ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CARLO PUCCI

Studio col metodo delle differenze di un problema di Cauchy relativo ad equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 7, nº 3-4 (1953), p. 205-215
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_3-4_205_0>

STUDIO COL METODO DELLE DIFFERENZE DI UN PROBLEMA DI CAUCHY RELATIVO AD EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE DI TIPO PARABOLICO (*)

DI CARLO PUCCI (Roma)

In questa Nota si dà un teorema di esistenza per il seguente problema di CAUCHY:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(t)\,u + f(x, t), \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = u_1(x). \tag{2}$$

Lo studio è condotto col metodo delle differenze e cioè provando che la soluzione è il limite di una particolare successione di soluzioni di corrispondenti problemi alle differenze finite. Tale metodo, che è stato studiato in modo sistematico da COURANT, FRIEDRICHS, LEWY (1), ha acquistato grande importanza in questi ultimi anni perchè su di esso sono fondati i moderni procedimenti di integrazione numerica di equazioni a derivate parziali mediante calcolatrici elettroniche. In questa Nota si prova anche che la soluzione del problema di CAUCHY considerato può essere arbitrariamente approssimata con la soluzione di un corrispondente problema alle differenze finite tenendo pure conto degli inevitabili errori di arrotondamento che si commettono nello svolgimento pratico dei calcoli (2).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(1) COURANT R., FRIEDRICHS K., LEWY H. *Uber die partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik* « Math. Ann. » 100, 1928 pp. 32-74.

(2) Si deve tener conto infatti che le macchine calcolatrici operano su numeri espressi in forma decimale, o più generalmente in una data base, e con un numero finito di cifre.

1. — Siano l, h due numeri positivi ed R il rettangolo $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq h$. Ciò posto proviamo il seguente teorema.

Siano $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(x,t)$ funzioni continue in R ed inoltre le funzioni $u_0(x)$, $u_1(x)$, $f(x,t)$ abbiano ivi derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x verificanti le limitazioni

$$\left| \frac{d^n u_0}{d x^n} \right|, \left| \frac{d^n u_1}{d x^n} \right|, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right| < M \frac{(2n)!}{\varrho^n} \quad \text{per} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$ [3],

ove M e ϱ sono costanti positive, $\varrho > l^2 h^2 \max_{[0,h]} |a(t)|$.

In tali ipotesi esiste una funzione $u(x,t)$, dotata in R delle derivate parziali continue $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ con $i = 1, 2$ ed $n = 1, 2, \ldots$, che è soluzione in R del problema di Cauchy (1), (2).

Osservazione. — L'ipotesi che le funzioni f, u_0, u_1 abbiano derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x è essenziale per stabilire un teorema di esistenza come è stato osservato da E. Holmgren [4].

Dimostrazione. — Proviamo il teorema nell'ipotesi $c(t) \equiv 0$, comportando ciò una notevole riduzione nella lunghezza delle espressioni e risultando la dimostrazione sostanzialmente uguale al caso $c(t)$ non identicamente nullo.

Sia n un numero naturale ed R_n il reticolo costituito dai punti $\left(\frac{r}{n^2} l, \frac{s}{n} h\right)$ con $r = 0, 1, \ldots, n^2$ ed $s = 0, 1, \ldots, n$. Supposto definita una funzione $v(x,t)$ in R_n poniamo per semplicità $v_{r,s} = v\left(\frac{r}{n^2} l, \frac{s}{n} h\right)$ ed inoltre

$$\Delta_x v_{r,s} = (v_{r+1,s} - v_{r,s}) \frac{n^2}{l}, \qquad \Delta_t v_{r,s} = (v_{r,s+1} - v_{r,s}) \frac{n}{h}, \tag{4}$$

$$\Delta_t^2 v_{r,s} = \Delta_t(\Delta_t v_{r,s}) = (v_{r,s+2} - 2 v_{r,s+1} + v_{r,s}) \frac{n^2}{h^2}. \tag{5}$$

---

[3] Notiamo che le limitazioni (3) non comportano l'analiticità rispetto ad x delle funzioni u_0, u_1, f.

