

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

TULLIO VIOLA

**Limitazioni per i momenti del quart'ordine d'una funzione, definita  
nello spazio euclideo ad  $n$  dimensioni ed ivi limitata**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 7,  
n° 1-2 (1953), p. 79-89*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1953\\_3\\_7\\_1-2\\_79\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_1-2_79_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LIMITAZIONI PER I MOMENTI DEL QUART'ORDINE D'UNA FUNZIONE, DEFINITA NELLO SPAZIO EUCLIDEO AD $n$ DIMENSIONI ED IVI LIMITATA <sup>(1)</sup>

DI TULLIO VIOLA (a Roma)

La presente ricerca si ricollega ai lavori che, sul problema dei momenti, furono pubblicati da A. GHIZZETTI, riprendendone un concetto fondamentale e studiandone una prima possibile generalizzazione. Nella memoria: « *Ricerche sui momenti di una funzione limitata compresa fra limiti assegnati* » <sup>(2)</sup>, l'Autore citato ha completamente risolto il problema di determinare entro quali estremi può variare il  $k$ -esimo momento di una funzione  $f(x)$ , definita sull'asse reale ed ivi limitata <sup>(3)</sup>, quando sono assegnati i suoi  $k - 1$  momenti precedenti. Nella nota: « *Sui momenti di 2° ordine di una legge di probabilità in  $n$  dimensioni* » <sup>(4)</sup>, l'Autore ha dato condizioni necessarie e sufficienti affinché, assegnati  $\frac{n(n+1)}{2}$  numeri reali  $m_{jk}$ , essi siano i momenti di second'ordine d'una funzione  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , definita nello spazio euclideo  $S_n$  ad  $n$  dimensioni, ivi non negativa e limitata <sup>(5)</sup>.

Una generalizzazione della ricerca del GHIZZETTI nel senso più completo del termine, e cioè diretta allo scopo d'ottenere condizioni necessarie e sufficienti affinché, assegnati  $\binom{n+k-1}{k}$  numeri reali (qualunque sia l'in-

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

<sup>(2)</sup> Atti della R. Accademia d'Italia, Memorie vol. XIII, 13, 1943, pp. 1165-1200.

<sup>(3)</sup> Più precisamente l'Autore suppone  $f(x)$  quasi continua, non negativa ed assumente, su quasi tutto l'asse reale, valori compresi fra 0 ed 1.

<sup>(4)</sup> Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, Serie V, vol. IV fasc. 21, 1943, pp. 94-101.

<sup>(5)</sup> Seguendo i principi della nota citata, la  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  viene da noi sempre concepita come densità d'una certa distribuzione positiva di masse (o probabilità), densità che, a prescindere da un eventuale insieme di misura nulla (nell' $S_n$ , con  $n$  arbitrario e  $> 1$ ), si suppone possedere estremo superiore  $L > 0$  finito.

tero  $k > 2$ ), essi siano i momenti d'ordine  $k$  d'una funzione  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , del tipo indicato e della quale si suppongano assegnati tutti i momenti d'ordine inferiore, sembra celare grandi difficoltà sia concettuali che algoritmiche. Nella presente ricerca ci limitiamo ad una generalizzazione in senso ristretto, ci limitiamo cioè a trovare delle condizioni *necessarie* relativamente ai momenti del quart'ordine (caso  $k = 4$ ) nell'ipotesi di conoscere soltanto quelli del second'ordine (naturalmente soddisfacenti alle condizioni date dal GHIZZETTI)<sup>(6)</sup>. Questa generalizzazione potrebbe estendersi, senza nessuna difficoltà concettuale, ai momenti d'ordine pari superiore al quarto, tuttavia a prezzo di non indifferenti complicazioni algoritmiche<sup>(7)</sup>.

