ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LESKY PETER

Determinazione degli stati di tensione piana in un cilindro elastico a sezioni ellittiche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 3-4 (1952), p. 255-267

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_3-4_255_0>

DETERMINAZIONE DEGLI STATI DI TENSIONE PIANA IN UN CILINDRO ELASTICO A SEZIONI ELLITTICHE (*)

di **Lesky Peter** (Roma)

1. — A. Ghizzetti dimostra nel suo lavoro « Sugli stati di tensione piana in un corpo elastico » [1] che il problema elastico piano, nel quale le componenti degli sforzi verificano le

$$t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0\,; \quad t_{xx}\, t_{yy}\, t_{xy} \text{ indipendenti da } z \tag{1}$$

è più elementare di quello delle deformazioni piane e dipende soltanto dalla determinazione di una funzione armonica e di tre costanti arbitrarie.

Tenendo conto della (1) le componenti u, v, w dello spostamento sono

$$\begin{aligned} u &= \alpha z^2 - \alpha x^2 + 2\frac{\beta}{\sigma} x y - \frac{\alpha}{\sigma} y^2 + \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{\sigma} \gamma x + 2 \frac{1+\sigma}{E} \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x y) - \varphi(x y)\,; \\ v &= \beta z^2 - \frac{\beta}{\sigma} x^2 + 2\frac{\alpha}{\sigma} x y - \beta y^2 + \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{\sigma} \gamma y - 2 \frac{1-\sigma}{E} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x y) + \psi(x y)\,; \\ w &= -2 z (\alpha x + \beta y + \gamma) \end{aligned} \tag{2}$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo — Roma.

[1] Annali di Matematica pura e applicata 1949, Vol. I, Serie IV.

e i corrispondenti sforzi sono dati dalle formule:

$$t_{xx} = \frac{E}{\sigma}(2\beta y + \gamma) + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$(3) \qquad t_{yy} = \frac{E}{\sigma}(2\alpha x + \gamma) - 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$t_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Perchè il sistema degli sforzi (3) sia in equilibrio, deve essere, per le componenti delle forze di massa $X(x\,y)$, $Y(x\,y)$, $Z(x\,y)$,

$$X = -\frac{\partial F(x\,y)}{\partial y}; \quad Y = \frac{\partial F(x\,y)}{\partial x}; \quad Z = 0.$$

Nelle formule (2) (3) $\alpha\,\beta\,\gamma$ sono costanti arbitrarie, $\Phi(x\,y)$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione

$$\Delta_2 \Phi = F(x\,y)$$

e $\varphi + i\psi$ è una arbitraria funzione analitica di $x + i y$, σ è il coefficiente di POISSON e E designa il modulo di YOUNG.

Facendo seguito al lavoro di M. G. PLATONE « Sugli stati di tensione piana in un corpo cilindrico elastico » [2] nel quale si trova la soluzione di un problema particolare di tensione piana in un cilindro retto elastico le cui sezioni con i piani $z = \text{cost.}$ $(0 \leq z \leq h)$ sono cerchi, mi propongo di risolvere il problema per il caso, ove queste sezioni sono ellissi.

D sia il dominio piano sezione del cilindro coi piani $z = \text{const.}$, FD la sua frontiera, s l'ascissa curvilinea su FD e n la normale interna su FD. Calcoliamo in tutto il cilindro l'espressione degli sforzi sotto l'ipotesi che sia assegnata in ogni punto di FD la componente normale dello sforzo

$$(4) \qquad t_{nn} = T(s).$$

In virtù della nota formula

$$t_{nn} = t_{xx}\cos^2(n\,x) + 2\,t_{xy}\cos(n\,x)\cos(n\,y) + t_{yy}\cos^2(n\,y)$$

---

[2] Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 1951, Vol. V, Serie III.

ponendo

$$\frac{d}{d\nu} = \frac{\partial}{\partial x} \cos 2\,(n\,x) + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} 2\,(n\,x)$$

$$\frac{d}{d\nu'} = -\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen} 2\,(n\,x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos 2\,(n\,x)$$

si ottiene, usando le (3)

$$t_{un} = \frac{E}{\sigma} [2\,\alpha\,x \operatorname{sen}^2 (n\,x) + 2\,\beta\,y \cos^2 (n\,x) + \gamma] +$$
$$+ \frac{d}{d\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{d}{d\nu'} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{E}{1+\sigma} \frac{d\varphi}{d\nu}.$$

Sulla frontiera FD è data $t_{nn} = T(s)$, ne segue quindi

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{1+\sigma}{E} \left\{ \frac{E}{\sigma} [2\,\alpha\,x \operatorname{sen}^2 (n\,x) + 2\,\beta\,y \cos^2 (n\,x) + \gamma] + \right.$$
$$\left. + \frac{d}{d\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{d}{d\nu'} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - T(s) \right\} \equiv f(s)\,; \tag{5}$$

cioè il problema è ridotto alla costruzione di una funzione armonica φ in D, la cui derivata obliqua su FD secondo la direzione ν è data dalla (5).