[4] E. Holmgren, *Sur les solutions quasi analitiques de l'équations de la chaleur* « Arkiv för Mat. Astr. Fys » XVIII, n. 9 (1924). Tale questione è studiata anche in una mia Nota *Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali* « Rend. Acc. Lincei » VIII, 13, 1952 pg. 111. Si noti che le considerazioni di Holmgren non sussistono più per il problema di Cauchy relativo alla equazione differen-

Poniamo anche

$$a_s = a\left(\frac{s}{n}\,h\right), \quad b_s = b\left(\frac{s}{n}\,h\right),$$

$$f_{r,s} = f\left(\frac{r}{n^2}\,l\,,\,\frac{s}{n}\,h\right) \quad \text{per} \quad r = 0\,,1\,,\ldots,n^2\,, \quad s = 0\,,1\,,\ldots,n\,.$$

Consideriamo relativamente al reticolo R_n il seguente problema di CAUCHY alle differenze finite corrispondente al problema (1), (2):

$$\Delta_t^2\, v_{r,s} = a_s\, \Delta_x\, v_{r,s} + b_s\, \Delta_t\, v_{r,s} + f_{r,s}\,, \tag{6}$$

$$v_{r,0} = u_0\left(\frac{r}{n^2}\,h\right), \quad v_{r,1} = u_0\left(\frac{r}{n^2}\,h\right) + \frac{h}{n}\,u_1\left(\frac{r}{n^2}\,h\right). \tag{7}$$

Moltiplicando primo e secondo membro della (6) per $\dfrac{h^2}{n^2}$ si ottiene per le (4), (5)

$$v_{r,s+2} - 2\,v_{r,s+1} + v_{r,s} = \frac{h^2}{l}\,a_s\,(v_{r+1,s} - v_{r,s}) + \frac{h}{n}\,b_s\,(v_{r,s+1} - v_{r,s}) + \frac{h^2}{n^2}\,f_{r,s}\,. \tag{8}$$

Notiamo che mediante le (7) e la (8) si può calcolare $v_{r,2}$ per $r = 0\,,1\,,\ldots$ $\ldots\,,n^2 - 1$. Noti tali valori, mediante le (7) e la (8) si può pure calcolare $v_{r,3}$ per $r = 0\,,1\,,\ldots,n^2 - 1$, e così procedendo si può calcolare con un numero finito di operazioni $v_{r,s}$ per $s = 0, 1, \ldots, n$ ed $r = 0, 1, \ldots, n^2 - \left[\dfrac{s}{2}\right]$ [5]. Risulta così univocamente definita una soluzione $v(x\,,t)$ in tutti i punti dell'insieme $A^{(n)}$ che è costituito dai punti $\left(\dfrac{r}{n^2}\,l\,,\,\dfrac{s}{n}\,h\right)$ di R_n per cui $r \leq n^2 - \left[\dfrac{s}{2}\right]$.

Proviamo alcune limitazioni per la funzione v ed i suoi rapporti incrementali. Dalla (8) otteniamo

$$v_{r,s+2} = v_{r,s+1} + \frac{h}{n}\left(1 + b_s\,\frac{h}{n}\right)\Delta_t\, v_{r,s} + \frac{h^2}{n^2}\,a_s\,\Delta_x\, v_{r,s} + \frac{h^2}{n^2}\,f_{r,s}\,, \tag{9}$$

$$\Delta_t\, v_{r,s+1} = \left(1 + b_s\,\frac{h}{n}\right)\Delta_t\, v_{r,s} + \frac{h}{n}\,a_s\,\Delta_x\, v_{r,s} + \frac{h}{n}\,f_{r,s}\,. \tag{10}$$

---

ziale (1) ed alla condizione iniziale $u(0\,,t) = u_0(t)$ per $-\infty < t < +\infty$. Per tale problema F. JOHN ha recentemente stabilito un teorema di esistenza nell'ipotesi che f, u_0 siano dotate di un numero finito di derivate, *On integration of parabolic equations by difference methods* « Pure and Applied Math. » vol. 5, 1952, pg. 155. In tale Memoria è anche studiato il problema del calcolo approssimato della soluzione col metodo delle differenze.

(5) Abbiamo indicato con $\left[\dfrac{s}{2}\right]$ il massimo numero intero minore o uguale di $\dfrac{s}{2}$.

Poniamo

$$\Delta_x^0 v_{r,s} = v_{r,s}\,,\ \ \Delta_x^i v_{r,s} = \Delta_x(\Delta_x^{i-1} v_{r,s})\,,\ \ \Delta_x^i \Delta_t v_{r,s} = \Delta_x^i(\Delta_t v_{r,s}) \quad \text{per} \quad i=1,2,\ldots.$$

