

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

IDA CATTANEO GASPARINI

**Sulla deformazione di un solido elastico omogeneo  
anisotropo soggetto a stress lineare**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 7,*  
n° 1-2 (1953), p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1953\\_3\\_7\\_1-2\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_1-2_1_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLA DEFORMAZIONE DI UN SOLIDO ELASTICO OMOGENEO ANISOTROPO SOGGETTO A STRESS LINEARE

di IDA CATTANEO GASPARINI (Pisa)

Nella Memoria del Prof. SIGNORINI « *Sopra alcune questioni di Statica dei sistemi continui* »<sup>(1)</sup> sono caratterizzate le sollecitazioni esterne che in un sistema elastico, omogeneo ma comunque anisotropo, danno luogo a uno stato di tensione indipendente dalla natura del materiale. Vi è riconosciuto, tra l'altro, che tale stato di tensione è necessariamente lineare, pur senza ulteriori limitazioni, ed è individuabile mediante le sole coordinate astatiche e iperastatiche della sollecitazione totale esterna. L'esame dello *stress* lineare è ivi compiuto senza intervento dello *strain* prodotto nel solido; tenuto presente tuttavia che tale tipo di tensione si trova a sussistere in importanti casi concreti, come nei problemi di SAINT-VENANT di più larga applicazione pratica, mi è parsa non priva di interesse anche una breve analisi della corrispondente deformazione. Questo è appunto, con riferimento a un generico solido anisotropo, l'argomento del presente lavoro<sup>(2)</sup>.

L'analisi che qui appresso svolgeremo si basa essenzialmente su una ormai classica formula cinematica che il VOLTERRA pose alla base della teoria delle distorsioni elastiche<sup>(3)</sup> e della quale è qui data una dimostrazione diretta nell'ipotesi specifica di strain lineare. L'esame, svolto dapprima in generale e poi con riguardo ad alcuni problemi particolari (trazione o compressione di un cilindro generico, torsione di un cilindro ellittico, ecc.), varrà a mettere in luce l'influenza che sulla deformazione di un solido elastico ha

---

(1) Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, vol. II pag. 19.

(2) Un'analisi analoga, nel caso dei solidi isotropi, ha formato oggetto di una Memoria di P. UDDESCHINI (Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. LXXXIV, Fasc. II, 1940-41, pag. 469).

(3) Cfr. V. VOLTERRA, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, Ann. Éc. Normale (3) XXIV, septmbre 1907, pagg. 401-517.

l'anisotropia del materiale. Esso consentirà in particolare di ritrovare rapidamente un classico procedimento per la determinazione sperimentale delle 21 costanti di elasticità.

1. RICHIAMO DI UNA FORMULA DEL VOLTERRA E SUA SPECIFICAZIONE NEL CASO DI STRESS LINEARE. — Nel caso di deformazioni infinitesime lo spostamento  $\mathbf{s}$  del generico punto  $P$  può notoriamente ricavarsi dalle caratteristiche di deformazione  $\varepsilon_{rs}$  ( $r, s = 1, 2, 3$ ) con sole quadrature. Detta  $\varepsilon$  l'omografia di deformazione, l'espressione di  $\mathbf{s}$  è fornita dalla formula del VOLTERRA

$$(1) \quad \mathbf{s}_P = \mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \wedge OP + \sum_1^3 \int_0^P \{ \varepsilon \mathbf{i}_r + PQ \wedge \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \} d y'_r$$

ove  $O$  indica un punto ausiliario scelto ad arbitrio, che assumiamo come origine delle coordinate,  $\mathbf{s}_0$  lo spostamento in  $O$ ,  $\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{s})_0$  il semirottore di  $\mathbf{s}$  valutato in  $O$ ,  $Q \equiv (y'_1, y'_2, y'_3)$  il punto variabile sull'arco  $\widehat{OP}$ ,  $P \equiv (y_1, y_2, y_3)$  il generico punto del sistema elastico, e infine  $\mathbf{i}_r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) i versori della terna di riferimento. L'integrale è esteso a un arbitrario arco di linea congiungente  $O$  con  $P$ .

Nel caso di linearità delle caratteristiche di deformazione si può dare della (1) una semplice dimostrazione. Basterà per questo far vedere:

a) che il vettore  $\mathbf{s}_P$  definito dalla (1) è funzione univoca di  $P$ , ossia che l'integrale  $\int_0^P \sum_1^3 \{ \varepsilon \mathbf{i}_r + PQ \wedge \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \} d y'_r$  esteso a qualunque linea chiusa è nullo;

b) che le componenti del vettore derivato di tale  $\mathbf{s}_P$  rispetto alle  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) danno proprio, nelle loro classiche combinazioni, le caratteristiche di deformazione da cui si è partiti.