2. — Fra le coordinate confocali ellittiche sussistono le relazioni

$$x = \left(\frac{1+q}{2}\,\varrho + \frac{1-q}{2}\,\frac{1}{\varrho}\right) \cos\theta \qquad \varrho_0 \leqq \varrho \leqq 1$$
$$y = \left(\frac{1+q}{2}\,\varrho - \frac{1-q}{2}\,\frac{1}{\varrho}\right) \operatorname{sen}\theta \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi. \tag{6}$$

Per $\varrho = 1$ si ottiene l'ellisse FD il cui asse maggiore è uno e l'asse minore è q. Il valore

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{1-q}{1+q}}$$

corrisponde all'ellisse degenerato nel segmento focale FF'. Ponendo

$$u = \frac{1+q}{2}\,\varrho + \frac{1-q}{2}\,\frac{1}{\varrho}\,; \quad v = \frac{1+q}{2}\,\varrho - \frac{1-q}{2}\,\frac{1}{\varrho}\,,$$

si trova, tenuto conto delle (6)

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{1}{v^2\cos^2\theta + u^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\left\{\varrho\, v\cos\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + u\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right\}.$$

Infine si pone

$$F(\theta) = f(\theta)\,[q^2\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta] \tag{7}$$

e il problema in coordinate ellittiche confocali si presenta nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 & (\text{per } \varrho_0 < \varrho < 1) \\[2ex] \varrho\cos\theta\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \mathrm{sen}\,\theta\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = F(\theta) & (\text{per } \varrho = 1), \end{cases} \tag{8}$$

ove $F(\theta)$ è una data funzione che supponiamo continua ed a variazione limitata in $(0, 2\pi)$ con l'ulteriore condizione $F(0) = F(2\pi)$.

Le (8) non sono sufficiente per determinare univocamente la soluzione. Come ha indicato A. GHIZZETTI nel lavoro « Sui problemi di DIRICHLET e di NEUMANN per l'ellisse » [3] la φ deve soddisfare alle ulteriori condizioni

$$\begin{cases} \text{per } \varrho = \varrho_0 \text{ la } \varphi(\varrho\,\theta) \text{ deve essere una funzione pari di } \theta \\[2ex] \text{per } \varrho = \varrho_0 \text{ la } \dfrac{\partial\varphi(\varrho\,\theta)}{\partial\varrho} \text{ deve essere una funzione dispari di } \theta. \end{cases} \tag{9}$$

Inoltre la $F(\theta)$ deve soddisfare a delle condizioni di compatibilità, che saranno indicate in seguito, le quali porteranno a fissare i valori di α, β e γ delle formule (5).

3. — Proponiamoci di determinare i coefficienti di FOURIER della $\varphi(\varrho\,\theta)$ come funzione di Θ. Tali coefficienti di FOURIER sono

$$a_k(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\varrho\,\theta)\cos k\theta\,d\theta \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\varrho\,\theta)\,\mathrm{sen}\,k\theta\,d\theta \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

---

[3] Rendiconti del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, Vol. XX (1951).

e soddisfano alle equazioni differenziali

$$a_k''(\varrho) + \frac{1}{\varrho}\, a_k'(\varrho) - \frac{k^2}{\varrho^2}\, a_k(\varrho) = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k''(\varrho) + \frac{1}{\varrho}\, b_k'(\varrho) - \frac{k^2}{\varrho^2}\, b_k(\varrho) = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

le cui soluzioni sono

$$a_0(\varrho) = A_0 + B_0 \log \varrho \qquad \begin{array}{l} a_k(\varrho) = A_k\, \varrho^k + B_k\, \varrho^{-k} \\ b_k(\varrho) = C_k\, \varrho^k + D_k\, \varrho^{-k} \end{array} \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Per determinare le costanti arbitrarie $A_k\, B_k\, C_k$ e D_k osserviamo che le (9) si traducono nelle $a_0'(\varrho_0) = 0$; $b_k(\varrho_0) = 0$; $a_k'(\varrho_0) = 0$, vale a dire nelle

$$B_0 = 0\,; \quad B_k = A_k\, \varrho_0^{2k}\,; \quad D_k = - C_k\, \varrho_0^{2k}\,. \tag{10}$$