Notiamo che $\Delta_x^i \Delta_t v_{r,s}$ non è definita in ogni punto di $A^{(n)}$ ma solo per quei punti $\left(\frac{r}{n^2}\,l\,,\ \frac{s}{n}\,h\right)$ per cui $s \leq n-1$, $r \leq n^2 - \left[\frac{s}{2}\right] - i$. Indicato con $A_{i,j}^{(n)}$, $j=0{,}1$ ed $i=0{,}1,\ldots$, l'insieme dei punti $\left(\frac{r}{n^2}\,l\,,\ \frac{s}{n}\,h\right)$ per cui $s \leq n-j$, $r \leq n^2 - \left[\frac{s}{2}\right] - \max[i\,,j]$ la funzione $\Delta_x^i \Delta_t^j v_{r,s}$ risulta definita in $A_{i,j}^{(n)}$. Applicando l'operatore Δ_x^i, $i=0{,}1,\ldots$, ad entrambi i membri della (9) e della (10) otteniamo

$$\Delta_x^i v_{r,s+2} = \Delta_x^i v_{r,s+1} + \frac{h}{n}\left(1 + b_s\frac{h}{n}\right)\Delta_x^i \Delta_t v_{r,s} + \frac{h^2}{n^2}\,a_s\,\Delta_x^{i+1} v_{r,s} + \frac{h^2}{n^2}\,\Delta_x^i f_{r,s}\,, \tag{11}$$

$$\Delta_x^i \Delta_t v_{r,s+1} = \left(1 + b_s\frac{h}{n}\right)\Delta_x^i \Delta_t v_{r,s} + \frac{h}{n}\,a_s\,\Delta_x^{i+1} v_{r,s} + \frac{h}{n}\,\Delta_x^i f_{r,s}\,. \tag{12}$$

Poniamo

$$\alpha = \max_{[0,h]} |\,a(t)\,|\,,\qquad \beta = \max_{[0,h]} |\,b(t)\,|\,, \tag{13}$$

$$\gamma^{(i)} = \max\{|\,\Delta_x^i f_{r,s}\,| \text{ in } A_{i,0}^{(n)}\}\,,\qquad i=0\,,1\,,\ldots, \tag{14}$$

$$\eta_s^{(i)} = \max\{|\,\Delta_x^i v_{r,s}\,| \text{ in } A_{i,0}^{(n)}\}\,,\qquad i=0\,,1\,,\ldots, \tag{15}$$

$$\vartheta_s^{(i)} = \max\{|\,\Delta_x^i \Delta_t v_{r,s}\,| \text{ in } A_{i,1}^{(n)}\}\,,\qquad i=0\,,1\,,\ldots. \tag{16}$$

Dalla (11) segue

$$\eta_{s+2}^{(i)} - \eta_{s+1}^{(i)} \leq \frac{h}{n}\left(1 + \frac{\beta h}{n}\right)\vartheta_s^{(i)} + \frac{\alpha h^2}{n^2}\,\eta_s^{(i+1)} + \frac{h^2}{n^2}\,\gamma^{(i)},\quad s=0{,}1,\ldots,n-2, \tag{17}$$

e dalla (12)

$$\vartheta_{s+1}^{(i)} - \left(1 + \frac{\beta h}{n}\right)\vartheta_s^{(i)} \leq \frac{\alpha h}{n}\,\eta_s^{(i+1)} + \frac{h}{n}\,\gamma^{(i)}\,,\quad s=0\,,1\,,\ldots,n-1\,; \tag{18}$$

inoltre è per la (7)

$$\eta_1^{(i)} \leq \eta_0^{(i)} + \frac{h}{n}\,\vartheta_0^{(i)}\,. \tag{19}$$

Essendo identicamente

$$\eta_{s+2}^{(i)} \equiv \sum_{m=0}^{s}(\eta_{m+2}^{(i)} - \eta_{m+1}^{(i)}) + \eta_1^{(i)}\,,$$

per la (17) otteniamo

$$\eta_{s+2}^{(i)} \leq \eta_1^{(i)} + \frac{h}{n}\left(1+\frac{\beta h}{n}\right)\sum_{m=0}^{s}\vartheta_m^{(i)} + \frac{h^2}{n^2}(s+1)\gamma^{(i)} + \frac{\alpha h^2}{n^2}\sum_{m=0}^{s}\eta_m^{(i+1)} . \tag{20}$$

Essendo identicamente

$$\vartheta_{s+1}^{(i)} \equiv \sum_{\mu=0}^{s}\left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{s-\mu}\left[\vartheta_{\mu+1}^{(i)} - \left(1+\frac{\beta h}{n}\right)\vartheta_\mu^{(i)}\right] + \left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{s+1}\vartheta_0^{(i)} ,$$

per la (18) otteniamo

$$\vartheta_{s+1}^{(i)} \leq \left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{s+1}\vartheta_0^{(i)} + \frac{h}{n}\gamma^{(i)}\sum_{\mu=0}^{s}\left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{s-\mu} + \frac{\alpha h}{n}\sum_{\mu=0}^{s}\left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{s-\mu}\eta_\mu^{(i+1)}. \tag{21}$$

