

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIOVANNI RICCI

## **Maggiorazione del resto delle serie di potenze sul cerchio di convergenza**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 8,*  
n° 3-4 (1954), p. 121-131

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1954\\_3\\_8\\_3-4\\_121\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1954_3_8_3-4_121_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# MAGGIORAZIONE DEL RESTO DELLE SERIE DI POTENZE SUL CERCHIO DI CONVERGENZA

di GIOVANNI RICCI (a Milano)

SUNTO: Si considerano le serie di potenze  $f(z) = \sum a_n z^n$  aventi raggio di convergenza 1 e nelle quali  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Come complemento al noto teorema di P. FATOU e M. RIESZ che garantisce la convergenza di tali serie nei punti regolari  $e^{i\theta}$ , e uniforme in ogni insieme  $E$  chiuso di tali punti, si assegna una maggiorazione della differenza fra  $f(e^{i\theta})$  e la somma  $\sum_0^n a_k e^{ik\theta}$  che vale uniformemente in  $E$ . Se ne fa applicazione al caso  $a_n = O(n^{-\nu})$ .

1. Sia  $\sum_0^\infty a_n z^n$  una serie di potenze avente raggio di convergenza 1; denotiamo con  $f(z)$  la funzione analitica definita da questa serie per prolungamento rettilineo (cioè entro la stella di MITTAG-LEFFLER) e poniamo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

È noto il classico teorema di P. FATOU-M. RIESZ<sup>(1)</sup> «Se, per  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , i punti  $e^{i\theta}$  sono punti regolari di  $f(z)$  e inoltre  $a_n \rightarrow 0$ , allora  $f_n(e^{i\theta}) \rightarrow f(e^{i\theta})$  (per  $n \rightarrow +\infty$ ), uniformemente in  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ».

È evidente, come conseguenza del lemma di PINCHERLE-HEINE-BOREL, che la tendenza al limite risulta uniforme su ogni insieme chiuso di punti  $e^{i\theta}$  regolari, poichè ogni tale insieme si può ricoprire con un numero finito di archi di regolarità.

Può presentarsi l'utilità di maggiorare, in funzione di  $n$ , il resto  $f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})$ , uniformemente rispetto a  $\theta$ , mentre  $e^{i\theta}$  descrive un arco di regolarità o, più in generale, un insieme  $E$ , chiuso, costituito di punti regolari di  $f(z)$ : a questo problema risponde la presente Nota. L'esame del caso in cui la successione  $\{a_n\}$  non è a fluttuazione finita conduce ai due teoremi del n. 4.

---

(1) Vedi E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin., 2. Aufl., 1929, pp. 15, 73-76: ivi si trovano anche le indicazioni bibliografiche.

2. Il caso elementare della fluttuazione finita. Convien prendere in considerazione preliminare un caso elementare che rispecchia un classico teorema di E. PICARD<sup>(2)</sup> che di solito si enuncia per le serie  $\sum_0^{\infty} a_n z^n$  con  $a_n$  reale,  $a_n \geq a_{n+1}$ ,  $a_n \rightarrow 0$ .

Diremo, seguendo l'uso comune, che una successione  $\{a_n\}$  di numeri complessi è a fluttuazione finita quando è limitato superiormente il perimetro della poligonale avente per vertici  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ); l'estremo superiore  $L$  di tale perimetro si dirà *fluttuazione totale* di  $\{a_n\}$ . Questo si verifica se e soltanto se  $\sum_0^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$  è convergente: si pone allora

$$(2.1) \quad L = \sum_0^{\infty} |a_n - a_{n+1}|, \quad \lambda_n = \sum_n^{\infty} |a_k - a_{k+1}|$$

ed è  $\lambda_n \leq L$ ,  $\lambda_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

È evidente che se  $\{a_n\}$  è a fluttuazione finita necessariamente esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$ ; può essere  $\alpha = 0$  o  $\alpha \neq 0$ .

