ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

LANDOLINO GIULIANO

**Su alcune relazioni integrali fra funzioni di Bessel di prima e di seconda specie**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 6, nº 1-2 (1952), p. 17-30

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_1-2_17_0>

# SU ALCUNE RELAZIONI INTEGRALI FRA FUNZIONI DI BESSEL DI PRIMA E DI SECONDA SPECIE

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa)

Qui di seguito sono contenute alcune ricerche preliminari ad uno studio in corso sugli zeri comuni a due funzioni di BESSEL, di prima e di seconda specie, oppure entrambe di seconda specie, di ordine diverso.

1. — Sia $\nu$ un numero reale. Chiamasi funzione di BESSEL (di prima specie) di ordine $\nu$ la funzione [1] (della variabile complessa $z$):

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

che è un integrale dell'equazione di BESSEL:

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0 . \tag{1}$$

Supporremo sempre, in quel che diremo, a meno che non si avverta esplicitamente del contrario, che la variabile $z$ assuma solo valori reali e la indicheremo, perciò, d'ora in poi, con $x$. Intenderemo, sempre, nel seguito, $x > 0$.

Poniamo, nella (1), $y = \sqrt{x}\, u$. Essa si muta nell'equazione:

$$u'' + \left[1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right] u = 0 . \tag*{[2]}$$

(1) G. N. WATSON: *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge, University Press, 2nd edition, 1944, p. 40.

M. PICONE: *Appunti di Analisi Superiore,* Rondinella Napoli, 1940, p. 485.

COURANT UND HILBERT Methoden der Mathematischen Physik I Springer, Berlin, 1924, p. 396.

Si ponga:

$$u_1(x) = \sqrt{x}\, J_\mu(x) \quad , \quad u_2(x) = \sqrt{x}\, J_\lambda(x) \quad , \quad v_1(x) = \sqrt{x}\, Y_\mu(x),$$

essendo $\lambda$ e $\mu$ due numeri reali, assegnati, con $\mu$ positivo o nullo e $\lambda > \mu$ e dove $Y_\mu(x)$ significa la funzione (di ordine $\mu$) di WEBER canonica (²) (di seconda specie), la quale, quando $\mu = n$ è un intero positivo o nullo, è legata alla funzione di NEUMANN $Y^{(n)}(x)$ dalla relazione (³)

$$Y^{(n)}(x) = \frac{\pi}{2} Y_n(x) + (\log 2 - \gamma)\, J_n(x)$$

dove

$$\gamma = \lim_{n+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

è la nota costante di EULERO-MASCHERONI.

Poichè le funzioni $u_1(x)$ e $u_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione (2) dove si faccia, rispettivamente, $\nu = \mu$, $\nu = \lambda$, si ha:

$$u_1''(x) + \left[1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4x^2}\right] u_1(x) \equiv 0 \tag{3}$$

$$u_2''(x) + \left[1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right] u_2(x) \equiv 0 \tag{4}$$

e moltiplicando la (3) per $u_2(x)$ e la (4) per $u_1(x)$, quindi sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$\left\{u_1'(x)\, u_2(x) - u_1(x)\, u_2'(x)\right\}' + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{x^2}\, u_1(x)\, u_2(x) \equiv 0\,. \tag{5}$$

---

(²) WATSON, loc. cit. p. 64. La funzione di WEBER $Y_\mu(x)$ è indicata in COURANT UND HILBERT, loc. cit. p. 389, formula (8), con $N_\mu(x)$ ed è detta di NEUMANN. Quando $\mu = n$ è un intero positivo o nullo, la funzione di WEBER è legata alla funzione $\mathrm{Y}_n(x)$ di HANKEL dalla relazione $Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Y}_n(x)$. Per questo cfr. WATSON, loc. cit. p 64 e COURANT UND HILBERT, loc. cit. p. 399, dove la funzione di HANKEL, $\mathrm{Y}_n(x)$, è indicata con $Y_n(x)$. Notiamo che PICONE, loc. cit. p. 493 chiama di NEUMANN la funzione di HANKEL che indidica, come COURANT UND HILBERT, con il simbolo, $Y_n(x)$. A scanso di equivoci cade qui opportuno avvertire che noi adottiamo la terminologia e i simboli del WATSON. Ricordiamo che, quando $n$ è intero, valgono le relazioni $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$.