Rimane la determinazione delle costanti A_k e C_k in base alla condizione per $\varrho = 1$. Posto per $\varrho = 1$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[q \cos\theta\, \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \operatorname{sen}\theta\, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right] \begin{matrix}\cos k\theta \\ \operatorname{sen} k\theta\end{matrix}\; d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta) \begin{matrix}\cos k\theta \\ \operatorname{sen} k\theta\end{matrix}\; d\theta = \begin{matrix} g_k & k = 0, 1, 2, \dots \\ h_k & k = 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

si ottiene

$$q\,[a_{k+1}'(1) + a_{k-1}'(1)] - [(k+1)\, a_{k+1}(1) - (k-1)\, a_{k-1}(1)] = 2\, g_k \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$q\,[b_{k+1}'(1) + b_{k-1}'(1)] - [(k+1)\, b_{k+1}(1) - (k-1)\, b_{k-1}(1)] = 2\, h_k \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

e si trova per

$$\begin{aligned} &k = 0: \quad A_1 = -\frac{g_0}{2(1-q)}\,; \quad k = 1: \quad A_2 = -\frac{g_1}{(1-q)(1+\varrho_0^2)}\,, \\ &\qquad\qquad C_2 = -\frac{h_1}{(1-q)(1-\varrho_0^2)}\,; \\ &k \geqq 2: \quad \begin{aligned} &(1+q)(k-1)\, A_{k-1} - (1-q)(k+1)\, A_{k+1} = \frac{2\, g_k}{1+\varrho_0^{2k}}\,, \\ &(1+q)(k-1)\, C_{k-1} - (1-q)(k+1)\, C_{k+1} = \frac{2\, h_k}{1-\varrho_0^{2k}}\,. \end{aligned} \end{aligned} \tag{11}$$

Si ricava facilmente

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
A_{2l} &= -\frac{1}{l(1+q)} \sum_{k=1}^{l} \frac{g_{2k-1}}{\varrho_0^{2l-2k+2}(1+\varrho_0^{4k-2})}\,; \\
A_{2l+1} &= -\frac{1}{(2\,l+1)(1+q)} \left\{ \frac{g_0}{2\,\varrho_0^{2l+2}} + 2 \sum_{k=1}^{l} \frac{g_{2k}}{\varrho_0^{2l-2k+2}(1+\varrho_0^{4k})} \right\} \\
C_{2l} &= -\frac{1}{l(1+q)} \sum_{k=1}^{l} \frac{h_{2k-1}}{\varrho_0^{2l-2k+2}(1-\varrho_0^{4k-2})}\,; \\
C_{2l+1} &= \frac{C_1}{(2\,l+1)\,\varrho_0^{2l}} - \frac{2}{(2\,l+1)(1+q)} \sum_{k=1}^{l} \frac{h_{2k}}{\varrho_0^{2l-2k+2}(1-\varrho_0^{4k})}\,.
\end{aligned}
$$

Osserviamo ora che per i coefficienti di FOURIER devono valere

$$
\lim_{k\to\infty} a_k(\varrho) \to 0\,; \quad \lim_{k\to\infty} b_k(\varrho) \to 0
$$

per ogni ϱ di $(0\,,1)$. Siccome si ha $a_k(\varrho) = A_k(\varrho^k + \varrho_0^{2k}\varrho^{-k})$, $b_k(\varrho) = C_k(\varrho^k - \varrho_0^{2k}\varrho^{-k})$ si vede che le predette condizioni sono verificate per $\varrho = 1$ soltanto se $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} C_k = 0$ e questo dà le seguenti quattro condizioni

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{2k-1}}{1+\varrho_0^{4k-2}}\,\varrho_0^{2k-2} = 0\,; \quad \frac{g_0}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{2k}}{1+\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k} = 0\,; \\
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{2k-1}}{1-\varrho_0^{4k-2}}\,\varrho_0^{2k-2} = 0\,; \quad C_1 - \frac{2}{1+q}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{2k}}{1-\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k-2} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Le prime tre sono condizioni di compatibilità del nostro problema; l'ultima assegna il valore della costante C_1. Tenendo conto delle (13) si ottengono per le altre costanti le espressioni