Il classico teorema di E. PICARD può assumere la forma seguente:

**TEOREMA** — *La successione  $\{a_n\}$  sia a fluttuazione finita e sia  $a_n \rightarrow 0$ ; poniamo*

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}|.$$

*La serie  $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$  ha il raggio di convergenza almeno uguale a 1 e converge in ogni punto  $z = e^{i\theta}$  ( $0 < \theta < 2\pi$ ); il resto risulta maggiorato al modo seguente*

$$(2.2) \quad |f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| \leq \lambda_n / \sin(\theta/2), \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

Il raggio di convergenza è almeno 1 poichè  $|a_n|$  è limitato, inoltre è

$$\begin{aligned} f_n(e^{i\theta}) \cdot (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) &= \sum_{k=0}^n a_k e^{ik\theta} (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) \\ &= -a_0 e^{-i\theta/2} + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) e^{i(2k+1)\theta/2} + a_n e^{i(2n+1)\theta/2}. \end{aligned}$$

<sup>(2)</sup> Vedi E. PICARD, *Traité d'Analyse*, II, 3<sup>e</sup> éd., Paris 1925, pp. 77-78. S. PINCHERLE, *Teoria delle funzioni analitiche*, Bologna, 1922, pp. 61-62. G. SANSONE, *Teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Vol. I, Padova 1950, p. 18.

Per ogni  $m > n$ , da questa uguaglianza, mediante sottrazione, otteniamo

$$\begin{aligned} \{f_m(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})\}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) &= \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) e^{i(2k+1)\theta/2} \\ &\quad - a_n e^{i(2n+1)\theta/2} + a_m e^{i(2m+1)\theta/2} \end{aligned}$$

e passando ai moduli ricaviamo

$$(2.3) \quad |f_m(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| \cdot 2 \sin(\theta/2) \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n| + |a_m|.$$

Adesso osserviamo che  $|a_n - a_m| \leq \lambda_n - \lambda_m$  e passando al limite per  $m \rightarrow \infty$ , risulta  $a_m \rightarrow 0$ ,  $\lambda_m \rightarrow 0$  e quindi  $|a_n| \leq \lambda_n$ ; analogamente  $|a_m| \leq \lambda_m$ . La somma  $\Sigma$  al secondo membro è  $\lambda_n - \lambda_m$  e si conclude

$$|f_m(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| \cdot 2 \sin(\theta/2) \leq \lambda_n - \lambda_m + \lambda_n + \lambda_m = 2 \lambda_n$$

e quindi

$$|f_m(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| \leq \lambda_n / \sin(\theta/2), \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

dove il secondo membro è indipendente da  $m$ . Per ogni  $\theta$  fissato, il criterio generale di convergenza ci dice che  $f_n(e^{i\theta})$  converge ed è  $f_n(e^{i\theta}) \rightarrow f(e^{i\theta})$  e vale la (2.2).

OSSERVAZIONE. — Sia  $\{a_n\}$  a fluttuazione finita e  $a_n \rightarrow \alpha$  con  $\alpha \neq 0$ ; si può porre  $a_n = \alpha + b_n$ , e

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n = \alpha \sum_0^{\infty} z^n + \sum_0^{\infty} b_n z^n = \alpha \sum_0^{\infty} z^n + g(z).$$

Allora  $a_n - a_{n+1} = b_n - b_{n+1}$  e quindi  $\{b_n\}$  è a fluttuazione finita e  $b_n \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} f_n(e^{i\theta}) &= \alpha \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} + g_n(e^{i\theta}) \\ (2.4) \quad &= \alpha \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} + g(e^{i\theta}) + \tau \lambda_n / \sin(\theta/2) \end{aligned}$$

dove  $|\tau| \leq 1$  ( $\tau$  complesso).

Si può dimostrare, basandosi sulla (2.3), che l'insieme dei punti  $\{f_n(e^{i\theta}), f_{n+1}(e^{i\theta}), f_{n+2}(e^{i\theta}), \dots\}$  ha un diametro non superiore a  $(|\alpha| + \lambda_n) / \sin(\theta/2)$ : basta osservare che  $a_n = \alpha + \tau_n \lambda_n$ ,  $a_m = \alpha + \tau_m \lambda_m$  ( $|\tau_n| \leq 1$ ,  $|\tau_m| \leq 1$ ) e il secondo membro in (2.3) ha il modulo non superiore a  $2(|\alpha| + \lambda_n)$ .