1. — Si è supposto che, in quasi tutto  $S_n$ , sia

$$0 \leq f \leq L.$$

Supporremo inoltre che la  $f$  sia quasi continua ed abbia finiti tutti i momenti, fino a quelli del quart'ordine incluso. In particolare, dunque, supporremo finita la massa totale

$$m_0 = \int_{S_n} f d\tau > 0.$$

Quanto ai momenti del prim'ordine, non v'è nulla di restrittivo nel supporli tutti nulli, nel supporre cioè che sia

$$\int_{S_n} x_i f d\tau = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ciò riducendosi ovviamente a collocare l'origine degli assi cartesiani nel baricentro della distribuzione<sup>(8)</sup>.

Indichiamo con

$$m_{ik} = \int_{S_n} x_i x_k f d\tau \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

<sup>(6)</sup> Si può dimostrare che, nel caso  $k = 3$ , non v'è alcuna condizione restrittiva nel senso indicato: verosimilmente la stessa cosa deve accadere per ogni valore dispari di  $k$ .

<sup>(7)</sup> Queste complicazioni ci sono sembrate tali da rendere dubbia l'utilità d'affrontarle, prima d'essersi accertati del fatto (problematico, ma pur molto verosimile) che le condizioni necessarie da noi trovate, siano anche sufficienti.

<sup>(8)</sup> Cfr. la nota <sup>(5)</sup>.

gli  $\binom{n+1}{2}$  momenti del second'ordine, con

$$m_{ijk} = \int_{S_n} x_i x_j x_h x_k f d\tau \quad (i, j, h, k = 1, 2, \dots, n)$$

gli  $\binom{n+3}{4}$  momenti del quart'ordine<sup>(9)</sup>. Consideriamo una generica forma quadratica definita positiva

$$\sum_{i, k}^{1, n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

e, fissata una qualunque costante positiva  $R^2$ , il dominio limitato  $E$  la cui frontiera è costituita dall'iperellissoide reale di equazione

$$(1) \quad \sum_{i, k}^{1, n} a_{ik} x_i x_k = R^2.$$

La funzione

$$f^* = f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} L, & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ cade in } E, \\ 0, & \text{se } \gg \gg \gg \gg \text{ fuori di } E, \end{cases}$$

gode di proprietà analoghe a quelle della funzione  $f$ : per essa, indichiamo con

$$m_0^* = \int_{S_n} f^* d\tau = L \int_E d\tau$$

la massa totale, con

$$m_{ik}^* = \int_{S_n} x_i x_k f^* d\tau = L \int_E x_i x_k d\tau \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

i momenti del second'ordine, con

$$m_{ijk}^* = \int_{S_n} x_i x_j x_h x_k f^* d\tau = L \int_E x_i x_j x_h x_k d\tau \\ (i, j, h, k = 1, 2, \dots, n)$$

---

(9) Si osservi che ciascuno dei momenti  $m_{ik}^*$ ,  $m_{ijk}^*$  è simmetrico rispetto al complesso di indici che lo distinguono.



$$m_{ijk}^* = \begin{cases} L \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{4 \Gamma\left(\frac{n}{2} + 3\right)} R^{n+4}, & \text{se } i=j, h=k, \text{ ma } i \neq h, \\ L \frac{3 \pi^{\frac{n}{2}}}{4 \Gamma\left(\frac{n}{2} + 3\right)} R^{n+4}, & \text{» } i=j=h=k, \\ 0 & \text{, in ogni altro caso,} \end{cases}$$

ove  $\Gamma$  è la nota funzione euleriana di seconda specie. Le trasformazioni inverse permettono di generalizzare queste formule nelle seguenti, relative appunto all'iperellissoide  $E$ :

$$(2) \quad m_0^* = L \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \frac{R^n}{\sqrt{A}},$$

$$(3) \quad m_{ik}^* = L \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2 \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right)} \frac{A_{ik} R^{n+2}}{A \sqrt{A}},$$

$$(4) \quad m_{ijk}^* = L \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{4 \Gamma\left(\frac{n}{2} + 3\right)} \frac{A_{ij} A_{hk} + A_{ih} A_{jk} + A_{ik} A_{jh}}{A^2 \sqrt{A}} R^{n+4},$$

nelle quali si sono indicati: con  $A$  il discriminante della forma quadratica considerata, con  $A_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) il complemento algebrico di  $a_{ik}$  in  $A$  <sup>(1)</sup>.

