

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

SANDRO FAEDO

**Un nuovo problema di stabilità per le equazioni  
algebriche a coefficienti reali**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 7,*  
n° 1-2 (1953), p. 53-63

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1953\\_3\\_7\\_1-2\\_53\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_1-2_53_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UN NUOVO PROBLEMA DI STABILITÀ PER LE EQUAZIONI ALGEBRICHE A COEFFICIENTI REALI

di SANDRO FAEDO (Pisa)

1. — Sia dato un polinomio a coefficienti reali di grado  $n$

$$(1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n.$$

È nota l'importanza per le applicazioni meccaniche di avere criteri atti a decidere se gli zeri di  $f(z)$  abbiano o no tutti la parte reale negativa; a ciò rispondono esaurientemente i classici teoremi di HURWITZ e di ROUTH <sup>(1)</sup>.

Se gli zeri di  $f(z)$  hanno tutti parte reale negativa diremo brevemente che  $f(z)$  è *stabile*; terminologia questa che è giustificata dal significato meccanico.

Nella applicazione che si fa dei suddetti classici teoremi a problemi concreti di meccanica vibratoria si presenta la difficoltà che i coefficienti del polinomio  $f(z)$  che si considera sono in generale affetti da errori, potendo dipendere tali coefficienti da dati sperimentali che si possono valutare solo in via approssimata. Pertanto se accanto al polinomio  $f(z)$  che si prende in esame potessimo considerare quello  $f^*(z)$  i cui coefficienti sono privi di errori (e che traduce fedelmente il fenomeno che si studia) non è detto che la stabilità di  $f(z)$  trascini quella di  $f^*(z)$  e viceversa.

In altri problemi i coefficienti del polinomio  $f(z)$  di cui si cerca la stabilità sono per loro natura variabili in intervalli noti. Tipico esempio è il problema della stabilità di un aereo, che dipende da una equazione algebr-

---

(1) Per una esposizione sistematica dell'argomento si veda ad es. M. PICONE, « *Lezioni di algebra* », Ed. Tumminelli, Roma, 1947-48, pag. 347. Per una semplice dimostrazione dei teoremi di ROUTH e HURWITZ cfr. G. FICHERA, « *Alcune osservazioni sulle condizioni di stabilità per le equazioni algebriche a coefficienti reali* », Boll. U. M. I., pag. 103-109.

ca i cui coefficienti sono funzioni, fra l'altro, del peso dell'aereo, peso che è variabile in volo col consumo del carburante.

Queste considerazioni mi hanno indotto a pormi il seguente problema di stabilità per il polinomio  $f(z)$ :

« Sono assegnati i numeri reali

$$\underline{a}_i \leq \bar{a}_i \quad (i = 0, 1, \dots, n);$$

si cercano condizioni sufficienti ad assicurare che ogni polinomio  $f(z)$ , i cui coefficienti  $a_i$  verificano le limitazioni

$$(2) \quad \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

abbia tutti gli zeri con parte reale negativa ».

Se ogni polinomio (1) i cui coefficienti verificano le (2) ha tutti gli zeri con parte reale negativa, diremo brevemente che ogni  $f(z)$  verificante le (2) è stabile.

Qualora sia

$$(3) \quad \underline{a}_i = \bar{a}_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

il problema posto si riduce a quello classico concernente un solo polinomio  $f(z)$ , problema che, come si è detto, è risolto dai teoremi equivalenti di ROUTH e HURWITZ.

La condizione necessaria e sufficiente per la stabilità di  $f(z)$  espressa da tali teoremi è che  $n$  opportuni polinomi  $P_r$  di grado  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) nelle  $n + 1$  variabili

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

siano positivi, quando queste variabili coincidano ordinatamente con i coefficienti di  $f(z)$ .

La via che si presenta naturale per la risoluzione del nostro problema sarebbe di considerare il minimo di  $P_r$  nel dominio rettangolare  $D$  definito dalle disuguaglianze (2) e di imporre che tale minimo risulti positivo per  $r = 1, 2, \dots, n$ .

Le condizioni necessarie e sufficienti che così si otterrebbero sono assai complesse e difficili da esprimersi e da verificarsi; ciò ben si comprende ove si rifletta che, nel problema generale che si è posto, il dominio rettangolare  $D$  è in una posizione del tutto arbitraria e che il minimo di  $P_r$  può risultare interno oppure sulla frontiera di  $D$ . Ciò porta alla distinzione di vari casi più o meno complessi.