Sostituendo nella (20) a $\vartheta_m^{(i)}$ il secondo membro della (21), ove si è posto $s+1=m$, tenuto conto della (19) otteniamo

$$\begin{aligned}\eta_{s+2}^{(i)} < \eta_0^{(i)} + \frac{h}{n}\vartheta_0^{(i)}\sum_{m=0}^{s+1}\left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^m + \frac{h^2}{n^2}\gamma^{(i)}\sum_{m=0}^{s}\sum_{\mu=0}^{m}\left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{m-\mu} + \\ + \frac{\alpha h^2}{n^2}\sum_{m=0}^{s}\sum_{\mu=0}^{m}\left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{m-\mu}\eta_\mu^{(i+1)} .\end{aligned} \tag{22}$$

Posto

$$\Omega^{(i)} = \eta_0^{(i)} + h\, e^{\beta h}\left(\vartheta_0^{(i)} + h\,\gamma^{(i)}\right), \qquad i=0,1,\ldots, \tag{23}$$

essendo $m \leq n$ e quindi

$$\left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{m-\mu} < \left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{n} < e^{\beta h}, \tag{24}$$

si ha per la (22)

$$\eta_{s+2}^{(i)} < \Omega^{(i)} + \frac{\alpha h^2}{n^2}\sum_{m=0}^{s}\sum_{\mu=0}^{m}\left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{m-\mu}\eta_\mu^{(i+1)} , \qquad i=0,1,\ldots . \tag{25}$$

Sostituendo a $\eta_0^{(i+1)}$, $\eta_1^{(i+1)}$ la quantità $\Omega^{(i+1)}$, che per la (19), (23) è maggiore, e a $\eta_\mu^{(i+1)}$, $\mu=2,3,\ldots,s$, l'espressione maggiorante fornita dalla (25) stessa, tenuto conto che

$$\sum_{\mu_1=2}^{s}\sum_{\mu_2=2}^{\mu_1}\sum_{\mu_3=0}^{\mu_2-2}\sum_{\mu_4=0}^{\mu_3} 1 = \sum_{\mu_1=0}^{s-2}\sum_{\mu_2=0}^{\mu_1}\sum_{\mu_3=0}^{\mu_2}\sum_{\mu_4=0}^{\mu_3} 1 ,$$

si ottiene

$$\eta_{s+2}^{(i)} < \Omega^{(i)} + \frac{\alpha h^2}{n^2}\,\Omega^{(i+1)} \sum_{\mu_1=0}^{s} \sum_{\mu_2=0}^{\mu_1} \left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{\mu_1-\mu_2} +$$

$$+ \frac{\alpha^2 h^4}{n^4} \sum_{\mu_1=0}^{s-2} \sum_{\mu_2=0}^{\mu_1} \sum_{\mu_3=0}^{\mu_2} \sum_{\mu_4=0}^{\mu_3} \left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{\mu_1-\mu_2+\mu_3-\mu_4} \eta_{\mu_4}^{(i+2)}.$$

Sostituendo a $\eta_0^{(i+2)}$, $\eta_1^{(i+2)}$ la quantità maggiore $\Omega^{(i+2)}$ e a $\eta_{\mu_4}^{(i+2)}$, $\mu_4 = 2, 3, \ldots, s-2$, l'espressione maggiorante fornita dalla (25) stessa, si consegue una nuova maggiorazione per $\eta_{s+2}^{(i)}$ e con tale procedimento ripetuto $\left[\frac{s+2}{2}\right]$ volte si ottiene

$$\eta_{s+2}^{(i)} < \Omega^{(i)} + \sum_{m=1}^{\left[\frac{s+2}{2}\right]} \left(\frac{\alpha h^2}{n^2}\right)^m \Omega^{(i+m)} \sum_{\mu_1=0}^{s+2-2m} \sum_{\mu_2=0}^{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_{2m}=0}^{\mu_{2m-1}} \left(1+\frac{\beta h}{n}\right)^{\mu_1-\mu_2+\ldots-\mu_{2m}}.$$

Essendo

$$\sum_{\mu_1=0}^{s+2-2m} \sum_{\mu_2=0}^{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_{2m}=0}^{\mu_{2m+1}} 1 = \frac{(s+3-2m)(s+4-2m)\ldots(s+2)}{(2m)!} < \frac{(s+2)^{2m}}{(2m)!},$$

tenuto conto della (23), si ha

$$\eta_{s+2}^{(i)} < e^{\beta h} \sum_{m=0}^{\left[\frac{s+2}{2}\right]} \left(\frac{\alpha h^2}{n^2}\right)^m \frac{(s+2)^{2m}}{(2m)!}\,\Omega^{(i+m)}. \tag{26}$$