(³) WATSON, loc. cit. p. 70 e p. 71, formula (8). Ivi si trova anche, della funzione $Y_n(x)$ uno sviluppo, valido per ogni valore di $x$ non nullo. Per questo cfr. anche COURANT UND HILBERT, loc. cit. pp. 406-408 e PICONE, loc. cit. p. 493.

Sia $\alpha > 0$. Integrando la (5) fra $\alpha$ e $x$ si ha:

$$u_1'(x)\,u_2(x) - u_1(x)\,u_2'(x) - u_1'(\alpha)\,u_2(\alpha) + u_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) + \tag{6}$$

$$+ (\lambda^2 - \mu^2)\int_\alpha^x \frac{u_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,dt \equiv 0\,.$$

2. — È, com'è noto, (4)

$$u_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + a(x) \tag{7}$$

$$u_1'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + b(x) \tag{8}$$

avendosi, per $x > K_\mu$, $|a(x)| < \frac{A_\mu}{x}$, $|b(x)| < \frac{B_\mu}{x}$, essendo $K_\mu, A_\mu, B_\mu$, opportune costanti positive, dipendenti da $\mu$ (5).

---

(4) WATSON, loc. cit p 199

(5) PICONE, loc. cit p 497 dove nel caso particolare in cui $\mu$ è l'intero $n\,(\geq 0)$ sono esplicitamente calcolate le costanti $K_n, A_n, B_n$.

Risulta

$$K_n = \left|n^2 - \frac{1}{4}\right|, \quad A_n = (1 + \sqrt{e})\left|n^2 - \frac{1}{4}\right|\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad B_n =$$

$$= \left[(1+\sqrt{e})\left|n^2 - \frac{1}{4}\right| + 1 + \frac{\sqrt{e}}{2}\right]\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

Per questo cf anche G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale,* 2ª ediz. volume II, Zanichelli, Bologna 1949, p 42. Nel caso in cui $\mu$ è un numero reale o immaginario puro qualunque, PICONE (loc. cit. p 487) stabilisce le decomposizioni:

$$u_1(x) = a\cos(x+b) + \gamma(x) \quad , \quad u_1'(x) = -a\,\mathrm{sen}(x+b) + \delta(x)$$

essendo $a$ e $b$ due opportune quantità reali (positiva la prima) e avendosi per

$$x > \left|\mu^2 - \frac{1}{4}\right|, \quad A_\mu = (1+\sqrt{e})\left|\mu^2 - \frac{1}{4}\right| a\,, \quad B_\mu = \left[(1+\sqrt{e})\left|\mu^2 - \frac{1}{4}\right| + 1 + \frac{\sqrt{e}}{2}\right] a\,.$$

Nel caso generale ($\mu$ reale o complesso qualunque, $x$ reale o complesso), PICONE osserva (loc. cit. pp. 501-502) che si possono stabilire formule di decomposizione analoghe in

Analogamente è:

$$u_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + c(x) \tag{9}$$

$$u_2'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + d(x) \tag{10}$$

avendosi, per $x > K_\lambda$, $|c(x)| < \frac{C_\lambda}{x}$, $|d(x)| < \frac{D_\lambda}{x}$, dove, come sopra, $K_\lambda$, $C_\lambda$, $D_\lambda$ sono opportune costanti positive, dipendenti da $\lambda$ (6).