L'uguaglianza (2.4) ci dice che, fissato  $\theta$  ( $0 < \theta < 2\pi$ ), l'indeterminazione di  $f_n(e^{i\theta})$ , partendo da  $g(e^{i\theta})$ , segue quella della somma parziale della serie geometrica  $\alpha(1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta})$  con l'aggiunta di un termine «satellite» infinitesimo  $\tau \lambda_n / \sin(\theta/2)$ .

ESEMPLI. — Quando  $a_n = O(n^{-\gamma})$ ,  $\gamma > 1$ , la serie  $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$  converge assolutamente e uniformemente in  $|z| \leq 1$  ed è  $f(e^{i\theta}) = f_n(e^{i\theta}) + O(n^{-\gamma+1})$  uniformemente rispetto a  $\theta$ . L'ipotesi della fluttuazione finita ci consente di migliorare questa valutazione e anche di considerare il caso  $0 < \gamma \leq 1$  nel quale la convergenza della serie non è più assicurata a priori per  $|z| = 1$ . Consideriamo il seguente esempio.

Sia  $a_n = e^{i\varphi_n} / n^\gamma$  ( $\gamma > 0$ ) e poniamo

$$\Phi_n = \text{Max}_{n \leq k} |\varphi_k - \varphi_{k+1}|;$$

allora, se la serie  $\sum_0^\infty \Phi_n / n^\gamma$  converge, la successione  $\{a_n\}$  è a fluttuazione finita.

Sia inoltre  $\Phi_n \rightarrow 0$ ; allora per ogni  $\delta > 0$  risulta

$$(2.5) \quad \lambda_n = \sum_{k=n}^\infty |a_k - a_{k+1}| < (1 + \delta) \left\{ \frac{1}{n^\gamma} + \sum_{k=n}^\infty \frac{\Phi_k}{k^\gamma} \right\},$$

quando  $n$  è abbastanza grande.

Per  $\gamma > 1$  l'affermazione è ovvia, poichè  $\sum_0^\infty \Phi_n / n^\gamma$  converge e  $\{a_n\}$  risulta a fluttuazione finita; in questo caso potrebbe anche non essere  $\Phi_n \rightarrow 0$ .

Sia  $0 < \gamma \leq 1$ , allora necessariamente  $\Phi_n \rightarrow 0$ ; sia anche  $\gamma > 0$  qualunque con  $\Phi_n \rightarrow 0$ . Allora è

$$a_n - a_{n+1} = \frac{e^{i\varphi_n}}{n^\gamma} \left\{ 1 - e^{i(\varphi_{n+1} - \varphi_n)} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-\gamma} \right\}$$

ed essendo  $|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leq \Phi_n \rightarrow 0$ , per  $n$  abbastanza grande, risulta (tenendo conto degli sviluppi in serie):

$$\begin{cases} e^{i(\varphi_{n+1} - \varphi_n)} = 1 + \tau' \Phi_n, & |\tau'| < 1 + \delta/2, \\ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-\gamma} = 1 - \tau'' \frac{\gamma}{n}, & |\tau''| < 1 + \delta/2, \end{cases}$$

e quindi

$$|a_n - a_{n+1}| < \frac{1 + \delta/2}{n^\gamma} \left\{ \Phi_n + \frac{\gamma}{n} + (1 + \delta/2) \Phi_n \frac{\gamma}{n} \right\},$$

ed essendo  $\Phi_n \rightarrow 0$ , anche

$$|a_n - a_{n+1}| < (1 + \delta) \left\{ \frac{\gamma}{n^{1+\gamma}} + \frac{\Phi_n}{n^\gamma} \right\}.$$

Questa maggiorazione, passando alla serie che assegna  $\lambda_n$ , conduce alla (2.5) valida per  $n$  abbastanza grande.

L'osservazione precedente conduce alle proposizioni seguenti

Sia  $a_n = e^{i\varphi_n} / n^\gamma$

1) Da  $\varphi_n - \varphi_{n+1} = O(1/n)$  segue

$$|f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K/(n^\gamma \sin(\theta/2))$$

( $K$  indipendente da  $n$  e da  $\theta$ ).

2) Se  $0 < \gamma \leq 1$  e  $\varphi_n - \varphi_{n+1} = o(n^{\gamma-1})$  allora  $f_n(e^{i\theta})$  converge per  $n \rightarrow +\infty$ .