Per le (14), (15), (16) e la (3) e la (7) è

$$\eta_0^{(i)},\ \vartheta_0^{(i)},\ \gamma^{(i)} < M\,\frac{(2i)!}{\varrho^i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, \tag{27}$$

e quindi per la (23)

$$\Omega^{(i)} < M(1 + h e^{\beta h} + h^2 e^{\beta h})\,\frac{(2i)!}{\varrho^i}.$$

Dalla (26) allora segue

$$\eta_{s+2}^{(i)} < M e^{\beta h}(1 + h e^{\beta h} + h^2 e^{\beta h}) \sum_{m=0}^{\left[\frac{s+2}{2}\right]} \left(\frac{\alpha h^2}{n^2}\right)^m \frac{(s+2)^{2m}}{(2m)!}\,\frac{(2i+2m)!}{\varrho^{i+m}}.$$

Tenuto conto che

$$(2i+2m)! < (2i)!\,(2m)!\,e^{2i+2m}\ \text{[6]},$$

---

[6] Cfr. C. PUCCI, *Il problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali* « Ann. Mat. pura e appl. » IV, 35, 1953, pag. 130.

posto

$$L = M\, e^{\beta h} (1 + h\, e^{\beta h} + h^2\, e^{\beta h}) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha\, h^2\, e^2}{\varrho}\right)^m \tag{28}$$

risultando convergente la serie del secondo membro per la definizione di ϱ, si ha infine

$$\eta_{s+2}^{(i)} < L\,(2\,i)!\left(\frac{e^2}{\varrho}\right)^i, \qquad i = 0, 1, \ldots \ \text{ed} \ \ s = 0, 1, \ldots n^2, \tag{29}$$

risultando tale maggiorazione indipendente dall'indice s e dal reticolo R_n prefissato.

Dalla (21) per la (24) e la (29) otteniamo

$$\vartheta_{s+1}^{(i)} < e^{\beta h}\left[\vartheta_0^{(i)} + h\,\gamma^{(i)} + \alpha\, h\, L\,(2\,i+2)!\left(\frac{e^2}{\varrho}\right)^{i+1}\right],$$

e per la (27)

$$\vartheta_{s+1}^{(i)} < e^{\beta h}(M + hM + \alpha h L)\,(2i+2)!\left(\frac{e^2}{\varrho}\right)^{i+1}, \ s = 0, 1, \ldots, n^2 \ \text{ed} \ \ i = 0, 1, \ldots. \tag{30}$$

Dalla (6) segue inoltre

$$|\, \Delta_x^i\, \Delta_t^2\, v_{r,s}\, | < \alpha\, \eta_s^{(i+1)} + \beta\, \vartheta_s^{(i)} + \gamma^{(i)}$$

e per le (29), (30), (27) è in $A_{i,2}^{(n)}$

$$|\Delta_x^i \Delta_t^2 v_{r,s}| < [\alpha\, L + \beta\, e^{\beta h}(M + h\, M + \alpha\, h\, L)]\,(2\,i+2)!\left(\frac{e^2}{\varrho}\right)^{i+1} + M\,\frac{(2\,i)!}{\varrho^i}. \tag{31}$$

Indichiamo con $u^{(n)}(x, t)$ la funzione definita in $A^{(n)}$ e che ivi coincide con la funzione $v_{r,s}$ testè definita. Per ogni valore dell'indice n risulta definito un insieme $A^{(n)}$ ed una funzione $u^{(n)}(x, t)$. Siccome le limitazioni (29), (30), (31) non dipendono dall'indice n esiste una costante k_i tale che

$$|\Delta_x^i \Delta_t^j u^{(n)}(x, t)| < k_i \ \text{in} \ A_{i,j}^{(n)} \ \text{per} \ i = 0, 1, \ldots, j = 0, 1, 2 \ \text{ed} \ n = 1, 2, \ldots. \tag{32}$$

Notiamo ora che la successione $\{A_{i,j}^{(n)}\}$ converge al rettangolo R comunque si fissino i numeri interi i, j (7). Infatti sia (x, t) un punto interno ad

(7) Per la definizione di limite inferiore, limite superiore e limite di una successione di insiemi cfr. C. Kuratowski *Topologie* Vol. I. Warszawa, 1948, pp. 241-245.