Se si osserva che:

$$\operatorname{sen}\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- \cos\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2}$$

si ha, dalla (6) del n. 1, per le (7), (8), (9), (10):

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2} + \frac{L(x)}{x} - u_1'(\alpha)\,u_2(\alpha) + \\ & + u_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) + (\lambda^2 - \mu^2)\int_\alpha^x \frac{u_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,dt \equiv 0 \end{aligned} \tag{11}$$

---

cui $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $b = -\mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$. Nei casi particolari p. es. $\mu = \frac{1}{2}$ e $\mu = -\frac{1}{2}$ è, com'è noto, $\sqrt{x}\,J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} x$, $\sqrt{x}\,J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$ per $x > 0$. Nell'uno e nell'altro caso le costanti $K_\mu$ e $A_\mu$ sono nulle, essendo $K_{\frac{1}{2}} = K_{-\frac{1}{2}} = \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| = 0$ e $A_{\frac{1}{2}} = A_{-\frac{1}{2}} = (1 + \sqrt{e})\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right|\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0$.

Torna opportuno qui osservare che, stabilita la (7), la (8) si stabilisce facilmente, dopo aver notato che, essendo $J_\mu'(x) = \frac{\mu}{x}J_\mu(x) - J_{\mu+1}(x)$ (WATSON loc. cit. p. 45), risulta: $u_1'(x) = \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}J_\mu(x) - \sqrt{x}\,J_{\mu+1}(x)$.

(6) cfr. quanto è detto in (5)

avendosi, per $x > \delta > 0$, $| L(x) | < L$, essendo $\delta, L$ due opportune costanti positive, dipendenti da $\lambda$ e $\mu$.

Dalla (11) per $x \to +\infty$ si ricava:

$$\text{(A)} \qquad \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} = (\lambda^2 - \mu^2) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{u_1(t)\, u_2(t)}{t^2}\, dt + $$

$$+ u_1(\alpha)\, u_2'(\alpha) - u_1'(\alpha)\, u_2(\alpha)$$

cioè:

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} = (\lambda^2 - \mu^2) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{J_\mu(t)\, J_\lambda(t)}{t}\, dt + \sqrt{\alpha}\, J_\mu(\alpha) \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} J_\lambda(\alpha) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\alpha}\, J_\lambda'(\alpha) \right\} - \sqrt{\alpha}\, J_\lambda(\alpha) \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} J_\mu(\alpha) + \sqrt{\alpha}\, J_\mu'(\alpha) \right\}$$

e, tenendo conto della relazione (7):

$$\alpha\, J_\nu'(\alpha) = \nu\, J_\nu(\alpha) - \alpha\, J_{\nu+1}(\alpha)$$

si ottiene:

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} = (\lambda^2 - \mu^2) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, dt -$$

$$\text{(12)} \qquad - \alpha \left\{ J_\mu(\alpha)\, J_{\lambda+1}(\alpha) - J_\lambda(\alpha)\, J_{\mu+1}(\alpha) \right\} + (\lambda - \mu)\, J_\mu(\alpha)\, J_\lambda(\alpha)$$

da cui, per $\alpha \to 0$:

$$\text{(13)} \qquad \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2}}{\lambda^2 - \mu^2} = \int_0^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, dt$$

e da qui per la (12):

$$\text{(14)} \qquad \int_0^{\alpha} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, dt = \frac{\alpha \left\{ J_\lambda(\alpha)\, J_{\mu+1}(\alpha) - J_\mu(\alpha)\, J_{\lambda+1}(\alpha) \right\}}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{J_\mu(\alpha)\, J_\lambda(\alpha)}{\lambda + \mu}$$

Le (13) e (14) sono note (8).

---

(7) WATSON, loc. cit p. 45.

(8) WATSON, loc. cit. p. 404, formola (7) e WATSON, loc. cit. p. 135, formola (13).

Si osservi, in particolare, che se è $J_\mu(\alpha) = 0$, dalla (12) si deduce:

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\,t = \frac{2}{\pi}\, \frac{\operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2}}{\lambda^2 - \mu^2} - \alpha\, \frac{J_\lambda(\alpha)\, J_{\mu+1}(\alpha)}{\lambda^2 - \mu^2}$$

Se è, inoltre, $\lambda = \mu + 2$, oppure $\mu$ razionale e $\lambda = \mu + 2\,m$ ($m$, intero, $\geq 2$), dovendo essere (9) $J_\lambda(\alpha) \neq 0$ $J_{\mu+1}(a) \neq 0$ e, per la (13) e la precedente uguaglianza:

$$\int_0^\alpha \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\,t = -\int_\alpha^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\,t = \alpha\, \frac{J_\lambda(\alpha)\, J_{\mu+1}(\alpha)}{\lambda^2 - \mu^2}$$

posto $\varphi(x) = \int_0^x \frac{J_\lambda(t) J_\mu(t)}{t}\, d\,t$, si ottiene $\varphi(\alpha) \neq 0$.

