

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

CARMELO MAMMANA

Sul problema algebrico dei momenti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 8,
n° 3-4 (1954), p. 133-140

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1954_3_8_3-4_133_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUL PROBLEMA ALGEBRICO DEI MOMENTI

di CARMELO MAMMANA (a Pisa)

È noto che il problema algebrico dei momenti consiste nel costruire, sull'asse x , n punti reali e distinti x_1, x_2, \dots, x_n e nel determinare in corrispondenza altri n numeri positivi (masse) p_1, p_2, \dots, p_n , in modo che risultino soddisfatte le $2n$ relazioni:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i^k = \mu_k \quad (k = 0, 1, \dots, 2n - 1)$$

dove $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2n-1}$ sono $2n$ numeri reali assegnati (momenti di ordine $0, 1, \dots, 2n - 1$).

G. CASTELNUOVO⁽¹⁾ occupandosi di tale problema dà una dimostrazione delle condizioni necessarie e sufficienti per la sua risolubilità che non sembra completa; nella prima parte di questa nota si dà una dimostrazione di tali condizioni seguendo la via usata da GHIZZETTI⁽²⁾ per il problema dei momenti trigonometrici.

Nella seconda parte, sfruttando una proprietà delle forme quadratiche, si danno le condizioni alle quali devono soddisfare i μ_k affinché gli x_k soluzioni del problema algebrico dei momenti risultino $\geq a$ oppure $\leq b$, con a e b numeri reali assegnati.

1. — Posto:

$$(2) \quad D_0 = \mu_0 \quad D_k = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \dots & \mu_{2k} \end{vmatrix}$$

⁽¹⁾ G. CASTELNUOVO: *Sul problema dei momenti*; Giornale dell'Istituto italiano degli Attuari 1930.

⁽²⁾ A. GHIZZETTI. *Sui coefficienti di Fourier di una funzione limitata, compresa fra limiti assegnati*; Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1950, s. III, Vol IV, pag. 135 e seg.

la condizione necessaria e sufficiente per risolubilità del problema algebrico dei momenti è che i D_k per $k=0, 1, \dots, n-1$ risultino tutti positivi.

Infatti, indicando con a_0, a_1, \dots, a_{n-1} delle variabili reali, dalla (1) si trae la identità:

$$\sum_1^n p_i \left(\sum_0^{n-1} a_h x_i^h \right)^2 = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \mu_{h+k} a_h a_k$$

da cui segue che la forma quadratica:

$$(3) \quad \Psi = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \mu_{h+k} a_h a_k$$

risulta definita positiva se gli x_i sono punti distinti e le p_i positive; il discriminante della (3) dovrà allora essere maggiore di zero e così tutti i minori principali, cioè tutti i D_k , dovranno risultare positivi.

Viceversa, supponendo i $D_k > 0$, $k=0, 1, \dots, n-1$, sia:

$$(4) \quad A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n = 0$$

l'equazione che ha per radici le coordinate incognite x_i . Dovendo le A_i per le (1) verificare le n relazioni lineari omogenee:

$$(5) \quad \begin{aligned} A_0 \mu_0 + \dots + A_n \mu_n &= 0 \\ A_0 \mu_1 + \dots + A_n \mu_{n+1} &= 0 \\ \dots & \\ A_0 \mu_{n-1} + \dots + A_n \mu_{2n-1} &= 0 \end{aligned}$$

si trova che le x_i sono le soluzioni dell'equazione:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix} = 0$$

che risulta di grado n e non di grado inferiore per le ipotesi sui D_k .

Bisognerà adesso dimostrare che le radici di tale equazione sono tutte reali e distinte e poi che le p_i sono positive.

La realtà delle radici della (6) si raggiunge subito: infatti dalla (6) si passa facilmente alla forma:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \mu_1 - \mu_0 x & \mu_2 - \mu_1 x & \dots & \mu_n - \mu_{n-1} x \\ \mu_2 - \mu_1 x & \mu_3 - \mu_2 x & \dots & \mu_{n+1} - \mu_n x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n - \mu_{n-1} x & \mu_{n+1} - \mu_n x & \dots & \mu_{2n-1} - \mu_{2n-2} x \end{vmatrix}$$

ed una tale equazione ha come è noto tutte le sue radici reali; resta a vedere che sono tutte distinte.

Scriviamo la (6) sotto la forma (4) e le (5) sinteticamente:

$$(8) \quad \sum_{h=0}^n \mu_{h+k} A_h = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Detta α una qualsiasi radice della nostra equazione (4) si può porre:

$$(9) \quad A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n = (\alpha - x)(B_0 + B_1 x + \dots + B_{n-1} x^{n-1})$$

da cui si ha:

$$(10) \quad A_h = \alpha B_h - B_{h-1}, \quad (h = 0, 1, \dots, n); \quad B_{-1} = B_n = 0.$$

Introduciamo la seguente quantità:

$$(11) \quad P = \sum_h^{n-1} \sum_k^{n-1} \mu_{h+k} B_h B_k$$

la quale risulta maggiore di zero, essendo, per le ipotesi fatte sui D_k , la forma quadratica (3) definita positiva.