R; fissato un indice n esistono corrispondentemente due numeri naturali r_n, s_n tali che

$$\frac{r_n}{n^2}\, l \leq x < \frac{r_n + 1}{n^2}\, l, \qquad \frac{s_n}{n}\, h \leq t < \frac{s_n + 1}{n}\, h. \tag{33}$$

Essendo $0 < x < l$, $0 < t < l$ esiste un indice n_0 tale che per $n > n_0$ $s_n < n - j$, $r_n < n^2 - \left[\frac{s_n}{2}\right] - \max[i, j]$ e quindi il punto $y_n = \left(\frac{r_n}{n^2}\, l, \frac{s_n}{n}\, h\right)$ appartiene ad $A_{i,j}^{(n)}$. Per la (33) la successione $\{y_n\}$ converge al punto (x, t) ed essendo questo un generico punto interno ad R ne segue $R \subset \operatorname{Lim}'_{n\to\infty} A_{i,j}^{(n)}$. Essendo inoltre $A_{i,j}^{(n)} \subset R$ e quindi $\operatorname{Lim}''_{n\to\infty} A_{i,j}^{(n)} \subset R$ la successione $\{A_{i,j}^{(n)}\}$ converge ad R.

Per la (32) e per un teorema contenuto in una precedente Memoria ([8]), fissato un indice i, $i = 0, 1, \ldots$, le funzioni $\Delta_x^i \Delta_t^j u^{(n)}$, $j = 0, 1$ ed $n = 1, 2, \ldots$, sono pseudoequicontinue ciascuna riferita al corrispondente insieme di definizione $A_{i,j}^{(n)}$. Le funzioni $\Delta_t^2 u^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, essendo per la (6) somma di funzioni pseudoequicontinue sono esse pure pseudoequicontinue, riferita ciascuna al corrispondente insieme $A_{0,2}^{(n)}$. Per il teorema XVIII della Memoria già citata esiste una successione $\{\lambda_n\}$ di numeri naturali tale che, per $j = 0, 1$ ed $i = 0, 1, \ldots$ oppure $j = 2$, $i = 0$, la successione $\{\Delta_x^i \Delta_t^j u^{(\lambda_n)}\}$ biconverge in R ad una funzione continua $v_{i,j}(x, t)$, risultando inoltre

$$v_{i,1} = \frac{\partial v_{i,0}}{\partial t}, \quad v_{i,2} = \frac{\partial v_{i,1}}{\partial t}, \quad v_{i+1,j} = \frac{\partial v_{i,j}}{\partial x} \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \ldots \quad \text{ed} \quad j = 0, 1.$$

Posto quindi $u(x, t) = v_{0,0}(x, t)$ la funzione u ha in R continue le derivate parziali $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial t^j}$, $j = 0, 1$ ed $i = 0, 1, \ldots$, e $\{\Delta_x^i \Delta_t^j u^{(\lambda_n)}\}$ biconverge a $\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial t^j}$. Fissato quindi un numero positivo ε esistono corrispondentemente due numeri n_ε, δ_ε tali che per $n > n_\varepsilon$, $(x, t) \in R$, $(\xi, \vartheta) \in A_{i,j}^{(n)}$, $|x - \xi| + |t - \vartheta| < \delta_\varepsilon$ sia

$$\left| \frac{\partial^{i+j} u(x, t)}{\partial x^i \partial t^j} - \Delta_x^i \Delta_t^j u^{(\lambda_n)}(\xi, \vartheta) \right| < \varepsilon \text{ per } i, j = 0, 1 \text{ oppure } j = 2, i = 0 \tag{34}$$

([8]) C. PUCCI, *Compattezza di successioni di funzioni e derivabilità delle funzioni limiti.* « Ann. Mat. pura e appl. » IV, 36, 1953 Teorema XIX. In tale Memoria è data la definizione di funzioni pseudoequicontinue.

e perciò per la (6), essendo $u^{(\lambda_n)} \equiv v$,

$$\left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - b(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - f(x,t) \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - b(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - f(x,t) - \right.$$

$$\left. - [\Delta_t^2 u^{(\lambda_n)}(\xi,\vartheta) - a(\vartheta)\Delta_x u^{(\lambda_n)}(\xi,\vartheta) - b(\vartheta)\Delta_t u^{(\lambda_n)}(\xi,\vartheta) - f(\xi,\vartheta)] \right| <$$

$$< \varepsilon + |a(t) - a(\vartheta)|\,\varepsilon + |b(t) - b(\vartheta)|\,\varepsilon + |f(x,t) - f(\xi,\vartheta)|\,.$$

Per la continuità di $a(t)$, $b(t)$, $f(x,t)$ in R e per l'arbitrarietà di ε la funzione $u(x,t)$ è un integrale dell'equazione differenziale (1). Per la continuità di $u_0(x)$, $u_1(x)$ dalle (7), (34) segue che $u(x,t)$ soddisfa pure alle condizioni iniziali (2).