Per dimostrare il primo punto spezziamo l'integrale che figura in (1). pensato esteso a una linea chiusa  $l$ , nella somma di due termini:

$$(2) \quad \sum_1^3 \int_l \varepsilon \mathbf{i}_r d y'_r + \sum_1^3 \int_l PQ \wedge \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r d y'_r.$$

La componente di indice  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) del primo di essi, in virtù del teorema di commutazione applicato all'omografia  $\varepsilon$  e del teorema di STOKES,

*omogeneo anisotropo soggetto a stress lineare*

nonchè della costanza di  $\text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_j$  conseguente alla linearità dello strain, vale :

$$(3) \quad \sum_1^3 \int_l \varepsilon \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_j d y'_r = \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_j \times \int_{\sigma} \mathbf{n} d \sigma$$

ove  $\sigma$  è una qualunque superficie avente  $l$  per contorno completo ed  $\mathbf{n}$  è il versore della normale alla  $\sigma$  nel suo punto generico, orientata in modo che rispetto ad essa il verso di circolazione lungo  $l$  appaia positivo. Circa l'altro termine della (2) si ha

$$\sum_1^3 \int_l P Q \wedge \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_j d y'_r = \sum_1^3 \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \wedge \mathbf{i}_j \times \int_l P Q d y'_r$$

e quindi, essendo

$$(4) \quad \int_l P Q d y'_r = \mathbf{i}_r \wedge \int_{\sigma} \mathbf{n} d \sigma$$

(come si vede applicando il teorema di STOKES alla generica componente del primo membro della (4) e tenendo presente l'identità:  $\text{rot}(m \mathbf{v}) = m \text{rot } \mathbf{v} + \text{grad } m \wedge \mathbf{v}$ ),

$$\begin{aligned} \sum_1^3 \int_l P Q \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_j d y'_r &= \sum_1^3 \left[ (\text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \wedge \mathbf{i}_j) \times \left( \mathbf{i}_r \wedge \int_{\sigma} \mathbf{n} d \sigma \right) \right] = \\ &= \left( \sum_1^3 \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_r \right) \left( \mathbf{i}_j \times \int_{\sigma} \mathbf{n} d \sigma \right) - \left( \mathbf{i}_j \times \sum_1^3 \mathbf{i}_r \right) \left( \sum_1^3 \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \times \int_{\sigma} \mathbf{n} d \sigma \right) \quad (4) . \end{aligned}$$

La quantità entro la prima parentesi, come si può facilmente controllare, è nulla; la quantità entro la prima parentesi del secondo termine vale 1. Resta in definitiva

$$\sum_1^3 \int_l P Q \wedge \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_j d y'_r = - \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_j \times \int_{\sigma} \mathbf{n} d \sigma ,$$

---

(4) Si rammenti l'identità vettoriale  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{d} - \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{d}$ .

e il confronto con la (3) permette di concludere, come si voleva, che è nullo l'integrale

$$\int_V \sum_1^3 \{ \varepsilon \mathbf{i}_r + P Q \wedge \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \} d y'_r,$$

a qualunque linea chiusa  $l$  esso sia esteso.

Per la completa dimostrazione della (1) non resta ormai che provare il punto *b*), basta cioè far vedere che le caratteristiche di deformazione che si deducono dal vettore definito dalle (1) sono proprio le caratteristiche di deformazione dalle quali si è partiti. Dette infatti  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) le componenti del vettore (1), si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}_P}{\partial \mathbf{y}_r} \times \mathbf{i}_r &= \frac{\partial u_r}{\partial \mathbf{y}_r} = \left[ \omega_0 \wedge \mathbf{i}_r + \varepsilon \mathbf{i}_r + \sum_1^3 \int_0^P \mathbf{i}_r \wedge \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_k d y'_k \right] \times \mathbf{i}_r = \\ &= \varepsilon \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_r = \varepsilon_{rr} \quad (r = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Analogamente, essendo

$$\frac{\partial \mathbf{s}_P}{\partial \mathbf{y}_r} \times \mathbf{i}_s = \frac{\partial u_s}{\partial \mathbf{y}_r} = \omega_0 \wedge \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_s + \varepsilon \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_s + \sum_1^3 \int_0^P \mathbf{i}_r \wedge \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_k d y'_k \times \mathbf{i}_s,$$

si verifica che

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \mathbf{y}_s} + \frac{\partial u_s}{\partial \mathbf{y}_r} \right) = \frac{1}{2} (\varepsilon \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_s + \varepsilon \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_r) = \varepsilon_{rs} \quad (r, s = 1, 2, 3; r \neq s).$$

**2. ESPRESSIONE DELLO SPOSTAMENTO MEDIANTE GLI ELEMENTI DELLO STRESS LINEARE.** Adotteremo d'ora in poi per le caratteristiche di tensione e di deformazione le notazioni a un solo indice<sup>(5)</sup>.

Per la supposta linearità dello stress possiamo porre

$$(5) \quad X_s = X_s^* + \xi_s \times O Q \quad (s = 1, 2, \dots, 6).$$

$$(5) \quad \begin{aligned} X_r &= X_{rr} \quad (r = 1, 2, 3), & X_4 &= X_{23}, & X_5 &= X_{13}, & X_6 &= X_{12}; \\ \varepsilon_r &= \varepsilon_{rr} \quad (r = 1, 2, 3), & \varepsilon_4 &= \varepsilon_{23}, & \varepsilon_5 &= \varepsilon_{13}, & \varepsilon_6 &= \varepsilon_{12}. \end{aligned}$$

essendo  $X_s^*$  e  $\xi_s$  quantità, scalari e vettoriali, costanti. Come è noto, la mutua dipendenza tra *stress* e *strain* è espressa dalle sei equazioni locali