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
A_{2l+1} &= \frac{2}{(2\,l+1)(1+q)} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{g_{2k}}{1+\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k-2l-2}\,, \\
A_{2l} &= \frac{1}{l(1+q)} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{g_{2k-1}}{1+\varrho_0^{4k-2}}\,\varrho_0^{2k-2l-2}\,, \\
C_{2l+1} &= \frac{2}{(2\,l+1)(1+q)} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{h_{2k}}{1-\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k-2l-2}\,, \\
C_{2l} &= \frac{1}{l(1+q)} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{h_{2k-1}}{1-\varrho_0^{4k-2}}\,\varrho_0^{2k-2l-2}
\end{aligned}
$$

e la soluzione del problema ha la forma

$$\varphi(\varrho\,\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{4\,\varrho^l\,\varrho_0^{2k-2}}{l\,(1+q)}\left[\frac{g_{l+2k-1}\cos l\,\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} + \frac{h_{l+2k-1}\,\mathrm{sen}\,l\,\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]\right.$$

(15)

$$\left. + \frac{4\,\varrho^{-l}\,\varrho_0^{2l+2k-2}}{l\,(1+q)}\left[\frac{g_{l+2k-1}\cos l\,\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{h_{l+2k-1}\,\mathrm{sen}\,l\,\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]\right\}$$

e con una trasformazione formale

$$\varphi(\varrho\,\theta) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{2\varrho^l\,\varrho_0^{2k-2}}{(1+q)\,l\,(1-\varrho_0^{4l+8k-4})}\left[\cos\left[(2\,k-1)\,\tau + l\,(\tau-\theta)\right] -\right.\right.$$

(16)

$$\left. - \varrho_0^{2l+4k-2}\cos\left[(2_{2k-1})\,\tau + l\,(\tau+\theta)\right]\right] + \frac{2\,\varrho^{-l}\,\varrho_0^{2l+2k-2}}{(1+q)\,l\,(1-\varrho_0^{4l+8k-4})}\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\cos\left[(2\,k-1)\,\tau + l\,(\tau+\theta)\right] - \varrho_0^{2l+4k-2}\cos\left[(2\,k-1)\,\tau + l\,(\tau-\theta)\right]\right]\right\}d\,\tau$$

ove la serie doppia rappresenta la funzione di GREEN $G(\varrho\,\theta\,\tau)$ del problema. Scriviamo ancora le condizioni di compatibilità nella forma

$$\int_0^{2\pi} F(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cos 2\,k\,\tau}{1+\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k} + 1\right]d\,\tau = 0$$

(17)
$$\int_0^{2\pi} F(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\,k+1)\,\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}}\,(1+\varrho_0^2)\,\varrho_0^{2k} + \cos\tau\right]d\,\tau = 0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} F(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,(2\,k+1)\,\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}}\,(1-\varrho_0^2)\,\varrho_0^{2k} + \mathrm{sen}\,\tau\right]d\,\tau = 0$$

4. — Perciò se il nostro problema, con le tre condizioni di compatibilità, ammette soluzione, tale soluzione è necessariamente unica e non può che essere data dalla formula (15) o (16). Stabiliamo ora il teorema d'esistenza verificando che effettivamente la (15) o (16) soddisfano a tutte le

condizioni del problema, nell'ipotesi che valgano le (17). A tale scopo dobbiamo dapprima dimostrare che la serie che rappresenta $\varphi(\varrho\,\theta)$ converge uniformemente in D e su FD e che le sue derivate parziali del primo e del secondo ordine convergono uniformemente in ogni insieme chiuso in terno a D.