2. — Indichiamo ora un metodo di calcolo della soluzione del problema di CAUCHY considerato. Proviamo innanzi tutto che la successione $\{u^{(n)}(x,t)\}$ precedentemente costruita biconverge in R alla soluzione $u(x,t)$. Se ciò non fosse esisterebbe una successione $\{u^{(\mu_n)}(x,t)\}$, subordinata ad $\{u^{(n)}(x,t)\}$, che in un punto (x_0,t_0) di R biconverge ad un valore diverso da $u(x_0,t_0)$. Essendo le funzioni $u^{(n)}(x,t)$ pseudoequicontinue esiste una successione $\{u^{(s_n)}(x,t)\}$, subordinata a $\{u^{(\mu_n)}(x,t)\}$, biconvergente in R ad una funzione $v(x,t)$ (9). Per le stesse considerazioni precedentemente svolte relativamente ad $u(x,t)$ si prova che la funzione $v(x,t)$ è soluzione in R del problema di CAUCHY (1), (2). Tale problema allora ammetterebbe più di una soluzione essendo $u(x_0,t_0) \neq v(x_0,t_0)$ e ciò non può essere per un teorema di unicità di E. DE GIORGI (10).

Osserviamo ora che nella valutazione decimale dei valori assunti da $u^{(n)}(x,t)$ in $A^{(n)}$ si commette un errore $\varrho_n(x,t)$ dovuto al fatto che in ogni vertice del reticolo la funzione $u^{(n)}$ è numericamente calcolata con un certo ordine di approssimazione, ed esso sia dell'ordine di grandezza di $10^{-\mu_n}$, e che l'errore così commesso influisce sulla valutazione di $u^{(u)}$ in altri vertici. Vogliamo ora provare che fissato opportunamente μ_n in dipendenza di n, l'errore ϱ_n è infinitesimo per $n \to \infty$.

Fissato il reticolo R_n supponiamo che si commetta un errore nel calcolo di $u^{(n)}$ solamente sulla riga j-esima ed esso sia ε_r in $\left(\frac{r}{n^2}\,l\,,\ \frac{j}{n}\,h\right)$. Sic-

(9) Per il teorema XVIII della Memoria citata in (8).

(10) Tale teorema è contenuto in una Nota di prossima pubblicazione.

come il calco di $u^{(n)}$ nei vertici della riga $j+1$-esima per la (8) dipende dai valori assunti da $u^{(n)}$ sulla riga precedente, in luogo dei valori $u_{r,j+1}^{(n)}$ si ottengono nuovi valori $v_{r,j+1}^{(n)}$ che per la (8) sono così definiti, supposto $j \geq 1$,

$$v_{r,j+1}^{(n)} = 2\, u_{r,j}^{(n)} + 2\, \varepsilon_r - u_{r,j-1}^{(n)} + \frac{h^2}{l}\, a_{j-1} (u_{r+1,j-1}^{(n)} - u_{r,j-1}^{(n)}) + \tag{35}$$

$$+ \frac{h}{n}\, b_{j-1} (u_{r,j}^{(n)} + \varepsilon_r - u_{r,j-1}^{(n)}) + \frac{h^2}{n^2} f_{r,j-1} .$$

In tale modo nei vertici della riga s-esima, con $s > j$, si viene così a determinare una nuova funzione $v^{(n)}$ soluzione del problema alle differenze finite dato dalla (35) e dalle equazioni:

$$\Delta_t^2\, v_{r,s}^{(n)} = a_s\, \Delta_x\, v_{r,s}^{(n)} + b_s\, \Delta_t\, v_{r,s}^{(n)} + f_{r,s} ,$$

$$v_{r,j}^{(n)} = u_{r,j}^{(n)} + \varepsilon_r .$$

Posto

$$w_{r,s}^{(n)} = v_{r,s}^{(n)} - u_{r,s}^{(n)} ,$$

si ha

$$\Delta_t^2\, w_{r,s}^{(n)} = a_s\, \Delta_x\, w_{r,s}^{(n)} + b_s\, \Delta_t\, w_{r,s}^{(n)} ,$$

$$w_{r,j}^{(n)} = \varepsilon_r , \qquad w_{r,j+1}^{(n)} = 2\, \varepsilon_r + \frac{h}{n}\, b_{j-1}\, \varepsilon_r .$$