$$(6) \quad \varepsilon_r = - \sum_1^6 m_{rs} X_s \quad (r = 1, 2 \dots 6)$$

ove le 36 quantità  $m_{rs}$ , *parametri di elasticità*, sono, nelle nostre ipotesi di omogeneità, altrettante costanti. Se chiamiamo  $\mu_s$  ( $s = 1, 2, \dots, 6$ ) l'omografia (dilatazione) definita dalla matrice

$$(7) \quad \mu_s \equiv \begin{vmatrix} m_{1s} & \frac{m_{6s}}{2} & \frac{m_{5s}}{2} \\ \frac{m_{6s}}{2} & m_{2s} & \frac{m_{4s}}{2} \\ \frac{m_{5s}}{2} & \frac{m_{4s}}{2} & m_{3s} \end{vmatrix},$$

possiamo considerare l'omografia di deformazione  $\varepsilon$  come somma di sei omografie, cioè

$$(8) \quad \varepsilon = - \sum_1^6 \mu_s X_s.$$

Per arrivare a una espressione generale dello spostamento elastico in un generico solido omogeneo anisotropo soggetto a stress lineare, effettuiamo nella (1) la decomposizione (8) e valutiamo poi  $s_P$  prescindendo dallo spostamento rigido.

Per brevità di locuzione chiamiamo *direttrice* la retta condotta per  $O$  parallelamente a  $\mathbf{i}_1$  e *sezioni normali* le sezioni del solido elastico eseguite con piani normali a  $\mathbf{i}_1$ . Osserviamo che  $\mathbf{i}_1$  corrisponde a una direzione affatto qualunque perché la linearità è per lo stress una proprietà invariante rispetto alla scelta della terna  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ . Successivamente, detta  $P_d$  la proiezione di  $P$  sulla direttrice, fissiamo nella (1) l'arbitrario cammino di integrazione facendolo coincidere con la spezzata bilatera  $OP_dP$ . Indichiamo con  $\mathbf{u}$  il versore di  $P_dP$ .

Avremo in primo luogo

$$\begin{aligned} \sum_1^3 \int_0^P \varepsilon \mathbf{i}_r d y'_r &= - \sum_1^3 \sum_1^6 \int_0^P X_s \mu_s \mathbf{i}_r d y'_r = \\ &= - \sum_1^6 \left[ \int_0^{P_d} X_s \mu_s \mathbf{i}_1 d y'_1 + \int_{P_d}^P X_s \mu_s \mathbf{i}_2 d y'_2 + \int_{P_d}^P X_s \mu_s \mathbf{i}_3 d y'_3 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\sum_1^6 \left[ \mu_s \mathbf{i}_1 \int_0^{P_d} (X_s^* + \hat{\xi}_s \times O Q) d y'_1 + \right. \\
 &\quad \left. \mu_s \mathbf{i}_2 \cdot \int_{P_d}^P (X_s^* + \hat{\xi}_s \times O Q) d y'_2 + \mu_s \mathbf{i}_3 \int_{P_d}^P (X_s^* + \hat{\xi}_s \times O Q) d y'_3 \right] = \\
 &= -\sum_1^6 \left[ \mu_s \mathbf{i}_1 \left( X_s^* y_1 + \hat{\xi}_s \times O P_d \frac{y_1}{2} \right) + \mu_s \mathbf{i}_2 \left( X_s^* y_2 + \hat{\xi}_s \times \int_{P_d}^P O P_d d y'_2 + \hat{\xi}_s \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \int_{P_d}^P P_d Q d y'_2 \right) + \mu_s \mathbf{i}_3 \left( X_s^* y_3 + \hat{\xi}_s \times \int_{P_d}^P O P_d d y'_3 + \hat{\xi}_s \times \int_{P_d}^P P_d Q d y'_3 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Di qui, posto  $P_d P = |P_d P| \mathbf{u}$ , chiamato  $\vartheta$  l'angolo del versore  $\mathbf{u}$  con  $\mathbf{i}_2$ , osservato che

$$\int_{P_d}^P P_d Q d y'_2 = \int_{P_d}^P \frac{y'_2}{\cos \vartheta} \mathbf{u} d y'_2 = P_d P \frac{y_2}{2},$$

e valutato in modo analogo l'integrale  $\int_{P_d}^P P_d Q d y'_3$ , si ottiene

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \sum_r \int_0^P \varepsilon \mathbf{i}_r d y'_r &= -\sum_1^6 \left[ \mu_s (O P_d) \left( X_s^* + \hat{\xi}_s \times \frac{O P_d}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \mu_s (P_d P) \left( X_s^* + \hat{\xi}_s \times \left( O P_d + \frac{P_d P}{2} \right) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'altro integrale figurante in (1) basta osservare che attualmente è

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r &= -\sum_1^6 \text{rot} (X_s \mu_s \mathbf{i}_r) \\
 &= -\sum_1^6 [X_s \text{rot } \mu_s \mathbf{i}_r + \text{grad } X_s \wedge \mu_s \mathbf{i}_r] \\
 &= -\sum_1^6 \hat{\xi}_s \wedge \mu_s \mathbf{i}_r;
 \end{aligned}$$

avremo allora

$$(10) \quad \sum_1^3 \int_0^P P Q \wedge \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r d y_r = \sum_1^3 \text{rot } \varepsilon \mathbf{i}_r \wedge \int_0^P (Q P_d + P_d P) d y_r =$$

$$= - \sum_1^6 \left\{ (\xi_s \wedge \mu_s \mathbf{i}_1) \wedge \left( O P_d \frac{y_1}{2} + P_d P y_1 \right) + \right.$$

$$\left. + (\xi_s \wedge \mu_s \mathbf{i}_2) \wedge \left( P_d P \frac{y_2}{2} \right) + (\xi_s \wedge \mu_s \mathbf{i}_3) \wedge \left( P_d P \frac{y_3}{2} \right) \right\}.$$