2. — Consideriamo ora una seconda forma quadratica

$$\sum_{i, k}^{1, n} b_{ik} x_i x_k \quad (b_{ik} = b_{ki})$$

---

<sup>(1)</sup> Le formule (2), (3) si ritrovano nella citata nota del GHIZZETTI.

del tutto arbitraria, purchè semidefinita positiva o identicamente nulla. È immediato che l'integrale

$$(5) \quad \int_{S_n} \left( \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} x_i x_k - R^2 \right) \left( \sum_{i,k}^{1,n} b_{ik} x_i x_k + 1 \right) (f - f^*) d\tau$$

è non negativo<sup>(12)</sup>, annullandosi se e solo se  $f$  coincide con  $f^*$  in quasi tutto  $S_n$ . Orbene, se noi conveniamo di disporre degli  $\binom{n+1}{2}$  rapporti  $\frac{a_{ik}}{R^2}$ , per ottenere che gli  $\binom{n+1}{2}$  momenti del second'ordine della funzione  $f^*$  coincidano con gli omologhi della funzione  $f$ , per ottenere cioè che sia

$$(6) \quad m_{ik}^* = m_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n; i \leq k),$$

l'integrale (5), opportunamente sviluppato ed ordinato, diverrà un certo polinomio lineare nei coefficienti  $b_{ik}$ , onde risulterà una limitazione del tipo:

$$(7) \quad \sum_{i,k}^{1,n} b_{ik} \varphi_{ik} + P \geq 0,$$

nella quale  $P$  sarà indipendente dai detti coefficienti e i  $\varphi_{ik}$  saranno certi polinomi lineari ed omogenei negli incrementi  $m_{ijhk} - m_{ijhk}^*$ , cioè negli incrementi che i momenti del quart'ordine subiscono, quando si passa dalla funzione  $f^*$  alla funzione  $f$ . E dappima si ha subito:

$$\varphi_{ik} = \sum_{j,h}^{1,n} a_{jh} (m_{ijhk} - m_{ijhk}^*),$$

$$P = R^2 (m_0^* - m_0).$$

Per ottenere, come s'è detto, le (6), basta risolvere rispetto alle  $a_{ik}$  (considerate come incognite) il sistema d'equazioni che s'ottengono uguagliando ad  $m_{ik}$  i secondi membri delle (3) (per  $i, k = 1, 2, \dots, n; i \leq k$ ). Una tale risoluzione si fa agevolmente ricorrendo ai reciproci  $m'_{ik}$  dei singoli elementi  $m_{ik}$  nel determinante  $M = ||m_{ik}||$ . Si trovano così anzitutto

---

<sup>(12)</sup> Infatti la funzione integranda è non negativa in quasi tutto  $S_n$ .

le espressioni :

$$a_{ik} = L \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2 \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right)} \frac{R^{n+2}}{\sqrt{A}} m'_{ik},$$

dalle quali si deduce ovviamente il calcolo del determinante  $A$ , cioè :

$$A = \left[ L \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2 \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right)} \right]^{\frac{2n}{n+2}} \frac{R^{2n}}{M^{\frac{2}{n+2}}}.$$

Introducendo questo valore nella (2), si trova :

$$(8) \quad m_0^* = L^{\frac{2}{n+2}} \frac{(n+2) \pi^{\frac{n}{n+2}} M^{\frac{1}{n+2}}}{\left[ 2 \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right) \right]^{\frac{2}{n+2}}},$$

quantità che, come facilmente si riconosce, giova assumere come parametro onde semplificare e snellire tutti i calcoli. Infatti, così facendo, si trovano in definitiva le espressioni seguenti particolarmente semplici :

$$a_{ik} = \frac{R^2}{n+2} m_0^* m'_{ik}, \quad A = \frac{R^{2n}}{(n+2)^n} \frac{m_0^{*n}}{M},$$

$$A_{ik} = \left( \frac{m_0^* R^2}{n+2} \right)^{n-1} \frac{m_{ik}}{M}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n; i \leq k).$$