Consideriamo l'espressione (15). Facendo l'ipotesi che $F(\theta)$ sia a variazione limitata, per i suoi coefficienti di FOURIER si hanno le maggiorazioni

$$|g_l| < \frac{C}{l}; \qquad |h_l| < \frac{C}{l},$$

ove C è una costante positiva. Ne segue

$$\begin{aligned}(18)\quad &\left|\frac{4\,\varrho_0^{2k-2}}{1+q}\left\{\frac{\varrho^l}{l}\left[\frac{g_{l+2k-1}\cos l\,\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}+\frac{h_{l+2k-1}\,\mathrm{sen}\,l\,\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]+\left(\frac{\varrho_0}{l}\right)^l\frac{\varrho_0^l}{l}\left[\frac{g_{l+2k-1}\cos l\,\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.-\frac{h_{l+2k-1}\,\mathrm{sen}\,l\,\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]\right\}\right| < D\left[\frac{\varrho^l}{l\,(l+2k-1)}+\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^l\frac{\varrho_0^l}{l\,(l+2\,k-1)}\right]\end{aligned}$$

ove D è una costante positiva opportuna. Si vede immediatamente che la serie (18) converge per $\varrho_0 \leqq \varrho \leqq 1$. Ma questo significa, che la serie (15) converge assolutamente e quindi anche uniformemente in D e su FD.

Per le derivate parziali rispetto ϱ si ottiene

$$\frac{\partial\,\dfrac{4\,\varrho_0^{2k-2}}{1+q}\{\ldots\}}{\partial\,\varrho} < E\left[\frac{\varrho^{l-1}}{l+2k-1}+\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{l+1}\frac{\varrho_0^{l-1}}{l+2k-1}\right];$$

$$\frac{\partial^2\,\dfrac{4\,\varrho_0^{2k-2}}{1+q}\{\ldots\}}{\partial\,\varrho^2} < F\left[\varrho^{l-2}+\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{l+2}\varrho_0^{l-2}\right]$$

ove E e F sono costanti positive. Analoghe formule si trovano per le derivate rispetto a θ. Per $\varrho_0 \leqq \varrho \leqq \varrho^* < 1$ sono convergenti anche queste maggioranti. Su FD invece ($\varrho = 1$) la maggiorante per le prime derivate non è convergente.

Per verificare le condizioni sul contorno esistono due possibilità. Si suppone $F(\theta)$ derivabile per $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, allora per i coefficienti di FOURIER valgono le maggiorazioni

$$|G_l| < \frac{C}{l^2}; \qquad |H_l| < \frac{C}{l^2}$$

che assicurano ovviamente la convergenza uniforme delle serie che rappresentano le derivate prime anche sul contorno.

Ma si può fare a meno di questa ipotesi aggiuntiva, ragionando come segue.

Ponendo

$$u(\varrho\,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\frac{d}{d\nu}\,G(\varrho\,\theta\,\tau)\,d\tau$$

si deve mostrare che vale la

$$\lim_{P\to Q} u(P) = F(Q) \tag{19}$$

ove P indica un punto qualsiasi di D e Q un punto qualsiasi su FD. La derivata della funzione di Green rispetto a ν in D è

$$\frac{dG}{d\nu} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Bigg\{\varrho^{l+1}\varrho_0^{2k-2}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]$$

$$-\varrho^{1-l}\varrho_0^{2l+4k-2}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}-\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\operatorname{sen}(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]$$

$$-\varrho^{l-1}\varrho_0^{2k}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}-\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\operatorname{sen}(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]$$

$$+\varrho^{-l-1}\varrho^{2l+2k}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}-\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\operatorname{sen}(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]\Bigg\}.$$

Introducendo le condizioni di compatibilità (17) si trova

$$u(\varrho\,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\varrho^k\left[\frac{\cos k\tau\cos k\theta}{1+\varrho_0^{2k}}+\frac{\operatorname{sen} k\tau\operatorname{sen} k\theta}{1-\varrho_0^{2k}}\right]$$

$$+\varrho^{-k}\varrho_0^{2k}\left[\frac{\cos k\tau\cos k\theta}{1+\varrho_0^{2k}}-\frac{\operatorname{sen} k\tau\operatorname{sen} k\theta}{1-\varrho_0^{2k}}\right]\Bigg\}\,d\tau,$$

ma questa formula dà la soluzione del problema di DIRICHLET nel caso dell'ellisse, ove sono dati i valori della funzione $F(\theta)$ sulla frontiera FD (4). Questo significa che la condizione (19) è ovunqne soddisfatta.