Quando $\mu$ è razionale e $\lambda - \mu = K$ ($K$ intero, $\geq 2$), non può esistere un punto $\alpha$ in cui $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = 0$. In un tale punto sarebbe $J_\mu(\alpha) = J_\lambda(\alpha) = 0$. La congettura di BOURGET, provata da SIEGEL (10), e da questi generalizzata, equivale perciò ad affermare, quando sia $\mu$ razionale e $\lambda = \mu + m$ ($m > 2$), che non esiste nessun punto $\alpha$ in cui $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = 0$.

3. — Valgono le decomposizioni (11):

$$v_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \operatorname{sen}\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + e(x) \tag{15}$$

$$v_1'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \cos\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + f(x) \tag{16}$$

avendosi, per $x > h_\mu$, $|e(x)| < \frac{E_\mu}{x}$, $|f(x)| < \frac{F_\mu}{x}$, essendo $h_\mu$, $E_\mu$, $F_\mu$, tre opportune costanti positive, dipendenti da $\mu$.

---

(9) WATSON, loc. cit pp. 484-485.

(10) WATSON, loc cit. p. 485.

(11) WATSON, loc. cit. p. 199, dove è dato lo sviluppo asintotico della $Y_\mu(x)$, da cui si deduce subito quello della $v_1(x)$. La (16) si stabilisce poi, una volta scritta la (15), dopo aver notato che, essendo $Y'_\mu(x) = \frac{\mu}{x} Y_\mu(x) - Y_{\mu+1}(x)$, (WATSON, loc. cit. p. 66) risulta: $v_1'(x) = \left(\mu + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} Y_\mu(x) - \sqrt{x}\, Y_{\mu+1}(x)$.

Essendo $Y_\mu(x)$ soluzione dell'equazione di BESSEL (1) dove si faccia $\nu = \mu$, $v_1(x)$ è soluzione dell'equazione (2) dove si ponga $\nu = \mu$.

Vale perciò la relazione identica:

$$\{v_1'(x)\,u_2(x) - v_1(x)\,u_2(x)\}' + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{x^2}\,v_1(x)\,u_2(x) \equiv 0 \tag{17}$$

analoga alla (5) del n. 1, da cui si ha, integrando fra $\alpha$ e $x$:

$$\begin{gathered} v_1'(x)\,u_2(x) - v_1(x)\,u_2'(x) - v_1'(\alpha)\,u_2(\alpha) + v_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) + \\ + (\lambda^2 - \mu^2)\int_\alpha^x \frac{v_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,dt \equiv 0\,. \end{gathered} \tag{18}$$

Se si osserva che è:

$$\begin{gathered} \cos\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \\ + \operatorname{sen}\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} \end{gathered}$$

si ottiene, per le (9), (10), (15), (16),

$$v_1'(x)\,u_2(x) - v_1(x)\,u_2'(x) = \frac{2}{\pi}\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} + \frac{M(x)}{x} \tag{19}$$

avendosi, per $x > \eta > 0$, $|M(x)| < M$, essendo $\eta$, $M$, due opportune costanti positive, dipendenti da $\lambda$ e $\mu$.

Dunque, sostituendo la (19) nella (18) si ottiene:

$$\begin{gathered} \frac{2}{\pi}\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} + \frac{M(x)}{x} - v_1'(\alpha)\,u_2(\alpha) + v_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) + \\ + (\lambda^2 - \mu^2)\int_\alpha^x \frac{v_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,dt \equiv 0 \end{gathered}$$

dove, per $x > \eta > 0$, è $|M(x)| < M$.