Sommando le espressioni (9) (10) e svolgendo i tripli prodotti vettoriali, si ottiene come espressione definitiva dello spostamento elastico, a meno di uno spostamento rigido di insieme,

$$(11) \quad - \mathbf{s}_P = \sum_1^6 \mu_s (O P_d) (X_s^* + \xi_s \times O P_d) - \frac{y_1^2}{2} \sum_1^6 m_{1s} \xi_s +$$

$$+ y_1 \sum_1^6 \xi_s \times \mathbf{i}_1 \cdot \mu_s (P_d P) + y_1 \sum_1^6 (\xi_s \wedge \mu_s \mathbf{i}_1) \wedge P_d P +$$

$$+ \sum_1^6 (X_s^* + \xi_s \times P_d P) \mu_s (P_d P) - \frac{1}{2} \sum_1^6 P_d P \times \mu_s (P_d P) \cdot \xi_s.$$

La (11) permette di decomporre lo spostamento che si provoca nel generico punto  $P$  nei seguenti termini:

a) un termine  $\mathbf{s}_{P_d}$  che rappresenta lo spostamento che si ha in  $P_d$

$$(12) \quad - \mathbf{s}_{P_d} = \sum_1^6 \mu_s (O P_d) (X_s^* + \xi_s \times O P_d) - \frac{y_1^2}{2} \sum_1^6 m_{1s} \xi_s.$$

b) un termine  $\mathbf{n}_P$  indipendente da  $y_1$ , cioè uguale per tutte le sezioni normali,

$$(13) \quad - \mathbf{n}_P = \sum_1^6 (X_s^* + \xi_s \times P_d P) \mu_s (P_d P) - \frac{1}{2} \sum_1^6 P_d P \times \mu_s (P_d P) \cdot \xi_s$$

c) un termine  $\mathbf{n}'_P$ , variabile da sezione a sezione, costituito da una trasformazione omografica nella sezione medesima

$$(14) \quad - \mathbf{n}'_P = y_1 \sum_1^6 \xi_s \times \mathbf{i}_1 \cdot \mu_s (P_d P)$$



d) infine un termine del tipo

$$(15) \quad y_1 \omega \wedge P_d P,$$

ove si è posto

$$(15') \quad -\omega = \sum_1^6 \xi_s \wedge \mu_s \mathbf{i}_1.$$

In compendio

$$\mathbf{s}_P = \mathbf{s}_{P_d} + \mathbf{n}_P + \mathbf{n}'_P + y_1 \omega \wedge P_d P.$$

Il termine  $\mathbf{n}'_P$  si annulla identicamente tutte le volte che  $\mathbf{i}_1$  sia perpendicolare a tutti i vettori  $\xi_s$  (ossia quando le caratteristiche di tensione non dipendono da  $y_1$ ).

I componenti  $\omega_T$  e  $\omega_f$  di  $\omega$  secondo la direttrice e secondo un piano normale alla direttrice danno luogo a una rotazione di vettore  $\omega_T$  (torsione) e a una rotazione di vettore  $\omega_f$  (flessione). Se le  $X_s$  sono funzioni esclusivamente di  $y_1$  (se cioè le  $\xi_s$  sono parallele a  $\mathbf{i}_1$ ) la torsione si annulla.

Faremo ora applicazione di questi risultati a qualche problema concreto particolarmente espressivo.

### 3. APPLICAZIONE AD ALCUNI PROBLEMI PARTICOLARI. INDICAZIONI SUL MODO DI DETERMINARE SPERIMENTALMENTE LE 21 COSTANTI DI ELASTICITÀ.

a) *Trazione o compressione di un cilindro pesante ad asse verticale.* Sia  $C$  un cilindro elastico omogeneo di sezione arbitraria. Assumiamo come terna di riferimento la sua terna centrale con l'asse  $i_1$  (direttrice) parallelo alle generatrici del cilindro. Tale convenzione, per ora superflua, sarà utile in seguito.

Supponiamo che in tutto  $C$  sia

$$(17) \quad X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0, \quad X_1 = X_1^* + \xi_1 \times O P$$

$X_1^*$  e  $\xi_1$  costanti). Il sistema di forze esterne in equilibrio con tale distribuzione di sforzi, come si riconosce dalle equazioni del CANY, è costituito da un insieme di forze di massa agenti parallelamente ad  $\mathbf{i}_1$  di intensità  $kF = \xi_1 \times \mathbf{i}_1$  ( $k =$  densità,  $F =$  forza unitaria di massa) e da una distribuzione uniforme di forze superficiali normali, di intensità  $X_1$ , sulle basi. È questo il caso di un cilindro ad asse verticale soggetto al proprio peso e a opportune azioni uniformi di compressione (o trazione) sulle basi.