5. — Individuata in D la funzione armonica $\varphi(\varrho\,\theta)$ a meno di una costante additiva procediamo al calcolo delle tre costanti $\alpha\,\beta\,\gamma$. Consideriamo il caso di forze di massa nulle. Si può porre (vedi 1).

$$F(x\,y) = 0\,; \qquad \Phi(x\,y) = 0\,,$$

in tale ipotesi per (5) si ha

$$F(\theta) = \frac{1+\sigma}{\sigma}\{\operatorname{sen} 2\,\theta\,(\beta\,q^3 \cos\theta + \alpha \operatorname{sen}\theta) + \gamma\,(q^2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\}$$

$$- \frac{1+\sigma}{E}\,T(\theta)\,(q^2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\,.$$

Applicando le tre condizioni della compatibilità si ottiene

$$\alpha = \frac{\sigma\,(1+3\,q^2)}{2\,q^2\,\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T(\tau)}{E}(q^2\cos^2\tau + \operatorname{sen}^2\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\,k+1)\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}}\,\varrho_0^{2k}(1+\varrho_0^2)+\cos\tau\right]d\,\tau$$

$$\beta = \frac{\sigma\,(3+q^2)}{2\,q^3\,\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T(\tau)}{E}(q^2\cos^2\tau + \operatorname{sen}^2\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2\,k+1)\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}}\,\varrho_0^{2k}(1-\varrho_0^2)+\operatorname{sen}\tau\right]d\,\tau$$

$$\gamma = \frac{\sigma\,(1+q^2)}{4\,q^2\,\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T(\tau)}{E}(q^2\cos^2\tau + \operatorname{sen}^2\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\,\cos 2\,k\,\tau}{1+\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k}+1\right]d\,\tau$$

e la $\varphi(\varrho\,\theta)$ diventa

$$\varphi(\varrho\,\theta) = A_0 + \frac{1+\sigma}{E\,\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)\,(q^2\cos^2\tau + \operatorname{sen}^2\tau)\,.$$

$$\cdot\Big\{-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(2\,k+1)\,\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}}\,\varrho_0^{2k}(1+\varrho_0^2)+\cos\tau\right]\frac{\cos 2\,\theta}{8\,q^2}\,[\varrho^2(1+q^2)+\varrho^{-2}(1-q^2)] +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sen}(2\,k+1)\,\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}}\,\varrho_0^{2k}(1-\varrho_0^2)+\operatorname{sen}\tau\right]\frac{\operatorname{sen} 2\,\theta}{8\,q}\,[\varrho^2(1+q)^2-\varrho^{-2}(1-q)^2]$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4\cos 2\,k\,\tau}{1+\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k}+1\right]\frac{(1-q^2)\cos\theta}{8\,q^2}\,[\varrho\,(1+q)+\varrho^{-1}(1-q)] - G(\varrho\,\theta\,\tau)\Big\}d\tau.$$

---

(4) M. PICONE « *Analisi superiore* » pag. 361 e. s. or nota (3).

Dalle espressioni delle

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{1}{\left(\frac{1+q}{2}\varrho\right)^2+\left(\frac{1-q}{2\varrho}\right)^2-\frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\cdot$$

$$\cdot\Bigg\{\varrho^{l+1}\varrho_0^{2k-2}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}+\frac{\mathrm{sen}(2k-1+l)\tau\,\mathrm{sen}(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]$$

$$-\varrho^{-l+1}\varrho_0^{2l+2k-2}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}-\frac{\mathrm{sen}(2k-1+l)\tau\,\mathrm{sen}(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]$$

$$-\varrho^{l-1}\varrho_0^{2k}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}+\frac{\mathrm{sen}(2k-1+l)\tau\,\mathrm{sen}(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]$$

$$+\varrho^{-l-1}\varrho_0^{2l+2k}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}-\frac{\mathrm{sen}(2k-1+l)\tau\,\mathrm{sen}(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]\Bigg\};$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{1}{\left(\frac{1+q}{2}\varrho\right)^2+\left(\frac{1-q}{2\varrho}\right)^2-\frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\cdot$$

$$\cdot\Bigg\{\varrho^{l+1}\varrho_0^{2k-2}\left[\frac{\mathrm{sen}(2k-1+l)\tau\cos(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}-\frac{\cos(2k-1+l)\tau\,\mathrm{sen}(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]$$

$$-\varrho^{-l+1}\varrho_0^{2l+2k-1}\left[\frac{\mathrm{sen}(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}+\frac{\cos(2k-1+l)\tau\,\mathrm{sen}(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]$$

$$-\varrho^{l-1}\varrho_0^{2k}\left[\frac{\mathrm{sen}(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}-\frac{\cos(2k-1+l)\tau\,\mathrm{sen}(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]$$