Da qui, per $x \to +\infty$, si ricava:

$$\begin{gathered} (\lambda^2 - \mu^2)\int_\alpha^{+\infty} \frac{v_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,dt = \\ = -\frac{2}{\pi}\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - v_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) + v_1'(\alpha)\,u_2(\alpha) \end{gathered} \tag{B}$$

vale a dire:

$$(20)\quad (\lambda^2-\mu^2)\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{J_\lambda(t)\,Y_\mu(t)}{t}\,dt = -\frac{2}{\pi}\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}-\alpha\left\{Y_\mu(\alpha)\,J'_\lambda(\alpha)-J_\lambda(\alpha)\,Y'_\mu(\alpha)\right\}$$

ossia, essendo [12]:

$$J'_\lambda(\alpha)=\frac{\lambda J_\lambda(\alpha)-\alpha J_{\lambda+1}(\alpha)}{\alpha},\qquad Y'_\mu(\alpha)=\frac{\mu\,Y_\mu(\alpha)-\alpha\,Y_{\mu+1}(\alpha)}{\alpha}$$

$$(21)\quad (\lambda^2-\mu^2)\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{J_\lambda(t)\,Y_\mu(t)}{t}\,dt = -\frac{2}{\pi}\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}+\alpha\left\{Y_\mu(\alpha)J_{\lambda+1}(\alpha)-J_\lambda(\alpha)\,Y_{\mu+1}(\alpha)\right\}+(\mu-\lambda)\,J_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(\alpha)$$

da cui:

$$(22)\quad \int_{\alpha}^{+\infty}\frac{Y_\mu(t)\,J_\lambda(t)}{t}\,dt=-\frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}}{\lambda^2-\mu^2}+\frac{\alpha\left\{Y_\mu(\alpha)\,J_{\lambda+1}(\alpha)-J_\lambda(\alpha)\,Y_{\mu+1}(\alpha)\right\}}{\lambda^2-\mu^2}-\frac{J_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(\alpha)}{\lambda+\mu}$$

e perciò, per $\alpha\to 0$, ricordando che è [13]:

$$(23)\quad \lim_{x\to 0+}\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}=\frac{1}{2^\lambda\,\Gamma(\lambda+1)}$$

$$(24)\quad \lim_{x\to 0+} x^\mu\,Y_\mu(x)=-\frac{2^\mu\,\Gamma(\mu)}{\pi}$$

si ricava [14] $(\lambda>\mu)$:

$$(25)\quad \int_{0}^{+\infty}\frac{J_\lambda(t)\,Y_\mu(t)}{t}\,dt=-\frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}}{\lambda^2-\mu^2}.$$

---

[12] WATSON, *loc. cit.*, p. 45 e p. 66.

[13] WATSON, *loc. cit.*, p. 40 e p. 71.

[14] Questa formula non mi sembra che sia esplicitamente notata nel libro del WATSON.

Se, in particolare, è $\lambda - \mu$ (intero positivo) dispari, con facile calcolo dalla (22), per le (23) e (24) si ottiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{\lambda-\mu}} \int_x^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, Y_\mu(t)}{t}\, d\, t = \frac{\Gamma(\mu)}{\pi \cdot 2^{\lambda-\mu} (\lambda - \mu)\, \Gamma(\lambda + 1)}\, .$$

Se è, come supponiamo, $\lambda > \mu$, si ha poi:

$$\lim_{x \to 0} x^{\lambda-\mu} \int_x^{+\infty} \frac{J_\mu(t)\, Y_\lambda(t)}{t}\, d\, t = -(\lambda - \mu) \frac{2^{\lambda-\mu}\, \Gamma(\lambda)}{\pi\, \Gamma(\mu + 1)}\, .$$

Sempre per $\lambda > \mu$, dalle (22) e (25) si ricava:

$$\int_0^\alpha \frac{J_\lambda(t)\, Y_\mu(t)}{t}\, d\, t = \frac{-\alpha\{Y_\mu(\alpha)\, J_{\lambda+1}(\alpha) - J_\lambda(\alpha)\, Y_{\mu+1}(\alpha)\}}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{J_\lambda(\alpha)\, Y_\mu(\alpha)}{\lambda + \mu}\, .$$

Quando sia poi $x > \alpha$, per $\lambda$ e $\mu$ *qualunque,* positivi o nulli, dalla (22), che è vera per $\lambda$ e $\mu$ qualunque, reali, si ricava:

$$\int_\alpha^x \frac{J_\lambda(t)\, Y_\mu(t)}{t}\, d\, t = \left[\frac{-x\,\{Y_\mu(x)\, J_{\lambda+1}(x) - J_\lambda(x)\, Y_{\mu+1}(x)\}}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{J_\lambda(x)\, Y_\mu(x)}{\lambda + \mu}\right]_\alpha^x$$

formula nota ([15]).