In tali ipotesi la (11) dà per lo spostamento elastico l'espressione

$$(18) \quad -\mathbf{s}_P = \mu_1 (O P_d) (X_1^* + \hat{\xi}_1 \times O P_d) - \frac{y_1^2}{2} m_{11} \hat{\xi}_1 + y_1 \hat{\xi}_1 \times \mathbf{i}_1 \cdot \mu_1 (P_d P) + \\ + y_1 (\hat{\xi}_1 \wedge \mu_1 \mathbf{i}_1) \wedge P_d P + (X_1^* + \hat{\xi}_1 \times P_d P) \mu_1 P_d P - \\ - \frac{1}{2} P_d P \times \mu_1 P_d P \cdot \hat{\xi}_1$$

e la decomposizione effettuata in generale al n. 2 si specifica ora così:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{s}_{P_d} = \mu_1 (O P_d) (X_1^* + \hat{\xi}_1 \times O P_d) - \frac{y_1^2}{2} m_{11} \hat{\xi}_1 \\ -\mathbf{n}'_P = y_1 \hat{\xi}_1 \times \mathbf{i}_1 \cdot \mu_1 (P_d P) \\ y_1 \omega \wedge P_d P \quad \text{con } \omega = -\hat{\xi}_1 \wedge \mu_1 \mathbf{i}_1 \\ -\mathbf{n}_P = [X_1^* + \hat{\xi}_1 \times (P_d P)] \mu_1 (P_d P) - \frac{1}{2} (P_d P) \times \mu_1 (P_d P) \cdot \hat{\xi}_1 \end{array} \right.$$

Particolarizzando ancora, supponiamo  $\hat{\xi}_1 \parallel \mathbf{i}_1$ , il che equivale ad ammettere che  $X_1$  sia funzione lineare soltanto di  $y_1$  e quindi costante su ciascuna sezione. Supponiamo inoltre che il cilindro in esame sia costituito da un cristallo del sistema rombico avente come piano di simmetria in  $O$  il piano  $\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$ : ciò porta la seguente riduzione delle costanti elastiche<sup>(6)</sup>:

$$(20) \quad \begin{array}{l} m_{15} = m_{25} = m_{35} = m_{45} = 0 \\ m_{16} = m_{26} = m_{36} = m_{46} = 0. \end{array}$$

<sup>(6)</sup> Ricordiamo che le 21 costanti elastiche  $m_{rs}$ , cioè i coefficienti della forma quadratica nelle  $X - W(X)$  — che dà il potenziale specifico di elasticità, dipendono dalla scelta della terna di riferimento. Precisamente, indicata con  $\beta \equiv \|X_{rs}\|$  l'omografia di tensione si ha  $X_r = \beta \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_r$  ( $r = 1, 2, 3$ ),  $X_4 = \beta \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3$ ,  $X_5 = \beta \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1$ ,  $X_6 = \beta \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2$ . Ne risulta che, scambiando  $\mathbf{i}_1$  in  $-\mathbf{i}_1$ , restano inalterati  $X_1, X_2, X_3, X_4$  mentre  $X_5$  e  $X_6$  cambiano di segno. Lo stesso scambio lascia invariate le  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  mentre fa cambiare di segno ad  $\varepsilon_5$  e ad  $\varepsilon_6$ . Ne segue che per lo scambio di  $\mathbf{i}_1$  in  $-\mathbf{i}_1$  restano inalterati tutti i coefficienti  $m_{rs}$  salvo quelli corrispondenti a termini di  $W$  contenenti soltanto  $X_5$  o soltanto  $X_6$  al primo grado, vale a dire  $m_{15}, m_{25}, m_{35}, m_{45}, m_{16}, m_{26}, m_{36}, m_{46}$ . Supposto allora che in  $O$  (che possiamo far coincidere con un punto qualunque del sistema) la struttura elastica del solido ammetta il piano  $O \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$  come piano di simmetria, ipotesi che corrisponde a supporre che gli  $m_{rs}$  restino tutti inalterati per lo scambio di  $\mathbf{i}_1$  in  $-\mathbf{i}_1$ , dall'osservazione premessa risulta subito che condizione necessaria e sufficiente affinché ciò accada è che sia, in  $O$ ,  $m_{15} = m_{25} = m_{35} = m_{45} = m_{16} = m_{26} = m_{36} = m_{46} = 0$ . Ciò riduce il numero delle  $m_{rs}$  da 21 a 13.

In tali ipotesi  $\mu_1(O P_d)$  è un vettore diretto come  $\mathbf{i}_1$ , di intensità  $y_1 m_{11}$ ;  $s_{P_d}$  ha perciò la direzione di  $\mathbf{i}_1$ : la fibra centrale si allunga o si contrae ma non si flette.