$$+\varrho^{-l-1}\varrho_0^{2l+2k}\left[\frac{\mathrm{sen}(2k-1+l)\tau\cos(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}+\frac{\cos(2k-1+l)\tau\,\mathrm{sen}(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]\Bigg\}$$

si ottengono le espressioni degli sforzi:

$$t_{xx}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T(\tau)\,(q^2\cos^2\tau+\mathrm{sen}^2\tau)\,.$$

$$\cdot\Bigg\{\frac{[\varrho^3(1+q)^3+\varrho^{-3}(1-\varrho)^3]\cos\theta-(1-q^2)\,[\varrho(1+q)+\varrho^{-1}(1-q)]\cos 3\theta}{8q^2\left[\left(\frac{1+q}{2}\varrho\right)^2+\left(\frac{1-q}{2\varrho}\right)^2-\frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta\right]}\,;$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}}\varrho_0^{2k}(1+\varrho_0^2)+\cos\tau\right]+$$

$$+\frac{3\left[\varrho^3(1+q)^3-\varrho^{-3}(1-q)^3\right]\operatorname{sen}\theta-3(1-q^2)\left[\varrho(1+q)-\varrho^{-1}(1-q)\right]\operatorname{sen}3\theta}{8q^3[\ldots]}\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2k+1)\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}}\varrho_0^{2k}(1-\varrho_0^2)+\operatorname{sen}\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{2q^2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cos 2k\tau}{1+\varrho_0^{4k}}\varrho_0^{2k}+1\right]+\frac{\partial G}{\partial x}\Bigg\}d\tau,$$

$$t_{yy}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T(\tau)(q^2\cos^2\tau+\operatorname{sen}^2\tau).$$

$$\cdot\left\{\frac{3\left[\varrho^3(1+q)^3+\varrho^{-3}(1-q)^3\right]\cos\theta-3(1-q^2)\left[\varrho(1+q)+\varrho^{-1}(1-q)\right]\cos3\theta}{8\left[\left(\frac{1+q}{2}\varrho\right)^2+\left(\frac{1-q}{2\varrho}\right)^2-\frac{1}{2}(1-q^2)\cos2\theta\right]}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}}\varrho_0^{2k}(1+\varrho_0^2)+\cos\tau\right]+$$

$$+\frac{\left[\varrho^3(1+q)^3+\varrho^{-3}(1-q)^3\right]\operatorname{sen}\theta-(1-q^2)\left[\varrho(1+q)-\varrho^{-1}(1-q)\right]\operatorname{sen}3\theta}{8q[\ldots]}\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2k+1)\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}}\varrho_0^{2k}(1-\varrho_0^2)+\operatorname{sen}\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cos2k\tau}{1+\varrho_0^{4k}}\varrho_0^{2k}+1\right]-\frac{\partial G}{\partial x}\Bigg\}d\tau,$$

$$t_{xy}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T(\tau)(q^2\cos^2\tau+\operatorname{sen}^2\tau).$$

$$\cdot\left\{\frac{\left[\varrho(1+q)-\varrho^{-1}(1-q)\right](1-q^2)\operatorname{sen}3\theta-\left[\varrho^3(1+q)^3-\varrho^{-3}(1-q)^3\right]\operatorname{sen}\theta}{8q^2\left[\left(\frac{1+q}{2}\varrho\right)^2+\left(\frac{1-q}{2\varrho}\right)^2-\frac{1}{2}(1-q^2)\cos2\theta\right]}\cdot\right.$$

$$\cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2\,k+1)\,\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}}\, \varrho_0^{2k} (1+\varrho_0^2) + \cos \tau \right] +$$

$$+ \frac{[\varrho\,(1+q) + \varrho^{-1}\,(1-q)]\,(1-q^2)\cos 3\,\theta - [\varrho^3\,(1+q)^3 + \varrho^{-3}\,(1-q)^3]\cos\theta}{8\,q\,[\ldots]} \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} (2\,k+1)\,\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}}\, \varrho_0^{2k} (1-\varrho_0^2) + \operatorname{sen} \tau \right] + \left.\frac{\partial\,G}{\partial\,y}\right\}\, d\,\tau\,.$$

È immediato constatare, che per $q = 1$, $\varrho_0 = 0$ tutte le formule precedenti si riducono a quelle date da M. G. PLATONE nel caso del cilindro a sezioni circolari (vedi op. cit. in (2)).