3) Se  $\Phi_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\gamma} \log^{1+\varepsilon} n}\right)$  ( $\varepsilon > 0, 0 < \gamma \leq 1$ )

allora  $f_n(e^{i\theta})$  converge per  $n \rightarrow +\infty$ .

4) Se  $0 < \delta < \gamma$  e  $\varphi_n - \varphi_{n+1} = O(n^{\gamma-1-\delta})$  allora

$$|f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K/(n^\delta \sin(\theta/2))$$

( $K$  indipendente da  $n$  e da  $\theta$ ).

Veniamo adesso al problema più delicato di maggiorare  $f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})$  nel caso in cui, pur essendo  $a_n \rightarrow 0$ , non si faccia l'ipotesi che sia finita la fluttuazione della successione  $\{a_n\}$ .

**3. Definizione della successione infinitesima  $\{\omega_n\}$ .** Sia  $a_n \rightarrow 0$  e poniamo

$$(3.1) \quad A_n = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|,$$

$$(3.2) \quad \varepsilon(u, v) = \text{Max}(|a_{u+1}|, |a_{u+2}|, \dots, |a_v|),$$

$$(3.3) \quad \varepsilon(v, \infty) = \text{Max}(|a_{v+1}|, |a_{v+2}|, |a_{v+3}|, \dots).$$

È evidente che  $A_n/n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\varepsilon(u, v) \rightarrow 0$  per  $u \rightarrow +\infty, \varepsilon(v, \infty) \rightarrow 0$  per  $v \rightarrow +\infty$ . Fissato  $\delta$ , con  $0 < \delta < 1$ , si consideri il seguente minimo conseguito al variare di  $u$  e  $v$

$$(3.4) \quad \omega_n = \omega_n(\delta) = \text{Min}_{0 \leq u \leq n \leq v} \left( \frac{A_u}{v-u} + \varepsilon(u, n) + \frac{\varepsilon(n, \infty)}{(1-\delta)^{v-n}} \right).$$

È ancora evidente che  $\omega_n(\delta) < \omega_n(\delta')$  per  $0 < \delta < \delta'$  e si può considerare la seguente espressione  $\eta_n$ , indipendente da  $\delta$ , ottenuta con  $v = n$  (limitando la variabilità della coppia  $(u, v)$ ) e quindi tale che  $\omega_n(\delta) \leq \eta_n$  per ogni  $\delta > 0$

$$(3.5) \quad \eta_n = \text{Min}_{0 \leq u \leq n} \left( \frac{A_u}{n-u} + \varepsilon(u, n) + \varepsilon(n, \infty) \right).$$

Il comportamento di  $A_u/n, \varepsilon(n, n), \varepsilon(n, \infty)$  assicura che, per  $n \rightarrow +\infty$ , risulta  $\eta_n \rightarrow 0$ : infatti tutti e tre i termini della somma entro parentesi convergono a zero quando si scelga, per esempio,  $u(n) < n/2, u(n) \rightarrow +\infty$ .

#### 4. La maggiorazione. — Sussiste il seguente

**TEOREMA I.** *La serie di potenze  $\sum_0^{\infty} a_n z^n$  abbia raggio di convergenza 1 e sia  $a_n \rightarrow 0$ .*

*Sia  $E$  un insieme chiuso di punti  $e^{i\theta}$  regolari della circonferenza di convergenza e  $f(z)$  la funzione definita da  $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$  per prolungamento rettilineo.*

*Allora esiste una costante  $K = K(E, f)$  indipendente da  $n$ , tale che si abbia*

$$(4.1) \quad |f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K \omega_n (\leq K \eta_n)$$

*per ogni  $e^{i\theta}$  dell'insieme  $E$ .*

**OSSERVAZIONE.** Questo teorema contiene ovviamente quello di FATOU-RIESZ e risponde all'informazione richiesta.

Il numero  $\delta > 0$ , che definisce  $\omega_n(\delta)$ , può essere assunto piccolo quanto si vuole, ma deve essere indipendente da  $n$ .