Infine se, più in particolare, il corpo è isotropo (sempre supponendo  $\xi_1 \parallel \mathbf{i}_1$ ), se cioè si ha

$$(21) \quad \begin{cases} m_{16} = m_{26} = m_{36} = m_{46} = m_{56} = 0 \\ m_{15} = m_{25} = m_{35} = m_{45} = 0 \\ m_{14} = m_{24} = m_{34} = 0, \end{cases}$$

la (18), proiettata sugli assi, dà

$$(22) \quad \begin{cases} -u_1 = m_{11} y_1 (X_1^* + \xi_{11} y_1) - \frac{y_1^2}{2} m_{11} \xi_{11} - \frac{1}{2} (m_{21} y_2^2 + m_{13} y_3^2) \cdot \xi_{11} \\ -u_2 = \xi_{11} m_{21} y_1 y_2 \\ -u_3 = \xi_{11} m_{31} y_1 y_3; \end{cases}$$

ne risulta che mentre la fibra centrale non subisce flessione, ogni fibra ad essa parallela si trasforma in una parabola (basta porre ad es. nelle (22)  $y_2 = 0, y_3 = \text{cost}$ ).

Torniamo ora al caso di un corpo anisotropo qualunque, ponendo però  $\xi_1 = 0$  cioè  $X_1 = \text{cost} = X_1^*$ : sono nulle allora tutte le forze di massa: siamo nel caso della trazione semplice. Dalla (12), applicata a questo caso particolare, discende che i punti della direttrice subiscono lo spostamento  $X_1^* \mu_1(O P_d)$  mentre, come risulta dalla (15'), si annullano la torsione e la flessione. Le componenti dello spostamento elastico possono ora del resto esplicitarsi assai semplicemente:

$$(23) \quad \begin{cases} -u_1 = m_{11} y_1 X_1^* + \left( \frac{m_{61}}{2} y_2 + \frac{m_{51}}{2} y_3 \right) X_1^* \\ -u_2 = \frac{m_{61}}{2} y_1 X_1^* + \left( m_{21} y_2 + \frac{m_{41}}{2} y_3 \right) X_1^* \\ -u_3 = \frac{m_{51}}{2} y_1 X_1^* + \left( \frac{m_{41}}{2} y_2 + m_{31} y_3 \right) X_1^* ; \end{cases}$$

ne resta subito messo in evidenza che ogni sezione normale  $y_1 = c$  rimane piana ma cambia giacitura, rotando attorno alla retta

$$\begin{cases} y_1 = c \\ m_{61} y_2 + m_{51} y_3 = 0. \end{cases}$$

Dalle (23) discende inoltre

$$(24) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -X_1^* m_{11}, & \varepsilon_2 &= -X_1^* m_{21}, & \varepsilon_3 &= -X_1^* m_{31}, \\ \varepsilon_4 &= -X_1^* m_{41}, & \varepsilon_5 &= -X_1^* m_{51}, & \varepsilon_6 &= -X_1^* m_{61}. \end{aligned}$$

Se misuriamo perciò la deformazione di un parallelepipedo retto ritagliato nel nostro sistema cristallino e soggetto a pressione o trazione semplice sulle facce parallele al piano  $\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$ , si possono subito ricavare i moduli  $m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15}, m_{16}$ . Sollecitando invece allo stesso modo le facce parallele al piano  $\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2$ , si ricavano  $m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{24}, m_{25}, m_{26}$ , e sollecitando infine la terza coppia di facce si calcoleranno  $m_{31}, m_{32}, m_{33}, m_{34}, m_{35}, m_{36}$ . Si arriva così a determinare, come è noto, 15 dei 21 moduli di elasticità (7).

b) *Torsione di un cilindro ellittico.* Conservando le convenzioni e le notazioni sopra adottate, supponiamo ora che il cilindro di asse  $y_1$ , abbia sezione ellittica di semiassi  $a_2, a_3$  diretti come gli assi  $y_2, y_3$ , rispettivamente, e sia soggetto a torsione. I valori dello stress possono in tal caso senz'altro identificarsi, per la sua linearità e per la sua conseguente indipendenza dalla costituzione del materiale, con i ben noti valori che ad esso competono nella torsione di un cilindro ellittico isotropo:

$$(25) \quad X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0; \quad X_5 = 2 \frac{M_1}{\pi a_2^3 a_3} y_2; \quad X_6 = - \frac{2 M_1}{\pi a_3^3 a_2} y_3$$

ove  $M_1$  è il momento torcente. Si ha in corrispondenza, secondo la (11), la seguente espressione dello spostamento elastico

$$(26) \quad \begin{aligned} -\mathbf{s}_P &= -\frac{y_1^2}{2} m_{15} \frac{q}{a_2} \mathbf{i}_2 + \frac{y_1^2}{2} m_{16} \frac{q}{a_3} \mathbf{i}_3 + y_1 \left[ \left( \frac{q}{a_2} \mathbf{i}_2 \wedge \mu_5 \mathbf{i}_1 \right) \wedge P_d P \right] - \\ &- y_1 \left[ \left( \frac{q}{a_3} \mathbf{i}_3 \wedge \mu_6 \mathbf{i}_1 \right) \wedge P_d P \right] + \frac{q}{a_2} \mathbf{i}_2 \times P_d P \cdot \mu_5 P_d P - \end{aligned}$$