Se la radice α fosse multipla si potrebbe porre:

$$B_0 + B_1 x + \dots + B_{n-1} x^{n-1} = (\alpha - x)(C_0 + C_1 x + \dots + C_{n-2} x^{n-2})$$

con

$$(12) \quad B_h = \alpha C_h - C_{h-1}, \quad (h = 0, 1, \dots, n-1),$$

e per le (10) e le (12) si avrebbe

$$(13) \quad A_h = \alpha^2 C_h - 2 \alpha C_{h-1} + C_{h-2}, \quad (h = 0, 1, \dots, n),$$

supponendo :

$$C_{-2} = C_{-1} = C_{n-1} = C_n = 0.$$

Introducendo adesso le quantità :

$$Q_0 = \sum_0^{n-2} \sum_0^{n-2} \mu_{h+k} C_h C_k,$$

$$Q_1 = \sum_0^{n-2} \sum_0^{n-2} \mu_{h+k+1} C_h C_k,$$

$$Q_2 = \sum_0^{n-2} \sum_0^{n-1} \mu_{h+k+2} C_h C_k,$$

il numero P definito dalla (11) si potrà per le (12) scrivere :

$$\begin{aligned} P &= \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \mu_{h+k} (\alpha C_h - C_{h-1}) (\alpha C_k - C_{k-1}) = \alpha^2 \sum_0^{n-2} \sum_0^{n-2} \mu_{h+k} C_h C_k - \\ &- 2 \alpha \sum_0^{n-2} \sum_0^{n-2} \mu_{h+k+1} C_h C_k + \sum_0^{n-2} \sum_0^{n-2} \mu_{h+k+2} C_h C_k = \alpha^2 Q_0 - 2 \alpha Q_1 + Q_2 \end{aligned}$$

onde il trinomio :

$$(14) \quad \alpha^2 Q_0 - 2 \alpha Q_1 + Q_2$$

risulterà maggiore di zero, perchè $P > 0$.

D'altra parte la (8), ricordando le (13), si può scrivere :

$$\sum_{h=0}^n \mu_{h+k} (\alpha^2 C_h - 2 \alpha C_{h+1} + C_{h+2}) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-2)$$

ovvero :

$$\sum_{h=0}^{n-2} (\alpha^2 \mu_{h+k} - 2 \alpha \mu_{h+k+1} + \mu_{h+k+2}) C_h = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-2)$$

e ne seguirebbe :

$$\sum_0^{n-2} \sum_0^{n-2} (\alpha^2 \mu_{h+k} - 2 \alpha \mu_{h+k+1} + \mu_{h+k+2}) C_h C_k = 0$$

cioè :

$$\alpha^2 Q_0 - 2 \alpha Q_1 + Q_2 = 0$$

che contraddice la (14), da cui l'assurdità del supporre che la (4) abbia una radice multipla.

Dette allora $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ le radici tutte reali e semplici della (4) il sistema (1) si trasformerà nel seguente:

$$(15) \quad \sum_{i=1}^n p_i \alpha_i^k = \mu_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

si tratta di far vedere che esso, nelle p_i , ammette una sola soluzione formata di numeri tutti reali e positivi.

Considerando delle (15) le prime n , abbiamo un sistema lineare di n equazioni in n incognite che ammette nelle p_i una sola soluzione dato che il determinante formato con i coefficienti delle incognite è diverso da zero essendo il determinante di Vandermonde delle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Si tratta di provare che questi numeri soddisfano anche alle restanti n equazioni. Ciò si raggiunge abbastanza facilmente; infatti ricordando le (8) si ha:

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k \sum_{i=1}^n p_i \alpha_i^k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \mu_k$$

ovvero:

$$- \sum_{i=0}^n p_i A_n \alpha_i^n = - A_n \mu_n$$

da cui, essendo $A_n = D_{n-1} \neq 0$, la (15) per $k = n$.

Ripetendo lo stesso procedimento per il sistema:

$$\sum_{i=1}^n p_i \alpha_i^k = \mu_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

si può dimostrare che i numeri p_1, p_2, \dots, p_n , soluzioni delle prime n equazioni delle (15) sono anche soluzioni delle restanti n .

Resta a vedere che i numeri p_1, p_2, \dots, p_n , sono tutti positivi. Indicando con α una delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e con p quella fra le p_1, p_2, \dots, p_n , che ad essa corrisponde, ricordando la (9) sarà:

$$\psi(\alpha) \equiv B_0 + B_1 \alpha + \dots + B_{n-1} \alpha^{n-1} \neq 0$$

Dalle (15) si ha:

$$\sum_{h=0}^{n-1} B_h \sum_{i=1}^n p_i \alpha_i^{h+k} = \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{h+k} B_h \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

cioè:

$$p \alpha^k \psi(\alpha) = \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{h+k} B_h \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

ed allora

$$p \psi(\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k B_k = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \mu_{h+k} B_h B_k$$

da cui e dalla (11):

$$p [\psi(\alpha)]^2 = P > 0 \quad p = \frac{P}{[\psi(\alpha)]^2}$$

cioè quello che restava da provare⁽¹⁾.