Come corollario del precedente teorema ricaviamo la proposizione seguente:

**TEOREMA II.** — *Sia  $a_n = O(n^{-\gamma}) (\gamma > 0)$ : conservando per  $f(z), E, \theta, K = K(E, f)$  il significato del Teor. I risulta:*

$$\text{per } 0 < \gamma < 1, \quad |f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K/n^\gamma,$$

$$\text{per } \gamma = 1, \quad |f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K \log n / n,$$

$$\text{per } 1 < \gamma < 2, \quad |f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K/n,$$

$$\text{per } 2 \leq \gamma, \quad |f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K/n^{\gamma-1}.$$

OSSERVAZIONE. — L'espressione maggiorante contiene al denominatore una potenza di  $n$ : in questa potenza, al variare di  $\gamma$ , l'esponente rimane invariato col valore 1 per tutto l'intervallo  $1 < \gamma \leq 2$ . Rimane aperto il problema di stabilire se questo fenomeno è essenziale oppure se è dovuto accidentalmente al processo dimostrativo.

La dimostrazione di questo Teor. II è immediata, quando si parte dal Teor. I. Si considerino i tre addendi dell'espressione entro parentesi che figura al secondo membro di (3.5): essi sono maggiorati nei diversi casi al modo seguente

$$1). \quad 0 < \gamma < 1, \quad A_u = O(n^{1-\gamma}), \quad u = [n/2],$$

$$O(n^{-\gamma}), \quad O(n^{-\gamma}), \quad O(n^{-\gamma}).$$

$$2). \quad \gamma = 1, \quad A_u = O(\log u/u), \quad u = [n/\log n],$$

$$O(\log n/n), \quad O(\log n/n), \quad O(1/n).$$

$$3). \quad 1 < \gamma < 2, \quad A_u = O(1), \quad u = [n^{(1+\gamma)/(2\gamma)}],$$

$$O(n^{-1}), \quad O(n^{-(1+\gamma)/2}), \quad O(n^{-\gamma}).$$

4).  $\gamma \geq 2$ . In questo caso si ricorre alla maggiorazione immediata della serie  $\sum_{n+1}^{\infty} |a_k z^k|$  e si ottiene  $O(n^{-\gamma+1})$ .

Possiamo esaminare un altro caso:

Sia  $a_n = O\left(\frac{1}{n \log n}\right)$ ; allora, con le solite notazioni, abbiamo  $A_u = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_u| = O(\log \log u)$  e, assumendo  $u = [n/(\log n \log \log n)]$  otteniamo  $\eta_n = O(\log \log n/n)$  e quindi

$$|f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K \log \log n/n \quad (n \geq 3)$$

su ogni insieme (chiuso)  $E$  di regolarità per  $f(z)$ .



5. — **Dimostrazione del teorema I**<sup>(3)</sup>. Denotiamo con  $\gamma \cdot E$  ( $\gamma$  numero complesso) l'insieme dei punti  $\gamma z$ , essendo  $z \in E$ .

Denotiamo con  $4\delta$  un qualunque numero minore della distanza dell'insieme  $E$  dal contorno della stella rettilinea di MITTAG-LEFFLER di centro 0. L'insieme chiuso  $\lambda e^{i\varphi} \cdot E (1 - \delta \leq \lambda \leq 1 + \delta, -\delta \leq \varphi \leq \delta)$  è strettamente interno a detta stella: denotiamo con  $M(\delta)$  il massimo di  $|f(z)|$  in questo insieme chiuso.

Sia  $Z = e^{i\theta}$  un punto di  $E$ ; il suo intorno  $[Z, \delta]$  costituito dal quadrilatero  $\lambda e^{i\varphi} Z (1 - \delta \leq \lambda \leq 1 + \delta, -\delta \leq \varphi \leq \delta)$  è contenuto in  $\lambda e^{i\varphi} \cdot E$ . È sufficiente dimostrare la validità di (4.1) per il punto  $Z$  con una costante  $K$  dipendente soltanto da  $f$  e da  $\delta$ , e allora la sua validità è assicurata uniformemente.