---

(7) Si cfr. ad es. R. MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici.*

$$\begin{aligned}
 & -\frac{q}{a_3^2} \mathbf{i}_3 \times P_d P \cdot \mu_6 P_d P - \frac{1}{2} P_d P \times \mu_5 P_d P \cdot \frac{q}{a_2^2} \mathbf{i}_2 + \\
 & + \frac{1}{2} P_d P \times \mu_6 P_d P \cdot \frac{q}{a_3^2} \mathbf{i}_3
 \end{aligned}$$

ove si è posto per brevità  $q = \frac{2M_1}{\pi a_2 a_3}$ . La decomposizione (12) si specifica ora così:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & -s_{P_d} = -\frac{y_1^2}{2} \left( m_{15} \frac{q}{a_2^2} i_2 - m_{16} \frac{q}{a_3^2} i_3 \right) \\
 & -\mathbf{n}'_P = 0 \\
 & y_1 \boldsymbol{\omega} \wedge P_d P \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{q}{a_2^2} \mathbf{i}_2 \wedge \mu_5 \mathbf{i}_1 - \frac{q}{a_3^2} \mathbf{i}_3 \wedge \mu_6 \mathbf{i}_1 \\
 & -\mathbf{n}'_P = \left( \frac{q}{a_2^2} \mathbf{i}_2 \times P_d P \right) \mu_5 (P_d P) - \left( \frac{q}{a_3^2} \mathbf{i}_3 \times P_d P \right) \mu_6 P_d P - \\
 & \quad - \frac{1}{2} (P_d P) \times \mu_5 (P_d P) \frac{q}{a_2^2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{2} (P_d P) \times \mu_6 (P_d P) \mathbf{i}_3.
 \end{aligned} \right.$$

La costante  $\omega_{T_1}$  che misura la torsione attorno a  $\mathbf{i}_1$  è data da

$$(28) \quad \omega_{T_1} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_1 = \frac{M_1}{\pi a_2 a_3} \left( \frac{m_{55}}{a_2^2} + \frac{m_{66}}{a_3^2} \right).$$

Moltiplicando la (26) scalarmente per  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  si ha come espressione delle componenti di spostamento

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & -u_1 = y_1 \left( m_{15} \frac{q}{a_2^2} y_2 - m_{16} \frac{q}{a_3^2} y_3 \right) + \frac{q y_2}{2 a_2^2} [m_{65} y_2 + m_{55} y_3] - \frac{q y_3}{2 a_3^2} (m_{66} y_2 + m_{65} y_3) \\
 & -u_2 = -\frac{y_1^2}{2} m_{15} \frac{q}{a_2^2} - y_1 y_3 \left[ q \left( \frac{m_{55}}{2 a_2^2} + \frac{m_{66}}{2 a_3^2} \right) \right] + \frac{q y_2}{a_2^2} [m_{25} y_2 + \frac{m_{45}}{2} y_3] - \\
 & \quad - \frac{q y_3}{a_3^2} (m_{26} y_2 + \frac{m_{46}}{2} y_3) - \frac{1}{2} P_d P \times \mu_5 (P_d P) \frac{q}{a_2^2} \\
 & -u_3 = \frac{y_1^2}{2} m_{16} \frac{q}{a_3^2} + y_1 y_2 q \left( \frac{m_{55}}{2 a_2^2} + \frac{m_{66}}{2 a_3^2} \right) + \frac{q}{a_2^2} y_2 \left( \frac{m_{45}}{2} y_2 + m_{35} y_3 \right) - \\
 & \quad - \frac{q}{a_3^2} y_3 \left( \frac{m_{46}}{2} y_2 + m_{36} y_3 \right) + \frac{1}{2} P_d P \times \mu_6 (P_d P) \frac{q}{a_3^2}.
 \end{aligned} \right.$$

Tenuto conto della infinitesimalità della trasformazione, possiamo dire che la sezione piana  $y_1 = \text{cost}$  si trasforma nella superficie  $Y_1 = u_1$  (pur di assumere come piano di riferimento il piano stesso della sezione) ossia nel paraboloido iperbolico di equazione

$$(30) \quad Y_1 = \frac{q}{2} \left\{ \left( \frac{y_2^2}{a_2^2} - \frac{y_3^2}{a_3^2} \right) m_{65} + \left( \frac{m_{55}}{a_2^2} - \frac{m_{66}}{a_3^2} \right) y_2 y_3 \right\}.$$

Il piano  $y_1 = 0$  (cioè il piano originario della sezione) risulta tangente al paraboloido; l'equazione complessiva delle due rette  $r$  ed  $s$  secondo le quali esso interseca il paraboloido stesso, risulta

$$(31) \quad m_{65} \left( \frac{y_2^2}{a_2^2} - \frac{y_3^2}{a_3^2} \right) + \left( \frac{m_{55}}{a_2^2} - \frac{m_{66}}{a_3^2} \right) y_2 y_3 = 0$$

da cui possono ricavarsi i due loro coefficienti direttivi.

Dalla misura sperimentale di questi e di  $\omega_{T_1}$  possono ricavarsi altrettante relazioni tra i moduli  $m_{55}$ ,  $m_{56}$ ,  $m_{66}$ .