D'altra parte il nostro problema, anche se può avere interesse dal punto di vista puramente matematico come generalizzazione di quello di HURWITZ, ha la sua vera ragione di essere nel rispondere alle questioni tecniche che si sono già accennate, cioè di decidere la stabilità di un polinomio  $f(z)$  i cui coefficienti non sono del tutto determinati. A tal fine la Tecnica richiede dei criteri di stabilità la cui verifica non presenti difficoltà di calcolo numerico troppo elevate, l'ordine di grandezza di tali difficoltà essendo naturalmente offerto dai criteri di HURWITZ e ROUTH.

In questa nota viene stabilito un criterio sufficiente di stabilità per tutti i polinomi  $f(z)$  che verificano le (2); tale criterio presenta le stesse difficoltà numeriche che si incontrano nel caso di un solo polinomio e perciò è da considerare della massima semplicità in quest'ordine di problemi. Inoltre nel caso (3) tale condizione sufficiente si riduce a quella data da ROUTH, che è anche necessaria; ciò che fa ritenere la condizione qui data sufficientemente ampia.

La formulazione generale data al problema che si è posto permette di considerare il caso in cui i coefficienti di  $f(z)$  dipendano da dati sperimentali diversi, ciascuno dei quali raggiungibile con diversa approssimazione. Fissati a priori gli ordini di approssimazione con cui si intendono valutare i dati sperimentali, restano individuati i limiti inferiore  $\underline{a}_i$  e superiore  $\bar{a}_i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) e il polinomio  $f(z)$  che traduce fedelmente il fenomeno vibratorio è uno di quelli i cui coefficienti verificano le (2).

2. — In molti problemi tecnici i coefficienti del polinomio  $f(z)$  che si considera si possono pensare come funzioni di un numero finito di parametri e perciò può porsi il seguente problema di stabilità:

« In un insieme  $I$  dello spazio numerico  $S_r$  di coordinate  $h_1, h_2, \dots, h_r$ , sono assegnate  $n+1$  funzioni reali

$$a_i(h_1, h_2, \dots, h_r) \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Si vuol determinare l'insieme  $I' \subset I$  per cui risulta stabile il polinomio (1), dove sia posto  $a_i = a_i(h_1, h_2, \dots, h_r)$  ».

Nel caso che le  $a_i(h_1, h_2, \dots, h_r)$  siano polinomi nelle variabili  $h_1, h_2, \dots, h_r$ , tale problema è stato posto e studiato da T. VIOLA<sup>(2)</sup>, che ha stabilito alcune proprietà dell'insieme  $I'$ .

(<sup>2</sup>) T. VIOLA, « *Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali, le cui radici hanno parti reali esterne o non interne a un determinato intervallo* », Rend. R. Accad. Soc. Reale di Napoli, 1938; « *Sulla stabilità degli integrali delle equazioni differenziali lineari, omogenee a coefficienti costanti* », Rend. R. Accad. d'Italia, 1940; « *Sui determinanti di Hurwitz d'un'equazione algebrica, i cui coefficienti sono polinomi dipendenti da quanti si vogliono parametri reali*, Boll. U.M.I., 1949.

Le condizioni sufficienti per la stabilità dei polinomi verificanti le (2), ottenute in questo lavoro, permettono di dare condizioni sufficienti anche per questo problema; basta infatti porre, per un sottinsieme  $I^*$  di  $I$ ,

$\underline{a}_i =$  estremo inferiore di  $a_i(h_1, h_2, \dots, h_r)$  in  $I^*$ ,

$\overline{a}_i =$  estremo superiore di  $a_i(h_1, h_2, \dots, h_r)$  in  $I^*$ .

Se i numeri  $\underline{a}_i$  e  $\overline{a}_i$  verificano le condizioni dette ogni polinomio  $f(z)$  corrispondente ai punti di  $I^*$  è stabile.

In molti problemi tecnici non si conoscono però esplicitamente le funzioni  $a_i(h_1, h_2, \dots, h_r)$ , sia perchè di esse può darsi solo una valutazione con mezzi sperimentali, sia perchè ogni loro espressione analitica è sempre approssimata, dipendendo il fenomeno da esse rappresentato da un numero maggiore (e talvolta infinito) di parametri.

Si pensi ad esempio all'espressione della densità dell'aria in funzione della quota [di importanza fondamentale in Aerodinamica]; le espressioni analitiche che si danno di tale densità sono dovute a interpolazioni ed extrapolazioni su dati sperimentali e rappresentano grossolanamente un fenomeno, che dipende in realtà da moltissimi altri elementi.