Procediamo con una serie di piccole osservazioni:

1). Sia  $0 < \alpha \leq \delta$ ; allora, tenendo presente (3.3), quando  $|z| = 1 - \alpha$  risulta

$$\begin{aligned} |f(z) - f_n(z)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| (1 - \alpha)^k \leq \varepsilon(n, \infty) \sum_{k=n+1}^{\infty} (1 - \alpha)^k \\ (5.1) \qquad \qquad &\leq \varepsilon(n, \infty) \cdot (1 - \alpha)^{n+1}/\alpha. \end{aligned}$$

2). Sia  $0 < \alpha \leq \delta$ ; allora, tenendo presenti (3.1) e (3.2) e il significato di  $M(\delta)$ , quando  $|z| = 1 + \alpha$  risulta

$$\begin{aligned} |f(z) - f_n(z)| &\leq |f(z)| + |f_n(z)| \\ &\leq |f(z)| + |f_u(z)| + |f_n(z) - f_u(z)| \\ &\leq M(\delta) + \sum_{k=0}^u |a_k| (1 + \alpha)^k + \sum_{k=u+1}^n |a_k| (1 + \alpha)^k \\ &\leq M(\delta) + A_u (1 + \alpha)^u + \varepsilon(u, n) \frac{(1 + \alpha)^{n+1} - 1}{\alpha} \\ (5.2) \qquad \qquad &\leq M(\delta) + A_u (1 + \alpha)^u + \varepsilon(u, n) \frac{(1 + \alpha)^{n+1}}{\alpha}. \end{aligned}$$

---

<sup>(3)</sup> Questa dimostrazione è analoga a quella esposta da E. LANDAU per il Teorema di FATOU-RIESZ (vedi loc. cit.<sup>(4)</sup>): essa si basa sul principio del massimo modulo applicato a una funzione ausiliaria  $g(z)$  regolare nell'intorno di un punto  $e^{i\theta}$ .

3). Siano  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  i due punti  $\zeta_1 = e^{-i\delta} Z$  e  $\zeta_2 = e^{i\delta} Z$ , estremi dell'arco  $\widehat{\zeta_1 \zeta_2}$  di regolarità; poniamo per  $v \geq n$ :

$$(5.3) \quad g_n(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \cdot \{f(z) - f_n(z)\}/z^{v+1}.$$

Nel punto  $Z = e^{i\theta}$  è  $|Z| = 1$ ,  $|Z - \zeta_1| > \delta/2$ ,  $|Z - \zeta_2| > \delta/2$  e quindi

$$|g_n(Z)| \geq (\delta^2/4) |f(Z) - f_n(Z)|,$$

da cui

$$(5.4) \quad |f(Z) - f_n(Z)| \leq 4 |g_n(Z)|/\delta^2.$$

Pel principio del massimo modulo, essendo  $g_n(z)$  regolare in un campo contenente il quadrilatero  $[Z, \delta]$ , la (4.1) risulterà dimostrata se faremo vedere che  $|g_n(z)|$  lungo il contorno di questo quadrilatero verifica

$$(5.5) \quad |g_n(z)| < K_1 \omega_n$$

dove  $K_1 = K_1(f, \delta)$  dipende soltanto da  $\delta$  e dalla successione  $\{|a_n|\}$ . Allora  $K = 4 K_1/\delta^2$ .

4). Lungo l'arco  $|z| = 1 - \delta$ ,  $\arg Z - \delta \leq \arg z \leq \arg Z + \delta$  risulta  $|(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)| < 5\delta^2$  e per la (5.1)

$$(5.6) \quad \begin{aligned} |g_n(z)| &\leq 5\delta^2 \cdot \varepsilon(n, \infty) (1 - \delta)^{n+1}/(\delta(1 - \delta)^{v+1}) \\ &\leq 5\delta \cdot \varepsilon(n, \infty)/(1 - \delta)^{v-n}. \end{aligned}$$

5). Lungo il raggio  $1 - \delta \leq |z| < 1$ ,  $\arg z = \arg Z - \delta$ , risulta

$$|z - \zeta_1| = \alpha, \quad |z - \zeta_2|^2 < 5\delta^2$$

e tenendo conto della (5.1) otteniamo

$$(5.7) \quad \begin{aligned} |g_n(z)| &< \alpha \cdot \delta \sqrt{5} \cdot \varepsilon(n, \infty) (1 - \alpha)^{n+1}/(\alpha(1 - \alpha)^{v+1}) \\ &< \delta \sqrt{5} \cdot \varepsilon(n, \infty)/(1 - \alpha)^{v-n} \\ &< \delta \sqrt{5} \cdot \varepsilon(n, \infty)/(1 - \delta)^{v-n}. \end{aligned}$$