OSSERVAZIONE. — La $Y_\mu(x)$ è soluzione dell'equazione di BESSEL (1) dove si ponga $\nu = \mu$, indipendente da $J_\mu(x)$. Infatti il wronskiano di $Y_\mu(x)$ e $J_\mu(x)$ vale ([16])

$$W(J_\mu\, , Y_\mu) = \frac{2}{\pi x}\, .$$

Le $u_1(x)$ e $v_1(x)$ sono dunque soluzioni indipendenti dell'equazione (2) dove si faccia $\nu = \mu$. È:

$$W(u_1\, , v_1) = \frac{2}{\pi}\, . \tag{26}$$

([15]) WATSON, *loc. cit*, p. 135, formula (13).
([16]) WATSON, *loc. cit.*, p. 76.

4. — La $u_2(x)$ soddisfa all'equazione in $\theta$:

$$\theta'' + \left[1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4x^2}\right]\theta = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{x^2} u_2(x)$$

la cui equazione omogenea corrispondente ha le soluzioni fondamentali $u_1(x)$ e $v_1(x)$. Si trova dunque, essendo $C_1$ e $C_2$ costanti da determinarsi, per $x > 0$:

$$u_2(x) = \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left\{v_1(x)\int_\alpha^x \frac{u_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,dt - u_1(x)\int_\alpha^x \frac{v_1(t)\,u_2(t)}{t_2}\,dt\right\} + \tag{27}$$
$$+ C_1 u_1(x) + C_2 v_1(x)$$

com'è facile constatare, tenendo presente, fra l'altro, la (26) dell'osservazione del n. 3. Poichè è:

$$u_2'(x) = \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left\{v_1'(x)\int_\alpha^x \frac{u_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,dt - u_1'(x)\int_\alpha^x \frac{v_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,dt\right\} +$$
$$+ C_1 u_1'(x) + C_2 v_1'(x)$$

le $C_1$ e $C_2$ devono soddisfare al sistema lineare:

$$\begin{cases} u_1(\alpha).\,C_1 + v_1(\alpha).\,C_2 = u_2(\alpha) \\ u_1'(\alpha).\,C_1 + v_1'(\alpha).\,C_2 = u_2'(\alpha) \end{cases}$$

il cui determinante vale, per la (26), $\dfrac{2}{\pi}$.

Si trova:

$$C_1 = \frac{\pi\,\{u_2(\alpha)\,v_1'(\alpha) - v_1(\alpha)\,u_2'(\alpha)\}}{2}$$

$$C_2 = \frac{\pi\,\{u_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) - u_2(\alpha)\,u_1'(\alpha)\}}{2}$$

e perciò, tenendo presenti la (26), la $(A)$ e la $(B)$:

$$u_2(x) = v_1(x) \,.\, \operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} + u_1(x) \,.\, \cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{u_1(x)\, v_1(t) - v_1(x)\, u_1(t)}{t_2}\, u_2(t)\, d\, t$$

Sussiste dunque l'identità:

$$u_2(x) = u_1(x) \left\{\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{v_1(t)\, u_2(t)}{t^2}\, d\, t\right\} +$$

$$+ v_1(x) \,.\, \left\{\operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{u_1(t)\, u_2(t)}{t^2}\, d\, t\right\}$$

ossia

(28)
$$\begin{aligned} J_\lambda(x) = J_\mu(x) \,.\, &\left\{\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{Y_\mu(t)\, J_\lambda(t)}{t}\, d\, t\right\} + \\ + Y_\mu(x) \,.\, &\left\{\operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\, t\right\} \end{aligned}$$

vale a dire:

