{(i)} = e_2^{(i)} + e_3^{(i)} + \dots + e_{t_i}^{(i)}, \dots, \mu_{t_i}^{(i)} = e_{t_i}^{(i)}$$

e quindi

$$e_1^{(i)} = \mu_1^{(i)} - \mu_2^{(i)}, e_2^{(i)} = \mu_2^{(i)} - \mu_3^{(i)}, \dots, e_{t_i}^{(i)} = \mu_{ti}^{(i)}. \tag{5}$$

Gli interi $\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \dots, \mu_{t_i}^{(i)}$, come è noto, dipendono solo dalla ω e non dal sistema di riferimento (7); ne segue, per le (5), che anche gli interi $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{t_i}^{(i)}$, cioè gli ordini delle J in cui compare la stessa ϱ_i sono perfettamente determinati dalla ω. Da ciò e tenendo presente che i numeri $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_t$, sono determinati da ω a meno di un fattore di proporzionalità, segue che:

Il modulo C delle equazioni canoniche (di JORDAN) *di una omografia non degenere ω è determinato dalla ω a meno dell'ordine in cui le matrici J si seguonò nella diagonale principale e a meno di un fattore di proporzionalità per i numeri $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_t$.*

Le espressioni

$$(\varrho-\varrho_i)^{l_1^{(i)}}, (\varrho-\varrho_i)^{l_2^{(i)}}, \dots, (\varrho-\varrho_i)^{l_{ti}^{(i)}}$$

sono i *divisori elementari* (di WEIESTRASS) di $D(\varrho)$ corrispondenti alla radice ϱ_i. L'insieme dei gruppi di numeri interi $(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{t_i}^{(i)})$ è la *caratteristica* di C. SEGRE della ω.

Dalla unicità (nel senso sopra detto) delle equazioni canoniche della ω, seguono subito le classiche condizioni di WEIESTRASS e C. SEGRE, necessarie e sufficienti perchè due omografie siano proiettivamente identiche; basta tener presente che le equazioni di un cambiamento di riferimento si possono interpretare anche come equazioni di una omografia non degenere e viceversa.

---

(7) Vedi, per esempio, BERTINI, *Loc. cit.* pag. 82.