Sostituendo i valori, così trovati, di  $A$  e degli  $A_{ik}$  nei secondi membri delle (4), si hanno poi le espressioni :

$$m_{ijk}^* = \frac{n+2}{(n+4) m_0^*} (m_{ij} m_{hk} + m_{ih} m_{jk} + m_{ik} m_{jh}).$$

Infine, dopo alcune semplici riduzioni e dopo moltiplicazione di tutta la (7) per il fattore inessenziale  $\frac{n+2}{R^2 m_0^*}$ , le espressioni  $\varphi_{ik}$  e  $P$  della (7), al-



terate secondo tale fattore, diventano :

$$(9) \quad \varphi_{ik} = \sum_{j,h}^{1,n} m'_{jh} m_{ijhk} - \frac{(n+2)^2}{(n+4)m_0^*} m_{ik}$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n; i \leq k),$$

$$(10) \quad P = (n+2) \frac{m_0^* - m_0}{m_0^*}.$$

3. — La (7) esprime ovviamente una proprietà dei momenti del quart'ordine  $m_{ijhk}$ , quando della  $f$  si suppongano assegnati i momenti del second'ordine  $m_{ik}$ . Da essa dedurremo ora *le cercate limitazioni necessarie a cui devono soddisfare i momenti del quart'ordine  $m_{ijhk}$* , e vedremo che esse *si possono semplicemente esprimere dicendo che la forma quadratica*

$$\sum_{i,k}^{1,n} \varphi_{ik} \lambda_i \lambda_k,$$

*nelle variabili  $\lambda_i$ , è semidefinita positiva o identicamente nulla.* Tale risultato, scopo essenziale di questa nostra ricerca, si dovrà considerare quale immediata conseguenza del teorema che ora ci proponiamo di dimostrare.

**TEOREMA.** — *Affinchè sia soddisfatta la limitazione*

$$(7) \quad \sum_{i,k}^{1,n} b_{ik} \varphi_{ik} + P \geq 0,$$

*nella quale i coefficienti  $\varphi_{ik}$  sono dati dalle (9),  $P$  dalla (10) ed  $m_0^*$  dalla (8), e nella quale i numeri  $b_{ik}$  s'intendano variabili liberamente, con la sola condizione che la forma quadratica*

$$(11) \quad \sum_{i,k}^{1,n} b_{ik} x_i x_k$$

*sia semidefinita positiva o identicamente nulla, è necessario e sufficiente che la forma quadratica*

$$(12) \quad \sum_{i,k}^{1,n} \varphi_{ik} \lambda_i \lambda_k,$$

*nelle variabili  $\lambda_i$ , risulti semidefinita positiva o identicamente nulla.*

DIMOSTRAZIONE. — Cominciamo col dimostrare che è  $P \geq 0$ , cioè  $m_0^* \geq m_0$ . All'uopo applichiamo alla distribuzione ausiliaria, di densità

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f}{m_0},$$

quanto è stato dimostrato da GHIZZETTI, alle pp. 94-95 della nota citata. Tale applicazione è resa possibile dal fatto che si ha

$$\int_{S_n} \varphi d\tau = \frac{1}{m_0} \int_{S_n} f d\tau = 1.$$

Indicando con

$$m_{ik}(\varphi) = \int_{S_n} x_i x_k \varphi d\tau = \frac{m_{ik}}{m_0}$$

i momenti del second'ordine della  $\varphi$ , e tenendo conto che è

$$0 \leq \varphi \leq \frac{L}{m_0}$$

in quasi tutto  $S_n$ , si avrà, in virtù del teorema I di GHIZZETTI,

$$M(\varphi) = \|m_{ik}(\varphi)\| \geq \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)\right]^2}{(n+2)^n \pi^n} \frac{m_0^2}{L^2},$$

e quindi

$$M = \|m_{ik}\| = M(\varphi) m_0^n \geq \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)\right]^2}{(n+2)^n \pi^n} \frac{m_0^{n+2}}{L^2}.$$

Così, in virtù dello stesso teorema, si avrà

$$M^* = \|m_{ik}^*\| = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)\right]^2}{(n+2)^n \pi^n} \frac{m_0^{*n+2}}{L^2}.$$

Ma dalle (6) si deduce  $M^* = M$ , dunque  $m_0^* \geq m_0$ , valendo il segno di uguaglianza se e solo se  $f \equiv f^*$ .