(29)
$$\begin{aligned} &\int_x^{+\infty} \left\{J_\mu(x)\, Y_\mu(t) - J_\mu(t)\, Y_\mu(x)\right\} \frac{J_\lambda(t)}{t}\, d\, t = \frac{2}{\pi(\lambda^2 - \mu^2)} \,. \\ &\quad.\left\{J_\lambda(x) - J_\mu(x)\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - Y_\mu(x)\operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned}$$

che si può ottenere anche direttamente dalle (12) e (21).

Scambiando $\lambda$ con $\mu$, la (28) dà:

$$J_\mu(x) = J_\lambda(x) \,.\, \left\{\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{Y_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d t\right\} -$$

$$- Y_\lambda(x) \,.\, \left\{\operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d t\right\}$$

e moltiplicando la (28) per $Y_\lambda(x)$, la (29) per $Y_\mu(x)$, indi sommando membro a membro, si ottiene:

$$J_\lambda(x)\, Y_\lambda(x) + J_\mu(x)\, Y_\mu(x) = \cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}\cdot\left\{J_\mu(x)\, Y_\lambda(x) + J_\lambda(x)\, Y_\mu(x)\right\}$$

$$+\frac{\pi}{2}(\lambda^2-\mu^2)\cdot\left\{J_\mu(x)\, Y_\lambda(x)\int_x^{+\infty}\frac{Y_\mu(t)\, J_\lambda(t)}{t}\, dt -\right.$$

$$\left. - J_\lambda(x)\, Y_\mu(x)\cdot\int_x^{+\infty}\frac{Y_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, dt\right\}$$

vale a dire:

$$J_\mu(x)\, Y_\lambda(x)\int_x^{+\infty}\frac{J_\lambda(t)\, Y_\mu(t)}{t}\, dt - J_\lambda(x)\, Y_\mu(x)\int_x^{+\infty}\frac{J_\mu(t)\, Y_\lambda(t)}{t}\, dt =$$

(31)

$$= \frac{2}{\pi(\lambda^2-\mu^2)}\left\{J_\lambda(x)\, Y_\lambda(x) + J_\mu(x)\, Y_\mu(x) - \cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}\left[J_\mu(x)\, Y_\lambda(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J_\lambda(x)\, Y_\mu(x)\right]\right\}$$

formula che si può ottenere anche direttamente dalla (21) e da quella che si ottiene scambiando in questa $\lambda$ con $\mu$.

Data l'analiticità, rispetto a $\nu$ e a $z$ $(z \neq 0)$ delle funzioni $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, è lecito concludere che le (29), (31), valgono se si intende che $\lambda, \mu$ siano complessi qualunque e si sostituisce alla variabile positiva $x$ la variabile complessa $z \neq 0$.

Facciamo una semplice applicazione della (31). Supponiamo $\lambda - \mu$ intero $(> 0)$.

Poichè sussiste l'uguaglianza [17]:

$$J_\lambda(x)\, Y_\mu(x) - J_\mu(x)\, Y_\lambda(x) = \frac{2\, R_{\lambda-\mu-1,\, \mu+1}(x)}{\pi x}$$

dove $R_{\lambda-\mu-1,\, \mu+1}(x)$ è il polinomio di LOMMEL, la cui espressione esplicita è [18]

[17] WATSON, loc cit. p. 297.

[18] WATSON, loc. cit. p. 296.