Desiderando fornire ai tecnici uno strumento analitico che si possa applicare anche quando i coefficienti del polinomio  $f(z)$  sono noti solo sperimentalmente e al tempo stesso tener conto del relativo ordine di approssimazione, ho ritenuto preferibile impostare il problema di stabilità come ho esposto nel n. 1.

### 3. — Richiamiamo il

TEOREMA DI ROUTH <sup>(3)</sup>. — « Si consideri la tabella di numeri

$$(R) = \begin{cases} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \alpha_{20} & \alpha_{30} & \dots \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{0j} & \alpha_{1j} & \alpha_{2j} & \alpha_{3j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

nella quale le prime due righe sono

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \dots \end{array}$$

<sup>(3)</sup> Nell'enunciato originale di ROUTH alla tabella (R) è sostituita un'altra, i cui elementi possono dedursi da quelli di (R); questa è però preferibile perchè esige un numero minore di operazioni per il calcolo dei suoi elementi che non la tabella originale di ROUTH. V. G. FICHERA, loc. cit. in (1).

con  $a_{n+k} = 0$  per  $k > 0$  e per  $j > 1$

$$\alpha_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_{i+1j-2} & \alpha_{0j-2} \\ \alpha_{i+1j-1} & \alpha_{0j-1} \end{vmatrix}.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio (1) con  $a_0 > 0$  abbia tutte le radici con parte reale negativa è che sia

$$\alpha_{01} > 0, \alpha_{02} > 0, \dots, \alpha_{0n} > 0 \text{ »}.$$

Ricordiamo inoltre che la tabella (R) ha la proprietà che se gli elementi della sua prima colonna sono tutti positivi di conseguenza lo sono pure tutti gli altri suoi elementi.

4. — Partendo dai numeri

$$\underline{a}_i \leq \bar{a}_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

definiamo le tabelle  $(\bar{R})$  ed  $(\underline{R})$

$$(\bar{R}) = \begin{cases} \bar{\alpha}_{00} & \bar{\alpha}_{10} & \bar{\alpha}_{20} & \bar{\alpha}_{30} \dots \\ \bar{\alpha}_{01} & \bar{\alpha}_{11} & \bar{\alpha}_{21} & \bar{\alpha}_{31} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\alpha}_{0j} & \bar{\alpha}_{1j} & \bar{\alpha}_{2j} & \bar{\alpha}_{3j} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

$$(\underline{R}) = \begin{cases} \underline{\alpha}_{00} & \underline{\alpha}_{10} & \underline{\alpha}_{20} & \underline{\alpha}_{30} \dots \\ \underline{\alpha}_{01} & \underline{\alpha}_{11} & \underline{\alpha}_{21} & \underline{\alpha}_{31} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\alpha}_{0j} & \underline{\alpha}_{1j} & \underline{\alpha}_{2j} & \underline{\alpha}_{3j} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

nel modo seguente: le prime due righe della tabella  $(\bar{R})$  sono

$$\begin{array}{cccc} \bar{a}_0 & \bar{a}_2 & \bar{a}_4 & \bar{a}_6 \dots \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_3 & \bar{a}_5 & \bar{a}_7 \dots \end{array}$$

con  $\bar{a}_{n+k} = 0$  per  $k > 0$  e le prime due righe della tabella  $(\bar{R})$  sono

$$\begin{array}{cccc} \bar{a}_0 & \bar{a}_2 & \bar{a}_4 & \bar{a}_6 \dots \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_3 & \bar{a}_5 & \bar{a}_7 \dots \end{array}$$

con  $\underline{a}_{n+k} = 0$  per  $k > 0$ ; per  $j > 1$  si ha inoltre

$$\begin{array}{l} \bar{\alpha}_{ij} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_{i+1j-2} & \bar{\alpha}_{0j-2} \\ \bar{\alpha}_{i+1j-1} & \bar{\alpha}_{0j-1} \end{vmatrix} \\ \underline{\alpha}_{ij} = \begin{vmatrix} \underline{\alpha}_{i+1j-2} & \underline{\alpha}_{0j-2} \\ \underline{\alpha}_{i+1j-1} & \underline{\alpha}_{0j-1} \end{vmatrix} \end{array} .$$

5. — I teoremi seguenti riguardano la struttura delle tabelle  $(\bar{R})$  e  $(\underline{R})$ .