Ciò premesso, osserviamo (cfr. n. 2) che nella (7) vale il segno d'uguaglianza, anche soltanto per una scelta particolare dei  $b_{ik}$ , se e solo se

$f \equiv f^*$ , cioè se e solo se la massa è distribuita uniformemente, con densità  $L$ , nel dominio limitato la cui frontiera è l'iperellissoide di equazione

$$\sum_{i, k}^{1, n} m'_{ik} x_i x_k = \frac{n+2}{m_0^*}$$

(Cfr. con la formula (4) della nota citata del GHIZZETTI, ove però è supposto  $m_0^* = 1$ ). Sappiamo, dal teorema I del GHIZZETTI, che ciò accade sempre e solo quando  $P = 0$ , in tal caso è  $\varphi_{ik} = 0$ , la (7) vale col segno d'uguaglianza per qualunque scelta dei  $b_{ik}$  e la (12) è identicamente nulla.

Inversamente, se la (12) è identicamente nulla, la (7) si riduce alla limitazione  $P \geq 0$  già dimostrata (con l'ulteriore precisazione che, se  $P = 0$ , allora  $f \equiv f^*$ ).

Rimane da considerare il caso in cui, essendo  $P > 0$ , la (7) venga sostituita dalla limitazione ristretta

$$(13) \quad \sum_{i, k}^{1, n} b_{ik} \varphi_{ik} + P > 0,$$

qualunque sia la scelta dei  $b_{ik}$  del tipo indicato. Mostriamo intanto che, affinchè ciò accada, è condizione necessaria e sufficiente che, per tali  $b_{ik}$ , sussista la limitazione

$$(14) \quad \sum_{i, k}^{1, n} b_{ik} \varphi_{ik} \geq 0.$$

Infatti la (14) è evidentemente sufficiente alla validità della (13). Ma essa è anche necessaria perchè, se esistessero certi numeri  $\bar{b}_{ik}$  tali che

$$\sum_{i, k}^{1, n} \bar{b}_{ik} \varphi_{ik} < 0,$$

sarebbe sempre possibile trovare un coefficiente positivo  $p$  tale che

$$\sum_{i, k}^{1, n} (p \bar{b}_{ik}) \varphi_{ik} \leq -P.$$

Infine la (14) può essere facilmente trasformata nella tesi del teorema. Intanto la (14) dovrà, in particolare, valere quando, fissati ad arbitrio  $n$  numeri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , non tutti nulli, si scelga

$$b_{ik} = \lambda_i \lambda_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

scelta che è legittima poichè si ha subito

$$\sum_{i,k}^{1,n} b_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k}^{1,n} \lambda_i \lambda_k x_i x_k = \left( \sum_i^{1,n} \lambda_i x_i \right)^2 \geq 0.$$

Ma, con tale scelta, la (14) coincide senz'altro con la limitazione voluta

$$\sum_{i,k}^{1,n} \varphi_{ik} \lambda_i \lambda_k \geq 0.$$

Inversamente, se i numeri  $b_{ik}$  sono comunque fissati in modo che la forma (11) sia semidefinita positiva o identicamente nulla, dall'ipotesi che tale sia anche la forma (12), risulta, in virtù d'un noto lemma d'algebra<sup>(13)</sup>, soddisfatta la limitazione (14).

Il teorema è così completamente dimostrato.

---

<sup>(13)</sup> Il lemma, nella sua enunciazione originaria, risale a TH. MOUTARD, *Notes sur les équations aux dérivées partielles* (Journal de l'École Polytechnique, vol. 64, 1894, p. 58). Qui il lemma viene applicato nella forma, un po' diversa, in cui trovasi enunciato e dimostrato da M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore* (Napoli, Rondinella 1940 p. 695).