$\lambda - \mu$ pari:

$$\underset{\lambda-\mu-1,\mu+1}{R}(x) = \frac{2^{\lambda-\mu-1}\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu+1)}\frac{1}{x^{\lambda-\mu-1}} - \frac{(\lambda-\mu-2)\,2^{\lambda-\mu-3}\,\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\mu+2)}\frac{1}{x^{\lambda-\mu-3}} + \dots + (-1)^{\frac{\lambda-\mu-2}{2}}\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)!\,(\lambda+\mu)\frac{1}{x}$$

$\lambda - \mu$ dispari:

$$\underset{\lambda-\mu-1,\mu+1}{R}(x) = \frac{2^{\lambda-\mu-1}\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu+1)}\frac{1}{x^{\lambda-\mu-1}} - \frac{(\lambda-\mu-2)\,2^{\lambda-\mu-3}\,\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\mu+2)}\frac{1}{x^{\lambda-\mu-3}} + \dots + (-1)^{\frac{\lambda-\mu-1}{2}}$$

le radici $\alpha > 0$ di $\underset{\lambda-\mu-1,\mu+1}{R}(x) = 0$ soddisfano all'equazione:

$$J_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(\alpha) = J_\mu(\alpha)\,Y_\lambda(\alpha)\,.$$

Dalla (31) si ricava perciò:

$$J_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(\alpha)\int_\alpha^{+\infty}\{J_\lambda(t)\,Y_\mu(t) - J_\mu(t)\,Y_\lambda(t)\}\frac{dt}{t} =$$

$$(32)\qquad = J_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(\alpha)\int_\alpha^{+\infty} 2\,\frac{\underset{\lambda-\mu-1,\mu+1}{R}(x)}{\pi x^2}\,dx = \frac{2}{\pi(\lambda^2-\mu^2)}\{J_\lambda(\alpha)\,Y_\lambda(\alpha) + J_\mu(\alpha)\,Y_\mu(\alpha) - 2\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}\cdot J_\mu(\alpha)\,Y_\lambda(\alpha)\}$$

Supponiamo $\mu$ razionale, $\lambda = \mu + m$ ($m$ intero, $> 2$). Non può essere allora [19] $J_\mu(\alpha) = J_\lambda(\alpha) = 0$. Se è $Y_\mu(\alpha) = 0$ è anche $Y_\lambda(\alpha) = 0$. Se è $Y_\mu(\alpha) \neq 0$ è anche $Y_\lambda(\alpha) \neq 0$. Dunque [20]:

---

(19) WATSON, loc. cit. pp. 484-485.

(20) Se è $\lambda = \mu + m$ ($m$ intero, $> 2$), qualunque sia $\mu \geq 0$ e reale poichè la minima radice positiva di $Y_\nu(x)$ ($\nu$ reale, $> 0$), deve risultare maggiore di $\nu + \frac{1}{2}$ (WATSON, loc. cit. p. 487), ne viene facilmente che quando $\mu$ è sufficientemente piccolo, non può verificarsi il caso $a$).

*a*) o è $Y_\mu(\alpha) = Y_\lambda(\alpha) = 0$

*b*) oppure $Y_\mu(\alpha) \neq 0$, $Y_\lambda(\alpha) \neq 0$ e quindi anche $J_\lambda(\alpha) \neq 0$, $J_\mu(\alpha) \neq 0$.
In questo secondo caso dalla (32) si ricava:

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\underset{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}{R(x)}}{x^2}\, dx = \frac{1}{\lambda^2-\mu^2}\left\{\frac{J_\lambda(\alpha)}{J_\mu(\alpha)} + \frac{J_\mu(\alpha)}{J_\lambda(\alpha)} - 2\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}\right\}$$

Essendo [21]

$$J_\lambda(x) = J_\mu(x)\underset{\lambda-\mu,\,\mu}{R(x)} - J_{\mu-1}(x)\underset{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}{R(x)}$$

si ha:

$$J_\lambda(\alpha) = J_\mu(\alpha)\underset{\lambda-\mu,\,\mu}{R(\alpha)}$$

Perciò:

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\underset{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}{R(x)}}{x^2}\, dx = \frac{1}{\lambda^2-\mu^2}\cdot\frac{\left\{\underset{\lambda-\mu,\,\mu}{R(\alpha)}\right\}^2 - 2\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}\underset{\lambda-\mu,\,\mu+1}{R(\alpha)}}{\underset{\lambda-\mu,\,\mu}{R(\alpha)}}$$

che esprime un legame in $\mu$ e $\lambda = \mu + m$ ($m$ intero, $> 2$), $\mu$ razionale $\geq 0$.

---

(21) WATSON, loc. cit. p. 298.