TEOREMA I: « Se è  $2i + j > n$ , si ha

$$(4) \quad \bar{\alpha}_{ij} = 0, \quad \underline{\alpha}_{ij} = 0 \text{ »}.$$

Per  $j = 0$  e  $j = 1$ , le prime due righe delle tabelle  $(\bar{R})$  e  $(\underline{R})$  sono costituite dagli elementi rispettivamente di posto pari e dispari delle due successioni

$$\{\bar{a}_r\} \text{ e } \{\underline{a}_r\} \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

con  $\bar{a}_{n+k} = 0$ ,  $\underline{a}_{n+k} = 0$  per  $k > 0$ ; le (4) per  $j = 0$  e  $j = 1$  e per ogni indice  $i$  per cui  $2i + j > n$  esprimono che è

$$\bar{a}_{n+k} = \underline{a}_{n+k} = 0 \quad \text{per } k > 0.$$

Supponiamo che le (4) siano verificate per  $j = 0, 1, 2, \dots, r-1$  per ogni indice  $i$  con  $2i + j > n$  e dimostriamo che di conseguenza lo sono pure per  $j = r$  ed ogni  $i$  con  $2i + r > n$ .

Si ha:

$$\begin{array}{l} \bar{\alpha}_{ir} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_{i+1r-2} & \bar{\alpha}_{0r-2} \\ \bar{\alpha}_{i+1r-1} & \bar{\alpha}_{0r-1} \end{vmatrix} \\ \underline{\alpha}_{ir} = \begin{vmatrix} \underline{\alpha}_{i+1r-2} & \underline{\alpha}_{0r-2} \\ \underline{\alpha}_{i+1r-1} & \underline{\alpha}_{0r-1} \end{vmatrix} \end{array} .$$

Se è  $2i + r > n$ , risulta

$$2(i + 1) + r - 2 = 2i + r > n,$$

$$2(i + 1) + r - 1 = 2i + r + 1 > n$$

e perciò è

$$\overline{\alpha}_{i+1, r-2} = 0 \quad \underline{\alpha}_{i+1, r-2} = 0$$

$$\overline{\alpha}_{i+1, r-1} = 0 \quad \underline{\alpha}_{i+1, r-1} = 0;$$

ne segue quindi

$$\overline{\alpha}_{ir} = 0, \quad \underline{\alpha}_{ir} = 0$$

e il teorema è dimostrato.

Il teorema che segue estende alle tabelle  $(\overline{R})$  e  $(\underline{R})$  la proprietà della tabella  $(R)$  di ROUTH che si è ricordata nel n. 2.

**TEOREMA II.** — « Se gli elementi della prima colonna delle tabelle  $(\overline{R})$  e  $(\underline{R})$  sono positivi, tutti gli elementi di  $(\overline{R})$  e  $(\underline{R})$  per cui  $2i + j \leq n$  sono positivi ».

Partiamo dall'ultima riga delle tabelle  $(\overline{R})$  e  $(\underline{R})$  ( $j = n$ ); per ipotesi è

$$\overline{\alpha}_{0n} > 0 \quad \underline{\alpha}_{0n} > 0.$$

Supposto che per  $j = r + 1, r + 2, \dots, n$  sia

$$\overline{\alpha}_{ij} > 0, \quad \underline{\alpha}_{ij} > 0$$

per ogni  $i$  con  $2i + j \leq n$ , dimostriamo che è anche

$$(5) \quad \overline{\alpha}_{ir} > 0, \quad \underline{\alpha}_{ir} > 0$$

per ogni  $i$  con  $2i + r \leq n$ .

Si ha

$$(6) \quad \overline{\alpha}_{i-1, r+2} = \begin{vmatrix} \overline{\alpha}_{ir} & \underline{\alpha}_{0r} \\ \underline{\alpha}_{i, r+1} & \overline{\alpha}_{0, r+1} \end{vmatrix}.$$

Se  $2i + r \leq n$  risulta

$$2(i - 1) + r + 2 = 2i + r \leq n$$



e quindi

$$(7) \quad \bar{\alpha}_{i-1r+2} > 0 .$$

Se  $2i + r \leq n$  si ha

$$(8) \quad \begin{cases} \underline{\alpha}_{i,r+1} > 0 & \text{se è anche } 2i + r \leq n - 1 \\ \underline{\alpha}_{i,r+1} = 0 & \text{se è } 2i + r = n , \end{cases}$$

per il teorema I.