2. — Siano x_1, x_2, \dots, x_n , le radici dell'equazione (7) e supponiamo di averle ordinate in senso crescente: vogliamo adesso trovare le condizioni affinché x_1 risulti $\geq a$ e $x_n \leq b$ con a e b numeri reali fissati.

Osserviamo intanto che (7) è il discriminante di una forma quadratica del tipo $\Phi - x\Psi$ con Ψ forma quadratica definita positiva date le ipotesi fatte sui $D_k > 0$.

È noto⁽²⁾ che il minimo ed il massimo di Φ , con la condizione $\Psi = 1$, sono, rispettivamente, la più piccola e la più grande fra le radici dell'equazione (7).

Ora affinché sia $x_1 \geq a$ e $x_n \leq b$, occorre e basta che il minimo di Φ , sulla $\Psi = 1$, sia $\geq a$ e che il massimo di Φ , sulla $\Psi = 1$, sia $\leq b$.

Vogliamo ora far vedere che affinché sia $x_1 \geq a$ occorre e basta che la forma quadratica $\Phi - a\Psi$ sia semi-definita positiva.

Infatti supponiamo $x_1 \geq a$; allora, considerata in S_n la quadrica $\Psi(x) = 1$ ed un punto P diverso dall'origine O delle coordinate, le coordi-

(1) Si osservi che nella condizione dimostrata per la risolubilità del problema algebrico dei momenti intervengono solo i primi $2n - 1$ momenti, non intervenendo quello di ordine $2n - 1$.

Tale momento potrà quindi essere assegnato ad arbitrio; esso interviene però direttamente nella scelta dei punti x_i e quindi delle rispettive p_i come si vede dalla (6); così per es. volendo che un punto x cada nell'origine basta scegliere μ_{2n-1} in modo che sia uguale a zero il determinante:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{3n} \\ \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix}$$

in tal caso il p corrispondente all'origine sarà:

$$p = \frac{P}{[B_0]^2}$$

(2) Vedi p. e. MAURO PICONE: *Appunti di Analisi Superiori*; Rindiella, Napoli, 1940 nota pp. 509-510.

nate di P saranno del tipo :

$$x = \varrho x'$$

essendo x' le coordinate di uno dei due punti in cui la retta OP incontra la quadrica, e ricordando che $\Psi(x') = 1$ si ha :

$$\Phi(x) - a \Psi(x) = \varrho^2 \Phi(x') - a \varrho^2 = \varrho^2 (\Phi(x') - a)$$

da cui

$$\Phi(x) - a \Psi(x) \geq 0$$

dato che il minimo di $\Phi(x')$, cioè x_1 , è $\geq a$ su $\Psi(x) = 1$.

Supponendo adesso $\Phi(x) - a \Psi(x) \geq 0$, in particolare sarà anche :

$$\Phi(x') - a \geq 0$$

con x' scelto in modo da essere $\Psi(x') = 1$, e quindi su $\Psi(x) = 1$ anche $\min \Phi(x)$, cioè x_1 , sarà $\geq a$.

Risulterà allora :

$$\mu_1 - a \mu_0 > 0, \begin{vmatrix} \mu_1 - a \mu_0 & \mu_2 - a \mu_1 \\ \mu_2 - a \mu_1 & \mu_3 - a \mu_2 \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} \mu_1 - a \mu_0 & \mu_2 - a \mu_1 & \dots & \mu_n - a \mu_{n-1} \\ \mu_2 - a \mu_1 & \mu_3 - a \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} - a \mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n - a \mu_{n-1} & \mu_{n+1} - a \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} - a \mu_{2n-2} \end{vmatrix} \geq 0$$

oppure, sotto forma equivalente :

$$(16) \quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ \mu_0 & \mu_1 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix} \geq 0$$

avendosi il segno $= 0$ nell'ultimo determinante quando il punto x_1 è proprio a .

Analogamente si vede che affinché x_n sia $\leq b$ occorre e basta che la forma quadratica $\Phi - b\Psi$ sia semi-definita negativa, il che comporta che siano verificate le:

$$(17) \quad \begin{vmatrix} 1 & b \\ \mu_0 & \mu_1 \end{vmatrix} < 0, \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix} \geq 0$$

avendosi anche quì il segno $= 0$ nell'ultimo determinante, quando il punto x_n è proprio b ⁽⁴⁾.

(4) Osserviamo in particolare che quando a e b sono uguali al' zero, allora le condizioni (16) e (17) dicono che la Φ è nel primo caso una forma quadratica semi-definita positiva e nel secondo una forma quadratica semi-definita negativa.

Osserviamo ancora, da quanto detto sopra, che nel caso di una equazione del tipo (7), discriminante di una forma quadratica $\Phi - x\Psi$, con Ψ forma quadratica definita positiva, condizione necessaria e sufficiente affinché le sue radici siano maggiori (minori) di zero è che la Φ sia definita positiva (negativa).