Le funzioni $w_{r,s}^{(n)}$, $\Delta_x^i\, w_{r,s}^{(n)}$, $\Delta_x^i\, \Delta_t\, w_{r,s}^{(n)}$, $\Delta_t^2\, w_{r,s}^{(n)}$ possono essere maggiorate con lo stesso procedimento seguito precedentemente per la funzione $v_{r,s}$ con l'unica differenza che in questo caso manca il termine $f_{r,s}$ e che la riga j-esima è la riga iniziale. Posto

$$\varepsilon = \max\, [|\, \varepsilon_1 \,| , |\, \varepsilon_2 \,| , \ldots , |\, \varepsilon_{n^2} \,|] ,$$

si ha

$$|\, \Delta_x^i\, \varepsilon_r \,| < \frac{n^{2i}}{l^i}\, \varepsilon \quad \text{per} \quad r = 0 , 1 , \ldots , n^2 .$$

Tenuto conto della (15) e della (23) la limitazione (25) si traduce allora nel nostro caso nella limitazione

$$|\, \Delta_x^i\, w_{r,s}^{(n)} \,| < e^{\beta h} \sum_{v=0}^{\left[\frac{s-j}{2}\right]} \left(\frac{\alpha\, h^2}{n^2} \right)^v \frac{(s-j)^{2v}}{(2\, v)!}\, [1 + e^{\beta h} (n + \beta\, h)]\, \frac{n^{2i+2v}}{l^{i+v}}\, \varepsilon <$$

$$< \varepsilon \frac{n^{2i}}{l^i} e^{\beta h} [1 + e^{\beta h}(n + \beta h)] \sum_{v=0}^{\left[\frac{s-j}{2}\right]} \left[\frac{\sqrt{\alpha}\, h}{\sqrt{l}}(s-j)\right]^{2v} \frac{1}{(2v)!},$$

$$(36) \qquad | \Delta_x^i w_{r,s}^{(n)} | < \varepsilon \frac{n^{2i}}{l^i} e^{\beta h} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{l}} hn} [1 + e^{\beta h}(n + \beta h)] \quad \text{in} \quad A_{i,0}^{(n)}.$$

La funzione $w_{r,s}^{(n)}$ rappresenta l'alterazione della funzione $u^{(n)}$ dovuta all'introduzione di un errore nella riga j-esima, con $j \geq 1$, e siccome si prova che anche per $j = 0$ si ottiene una funzione $w_{r,s}^{(n)}$ per la quale sussiste la (36), se nel calcolo di $u^{(n)}$ in ogni vertice di ogni riga si commette un errore inferiore ad ε, essendo n le righe l'errore ϱ_n complessivo commesso nel calcolo di $u_{r,s}^{(n)}$ risulta per la (36) così maggiorato

$$(37) \qquad | \varrho_n | < \varepsilon\, n\, e^{\beta h} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{l}} h n} [1 + e^{\beta h}(n + \beta h)].$$

Indicato inoltre con $\varrho_n^{(i)}$ l'errore relativo alla funzione $\Delta_x^i v^{(n)}$ per la (32) è

$$(38) \qquad | \varrho_n^{(i)} | < \varepsilon \frac{n^{2i+1}}{l^i} e^{\beta h} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{l}} h n} [1 + e^{\beta h}(n + \beta h)].$$

Supponiamo ad esempio di calcolare in ogni vertice del reticolo R_n la funzione $u^{(n)}$ fino alla n^2-esima cifra decimale ed indichiamo con $v^{(n)}$ la funzione che si ottiene in tal modo al posto della effettiva soluzione $u^{(n)}$. Per la (36) e la (37) si ha allora

$$(39) \qquad | u_{r,s}^{(n)} - v_{r,s}^{(n)} | < n\, 10^{-n^2} e^{\beta h} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{l}} h n} [1 + e^{\beta h}(n + \beta h)] \quad \text{in} \quad A^{(n)},$$

$$(40) \qquad | \Delta_x^i u_{r,s}^{(n)} - \Delta_x^i v_{r,s}^{(n)} | < \frac{n^{2i+1}}{l^{2i}} 10^{-n^2} e^{\beta h} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{l}} h n} [1 + e^{\beta h}(n + \beta h)] \quad \text{in} \quad A_{i,0}^{(n)}.$$

La biconvergenza in R della successione $\{u^{(n)}\}$ ad u comporta per la (39) che anche la successione $\{v^{(n)}\}$ è binconvergente in R ad u. Analogamente per la (40) risulta biconvergente la successione $\{\Delta_x^i v^{(n)}\}$ a $\frac{\partial^i u}{\partial x^i}$. In modo pure analogo si può provare la biconvergenza in R delle successioni $\{\Delta_t v^{(n)}\}$, $\{\Delta_t^2 v^{(n)}\}$ rispettivamente a $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Si è quindi provato che la costruzione delle funzioni $v^{(n)}$ permette il calcolo approssimato della soluzione u del problema di CAUCHY (1), (2) e delle derivate parziali di u.