Dalle (6) e (7) segue

$$\bar{\alpha}_{ir} \bar{\alpha}_{0r+1} > \underline{\alpha}_{0r} \underline{\alpha}_{i,r+1}$$

ed essendo per ipotesi  $\underline{\alpha}_{0r} > 0$  e  $\bar{\alpha}_{0r+1} > 0$  e per le (8) si ha

$$\bar{\alpha}_{ir} > \frac{\alpha_{0r}}{\alpha_{0r+1}} \underline{\alpha}_{i,r+1} \geq 0$$

che prova la prima delle (5).

In modo del tutto analogo si dimostra la seconda delle (5).

**TEOREMA III.** — « Se è  $\underline{a}_i \leq \bar{a}_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) e gli elementi della prima colonna delle tabelle  $(\bar{R})$  ed  $(R)$  sono positivi, fra gli elementi di  $(R)$  e  $(\bar{R})$  sussistono le disuguaglianze

$$(9) \quad 0 \leq \underline{\alpha}_{ij} \leq \bar{\alpha}_{ij} .$$

Basta provare che è

$$(10) \quad \underline{\alpha}_{ij} \leq \bar{\alpha}_{ij}$$

il primo membro delle (9) essendo conseguenza dei teoremi I e II.

Per  $j = 0$  e  $j = 1$  la (10) esprime che è

$$\begin{aligned} \underline{a}_i &\leq \bar{a}_i && \text{per } i = 0, 1, \dots, n \\ \underline{a}_i &= \bar{a}_i = 0 && \text{per } i > n . \end{aligned}$$

Supponiamo verificate le (10) per  $j = 0, 1, \dots, r - 1$  qualunque sia l'indice  $i$  e proviamó che è

$$(11) \quad \underline{\alpha}_{ir} \leq \overline{\alpha}_{ir}$$

qualunque sia l'indice  $i$ .

Si ha

$$\underline{\alpha}_{i+1 r-2} \leq \overline{\alpha}_{i+1 r-2}$$

$$\underline{\alpha}_{i+1 r-1} \leq \overline{\alpha}_{i+1 r-1}$$

e poichè tutti gli elementi delle tabelle  $(\overline{R})$  ed  $(\underline{R})$  sono non negativi ne segue

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_{ir} &= \underline{\alpha}_{i+1 r-2} \underline{\alpha}_{0 r-1} - \overline{\alpha}_{i+1 r-1} \overline{\alpha}_{0 r-2} \leq \\ &\leq \overline{\alpha}_{i+1 r-2} \overline{\alpha}_{0 r-1} - \underline{\alpha}_{i+1 r-1} \underline{\alpha}_{0 r-2} = \overline{\alpha}_{ir}. \end{aligned}$$

che prova la (11) e quindi il teorema.

6. — Il teorema che segue dà una condizione sufficiente affinchè ogni polinomio verificante le (2) sia stabile.

**TEOREMA IV.** — « Se gli elementi della prima colonna delle tabelle  $(\overline{R})$  ed  $(\underline{R})$  sono positivi, ogni polinomio verificante le (2) è stabile ».

Sia

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

un polinomio i cui coefficienti soddisfino alle condizioni (2).

Dimostriamo che è

$$(12) \quad \underline{\alpha}_{ij} \leq \alpha_{ij} \leq \overline{\alpha}_{ij},$$

dove  $\alpha_{ij}$  è l'elemento della tabella di ROUTH  $(\overline{R})$  relativa al polinomio considerato.

Per  $j = 0$  e  $j = 1$  la (12) si riduce alle (2). Supponiamo verificata la (12) per  $j = 0, 1, \dots, r - 1$  ed ogni  $i$  e dimostriamo che è

$$(13) \quad \underline{\alpha}_{ir} \leq \alpha_{ir} \leq \overline{\alpha}_{ir}.$$

Avendosi per il teorema III e per le (12) ( $j = r - 1, j = r - 2$ )

$$0 < \underline{\alpha}_{i+1 r-2} \leq \alpha_{i+1 r-2} \leq \overline{\alpha}_{i+1 r-2}$$

$$0 < \underline{\alpha}_{i+1 r-1} \leq \alpha_{i+1 r-1} \leq \overline{\alpha}_{i+1 r-1}$$

e inoltre per le ipotesi fatte e per le (12) ( $j = r - 1, j = r - 2$ )

$$0 < \underline{\alpha}_{0 r-2} \leq \alpha_{0 r-2} \leq \overline{\alpha}_{0 r-2}$$