In un cilindro circolare ( $a_2 = a_3 = a$ ) le due rette  $r$  ed  $s$  sono ortogonali e la (28) e la (31) più semplicemente danno, indicato con  $\vartheta_1$  l'angolo che l'una, o l'altra, delle due rette forma con l'asse  $y_2$ ,

$$(32) \quad \omega_{T_1} = \frac{M_1}{\pi a^4} (m_{55} + m_{66}), \quad \text{tang } 2 \vartheta_1 = \frac{2 m_{65}}{m_{66} - m_{55}}.$$

Se del materiale in esame si ritagliano invece cilindri circolari con generatrici parallele agli assi  $i_2$  o  $i_3$  si ricava rispettivamente

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{T_2} = \frac{M_2}{\pi a^4} (m_{66} + m_{44}) \\ \text{tang } 2 \vartheta_2 = \frac{2 m_{46}}{m_{44} - m_{66}} \end{array} \right. \quad (34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{T_3} = \frac{M_3}{\pi a^4} (m_{44} + m_{55}) \\ \text{tang } 2 \vartheta_3 = \frac{2 m_{54}}{m_{55} - m_{44}} \end{array} \right.$$

Dalle misure sperimentali di  $\omega_{T_i}$ ,  $\text{tg } 2 \vartheta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e dalle relazioni (32) (33) (34) si può calcolare il valore dei sei moduli  $m_{44}$ ,  $m_{55}$ ,  $m_{66}$ ,  $m_{56}$ ,  $m_{64}$ ,  $m_{45}$ . Si può dunque arrivare alla completa determinazione dei 21 moduli di elasticità con sole esperienze di trazione o di torsione.

Per completare ora lo studio della deformazione di un solido elastico anisotropo soggetto a torsione, esaminiamo la curva trasformata dell'asse del cilindro. Applicate le (29) ai punti dell'asse ed eliminato tra esse  $y_1$  si

ricavano le equazioni

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{x_2}{x_3} = -\frac{m_{15}}{m_{16}} \frac{a_3^2}{a_2^2} \\ x_2 = -\frac{q}{a_2^2} m_{15} \frac{x_1^2}{2} \end{cases}$$

rappresentanti una parabola contenuta in un piano per l'asse  $\mathbf{i}_1$ . Le differenze essenziali di comportamento tra un cilindro anisotropo e un cilindro isotropo nel caso della torsione risultano le seguenti:

1) in un cilindro circolare omogeneo anisotropo soggetto a torsione una generica sezione normale non resta piana come nel caso di isotropia ma si trasforma in una superficie del secondo ordine;

2) l'asse di torsione non resta generalmente immutato come nel caso di isotropia, ma si trasforma in una parabola contenuta in un piano passante per la posizione originaria dell'asse medesimo (basta tuttavia che la struttura elastica del corpo ammetta in ogni suo punto il piano parallelo a  $\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$  come piano di simmetria, ciò che comporta  $m_{15} = m_{16} = 0$ , perchè l'asse di torsione resti immutato).

c) *Flessione uniforme di un cilindro elastico omogeneo anisotropo di sezione arbitraria.* Dall'analogo problema per i solidi isotropi si ha

$$(36) \quad X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0; \quad X_1 \neq 0 = -k y_3$$

tensioni valide anche nel caso di anisotropia, stante la loro linearità. Le componenti dello spostamento elastico di  $P$  si scrivono in questo caso, con riferimento alla formula (11),

$$(37) \quad \begin{cases} -u_1 = -k m_{11} y_1 y_3 - k y_3 \left( \frac{m_{61}}{2} y_2 + \frac{m_{51}}{2} y_3 \right) \\ -u_2 = -k \frac{m_{61}}{2} y_1 y_3 - k y_3 \left( m_{31} y_3 + \frac{m_{41}}{2} y_3 \right) \\ -u_3 = \frac{y_1^2}{2} m_{11} k + k \frac{m_{61}}{2} y_2 y_3 - k y_3 \left( \frac{m_{41}}{2} y_2 + m_{31} y_3 \right) + \\ \quad + \frac{1}{2} P_d P \times \mu_1 (P_d P) \cdot k. \end{cases}$$

Appare da esse che una sezione normale non resta generalmente piana, come accade nel caso di isotropia, ma si trasforma nella quadrica di equazione (riferita al piano originario della sezione stessa come piano coordinato)

$$Y_1 = -k \left( y_3^2 \frac{m_{54}}{2} + \frac{m_{64}}{2} y_2 y_3 \right)$$

Quanto all'asse, esso si deforma in una parabola contenuta nel piano  $y_1 y_3$  come nel caso dei solidi isotropi

$$(38) \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\frac{x_1^2}{2} k m_{44}.$$

Le (12) si particolarizzano nelle formule seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{s}_{P_d} = -m_{44} k \frac{y_1^2}{2} \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{n}'_P = 0 \\ y_1 \boldsymbol{\omega} \wedge P_d P \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\omega} = k \mathbf{i}_3 \wedge \mu_1 \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{n}_P = k y_3 \mu_1 (P_d P) - \frac{1}{2} k P_d P \times \mu_1 (P_d P) \cdot \mathbf{i}_3. \end{array} \right.$$

Osserviamo in proposito:

- 1) manca la trasformazione omografica caratterizzata da  $\mathbf{n}'_P$
- 2) il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  si decompone nella somma:  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_T + \boldsymbol{\omega}_f$  con  $\boldsymbol{\omega}_T = k \frac{m_{64}}{2} \mathbf{i}_1$  e  $\boldsymbol{\omega}_f = -k m_{44} \mathbf{i}_2$ ; si ha cioè una torsione attorno all'asse  $\mathbf{i}_1$  di modulo  $k \frac{m_{64}}{2}$  e una flessione attorno all'asse  $\mathbf{i}_2$ , di modulo  $k m_{44}$ .