6). Lungo l'arco  $|z| = 1 + \delta$ ,  $\arg Z - \delta \leq \arg z \leq \arg Z + \delta$  risulta  $|(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)| < 5\delta^2$  e per la (5.2) si vede che  $|g_n(z)|$  è minore di

$$5\delta^2 \left\{ M(\delta) + A_n(1 + \delta)^n + \varepsilon(u, n) \frac{(1 + \delta)^{n+1}}{\delta} \right\} / (1 + \delta)^{v+1}$$

e quindi

$$|g_n(z)| < 5\delta \left\{ \frac{\delta M(\delta)}{(1+\delta)^{v+1}} + \frac{A_u \delta}{(1+\delta)^{v-u+1}} + \frac{\varepsilon(u, n)}{(1+\delta)^{v-n}} \right\}.$$

È evidente che, fissato  $\delta$ , quando  $v - u \geq \nu(\delta)$  risulta (essendo  $A_u$  positivo e non decrescente al crescere di  $u$  e quindi  $M(\delta)/A_u$  limitato)

$$\frac{\delta M(\delta)}{(1+\delta)^{v+1}} + \frac{\delta A_u}{(1+\delta)^{v-u+1}} < \frac{A_u}{v-u}$$

e pertanto è

$$(5.8) \quad |g_n(z)| < K_2(\delta) \left\{ \frac{A_u}{v-u} + \frac{\varepsilon(u, n)}{(1+\delta)^{v-n}} \right\}.$$

7). Lungo il raggio  $1 < |z| \leq 1 + \delta$ ,  $\arg z = \arg Z - \delta$  risulta

$$|z - \zeta_1| = \alpha, \quad |z - \zeta_2| < 5\delta$$

e tenendo conto della (5.2) si vede che  $|g_n(z)|$  è minore di

$$\alpha \cdot 5\delta \left\{ M(\delta) + A_u(1+\alpha)^u + \varepsilon(u, n) \frac{(1+\alpha)^{n+1}}{\alpha} \right\} / (1+\alpha)^{v+1}.$$

e quindi

$$|g_n(z)| < 5\delta \left\{ \frac{\alpha M(\delta)}{(1+\alpha)^{v+1}} + \frac{\alpha A_u}{(1+\alpha)^{v-u}} + \frac{\varepsilon(u, n)}{(1+\alpha)^{v-n}} \right\}.$$

Osserviamo che la frazione  $\alpha/(1+\alpha)^m$  assume il valore massimo per  $\alpha = 1/(m-1)$  ed è

$$\frac{1/(m-1)}{\{1 + 1/(m-1)\}^m} = \frac{1}{m-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{-m} < \frac{1}{e(m-1)} < \frac{1}{m}.$$

Ne segue

$$|g_n(z)| < 5\delta \left\{ \frac{M(\delta)}{v+1} + \frac{A_u}{v-u} + \varepsilon(u, n) \right\},$$

e poiche  $A_u$  è positivo e non decrescente al crescere di  $u$

$$(5.9) \quad |g_n(z)| < K_3(\delta) \left\{ \frac{A_u}{v-u} + \varepsilon(u, n) \right\}.$$

8). Nel punto  $z = \zeta_1$  è  $g_n(z) = 0$ . La maggiorazione di  $|g_n(z)|$  sulla parte rimanente del contorno  $1 - \delta \leq |z| \leq 1 + \delta$ ,  $\arg z = \arg Z + \delta$  si ottiene per simmetria.

9). Le maggiorazioni (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9) ci mostrano che lungo tutto il contorno di  $[Z, \delta]$  risulta

$$|g_n(z)| < K_1(f, \delta) \cdot \left\{ \frac{A_u}{v-u} + \varepsilon(u, n) + \frac{\varepsilon(n, \infty)}{(1-\delta)^{v-n}} \right\},$$

e quindi vale la (5.5) e la (4.1), tenendo conto della definizione (3.4) di  $\omega_n$ .

Il teorema risulta così dimostrato.