$$0 < \underline{\alpha}_{0 r-1} \leq \alpha_{0 r-1} \leq \overline{\alpha}_{0 r-1},$$

ne segue

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_{ir} &= \underline{\alpha}_{i+1 r-2} \underline{\alpha}_{0 r-1} - \overline{\alpha}_{i+1 r-1} \overline{\alpha}_{0 r-2} \leq \\ &\leq \alpha_{i+1 r-2} \alpha_{0 r-1} - \alpha_{i+1 r-1} \alpha_{0 r-2} = \alpha_{ir} \leq \\ &\leq \overline{\alpha}_{i+1 r-2} \overline{\alpha}_{0 r-1} - \underline{\alpha}_{i+1 r-1} \underline{\alpha}_{0 r-2} = \overline{\alpha}_{ir}, \end{aligned}$$

che prova la (13) e quindi la (12).

Dalla (12) segue

$$\alpha_{0j} \geq \underline{\alpha}_{0j} > 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n);$$

essendo  $\alpha_{00} = a_0 > 0$  il polinomio  $f(z)$  soddisfa alla condizione sufficiente di ROUTH (n. 2) e perciò tutte le sue radici hanno parte reale negativa ed è dimostrato che ogni polinomio verificante le (2) è stabile.

Qualora sia  $\underline{a}_i = \overline{a}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) le tabelle  $(\overline{R})$  ed  $(\underline{R})$  si riducono a quella  $(R)$  di ROUTH relativa all'unico polinomio che soddisfa alle (2) e la condizione sufficiente per la stabilità espressa dal teorema IV è quella di ROUTH (n. 2).

7. Si è visto che per la stabilità di ogni  $f(z)$  verificante le (2) è sufficiente che le tabelle  $(\overline{R})$  ed  $(\underline{R})$  abbiano la prima colonna di elementi tutti positivi. I teoremi che seguono chiariscono la diversa posizione delle tabelle  $(\overline{R})$  ed  $(\underline{R})$  ai fini del problema.

**TEOREMA V.** — «*Se esiste un polinomio  $f(z)$  verificante le (2) che sia stabile e gli elementi della prima colonna della tabella  $(\underline{R})$  sono non negativi, necessariamente sono positivi gli elementi della prima colonna della tabella  $(\overline{R})$* ».

Siano  $\alpha_{ij}$  gli elementi della tabella  $(R)$  relativa al polinomio stabile  $f(z)$  e proviamo che è

$$(14) \quad \underline{\alpha}_{ij} \leq \alpha_{ij} \leq \overline{\alpha}_{ij}.$$

Questa relazione per  $j = 0, 1$  si riduce alle (2) ed è quindi verificata. Supponiamo che lo sia per ogni intero  $j < r$  e proviamola per  $j = r$ . Si ha

$$\alpha_{ir} = \alpha_{i+1r-2} \alpha_{0r-1} - \alpha_{i+1r-1} \alpha_{0r-2}.$$

Essendo  $f(z)$  stabile è

$$0 \leq \alpha_{i+1r-2} \leq \bar{\alpha}_{i+1r-2}$$

$$0 < \alpha_{0r-1} \leq \bar{\alpha}_{0r-1},$$

da cui

$$\alpha_{i+1r-2} \alpha_{0r-1} \leq \bar{\alpha}_{i+1r-2} \bar{\alpha}_{0r-1}.$$

Da

$$\alpha_{i+1r-1} \geq \underline{\alpha}_{i+1r-1},$$

$$\alpha_{0r-2} \geq \underline{\alpha}_{0r-2} > 0,$$

$$\alpha_{i+1r-1} > 0,$$

segue

$$\alpha_{i+1r-1} \alpha_{0r-2} \geq \underline{\alpha}_{i+1r-1} \underline{\alpha}_{0r-2}$$

e quindi

$$\alpha_{ir} \leq \bar{\alpha}_{ir}.$$

In modo analogo si prova che è

$$\underline{\alpha}_{ir} \leq \alpha_{ir}$$

e la (14) è dimostrata.

Essendo  $\alpha_{0j} > 0$  dalla (14) segue che è  $\bar{\alpha}_{0j} > 0$  e il teorema è dimostrato.

**TEOREMA VI** — « Se gli elementi della prima colonna della tabella  $(\bar{R})$  sono non negativi, condizione necessaria affinché ogni polinomio  $f(z)$  verificante le (2) sia stabile è che siano positivi tutti gli elementi della prima colonna della tabella  $(\bar{R})$  ».

Questo teorema è un caso particolare di quello precedente.