

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

ALESSANDRO OSSICINI

**Il calcolo simbolico e la propagazione del calore in una ipersfera dello spazio euclideo ad  $n$  dimensioni**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 5, n° 3-4 (1951), p. 269-278*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1951\\_3\\_5\\_3-4\\_269\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_269_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

IL CALCOLO SIMBOLICO E LA PROPAGAZIONE  
DEL CALORE  
IN UNA IPERSFERA DELLO SPAZIO EUCLIDEO  
A D  $n$  DIMENSIONI

di ALESSANDRO OSSICINI (Roma)

§ 1. — Enunciato del problema

Il problema della propagazione del calore in una sfera solida (isotropa) di centro  $O$  e raggio dato (che per comodità scegliamo uguale ad uno) consiste nell'integrazione dell'equazione differenziale:

$$[1] \quad \Delta u = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}$$

ove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace  $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ ; inoltre  $D = \frac{K}{c d}$  con  $K =$  coefficiente di conducibilità termica,  $c =$  calore specifico,  $d =$  densità.

L'equazione [1] usando coordinate sferiche di polo  $O$  diviene:

$$[2] \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (0 \leq \varrho < 1),$$

in quanto, supponendo la distribuzione iniziale del calore a simmetria sferica, tale sarà la  $u$  (essendo la sfera isotropa) e risulterà funzione solo di  $\varrho$  e del tempo  $t$ .

L'integrale della [2] deve soddisfare alla condizione iniziale:

$$[3] \quad u(\varrho, 0) = F(\varrho)^{(1)}.$$

---

(1) La [3] va intesa in modo preciso così: per  $\varrho$  fisso ( $0 \leq \varrho < 1$ ), deve aversi:

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(\varrho, t) = F(\varrho).$$

Supponiamo che la funzione  $\frac{1}{\varrho^2} F(\varrho)$  sia continua ed a variazione limitata nell'intervallo chiuso  $(0, 1)$ .

L'integrale della [2] deve inoltre soddisfare alla condizione che sulla superficie della sfera si abbia:

$$[4] \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \lambda u \right]_{\varrho=1} = 0,$$

con  $\lambda = \frac{\gamma}{K}$  ( $\gamma =$  conducibilità termica superficiale) ed infine alla

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(\varrho, t) = 0,$$

(dovendo essere, per  $t \rightarrow \infty$ , la sfera completamente raffreddata).

Detto problema, come sappiamo, fu risolto dal Fourier<sup>(2)</sup> ed ammette la soluzione:

$$[5] \quad u(\varrho, t) = \frac{2}{\varrho} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{R F(R) \operatorname{sen} h_m R \operatorname{sen} h_m \varrho e^{-D h_m^2 t}}{1 - \frac{\operatorname{sen} 2 h_m}{2 h_m}} d R$$

ove  $h_1, h_2; \dots; h_{m-1}, h_m$  sono le radici positive, disposte in ordine crescente dell'equazione:

$$[6] \quad \frac{h}{\operatorname{tang} h} = 1 - \lambda^{(3)}.$$

Estendendo il problema al caso di una ipersfera dello spazio Euclideo ad  $n \geq 3$  dimensioni, di centro 0 e raggio 1, l'equazione da integrare sarà sempre la (1) ma con

$$[7] \quad \Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

<sup>(2)</sup> J. B. FOURIER - *La Theory Analytique de la Chaleur*. (Paris 1822) pag. 400-428.

<sup>(3)</sup> Per una tavola di radici della (6) vedi: H. S. CARSLAW e J. C. JAEGER - *Conduction of Heat in Solids*, (Oxford 1948) pag. 577.



si perviene per la [9] all'equazione:

$$[14] \quad \mathfrak{D}^* v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 v}{\varrho^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad 0 < \varrho < 1,$$

la cui integrazione equivale a quella della [9]; inoltre le [10], [11], [12] divengono:

$$[15] \quad v(\varrho, 0) = \varrho^{\frac{n}{2}-1} F(\varrho),$$

$$[16] \quad \left[ \frac{\partial v}{\partial \varrho} + \lambda v + \frac{\left(1 - \frac{n}{2}\right)v}{\varrho} \right]_{\varrho=1} = 0,$$

$$[17] \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(\varrho, t) = 0.$$

## § 2. — Trasformata della funzione incognita.

Pensando la  $v$  funzione di  $\varrho$  e prescindendo dal fatto che dipenda dall'altra variabile  $t$ , applichiamo alla [14] la trasformata così definita:

$$[18] \quad B[v(\varrho, t)] = \int_0^1 \varrho J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) v(\varrho, t) d\varrho,$$

ove  $J_\nu(k)$  indica la funzione di Bessel di prima specie e di ordine  $\nu$  e  $h_m$  l' $m$ -esima radice positiva (in ordine crescente) dell'equazione:

$$[19] \quad h^{1-\frac{n}{2}} \left[ h J'_{\frac{n}{2}-1}(h) + \left( \lambda + 1 - \frac{n}{2} \right) J_{\frac{n}{2}-1}(h) \right]^{(4)} = 0.$$

(4) L'equazione:

$$x^{-\nu} [x J'_\nu(x) + H J_\nu(x)] = 0,$$

per  $H$  e  $\nu$  reali e  $\nu \geq -\frac{1}{2}$  venne studiata da Dini; vedi U. DINI — *Serie di Fourier* (Pisa 1880) pp. 190-277. Per una tavola di valori di questa equazione, nel caso  $\nu = 0$ , vedi: H. S. CARSLAW e J. C. JAEGGER, op. cit. (3) pag. 379.

Ammettendo sia lecito derivare l'integrale [18] sotto il segno d'integrale, rispetto a  $t$ , sarà pure:

$$[20] \quad B \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} B [v];$$

tenendo conto di questa e delle [16], [19] la trasformazione [18] muta la [14] nella:

$$[21] \quad B [\mathcal{D}^* v] = -\frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} B [v] - h_m^2 B [v] = 0.$$

La  $B$  — trasformata della nostra funzione incognita  $v(\rho, t)$  deve dunque soddisfare questa equazione differenziale lineare del 1° ordine, siccome la  $B [v]$  vi compare derivata soltanto rispetto a  $t$  e d'altra parte il coefficiente di  $B [v]$  dipende solo da  $h_m$ , la [21] può considerarsi come un'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti. Si ricava immediatamente, tenendo conto delle [15], [17]

$$[22] \quad B [v] = B [\rho^{\frac{n}{2}-1} F(\rho)] e^{-Dh_m^2 t}$$

e per la [18]:

$$[23] \quad B [v] = \int_0^1 R^{\frac{n}{2}} F(R) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m R) e^{-Dh_m^2 t} dR.$$

### § 3 — Antitrasformazione.

Dalla [23] antitrasformando si ha<sup>(5)</sup>:

$$[24] \quad v = B^{-1} \left[ \int_0^1 R^{\frac{n}{2}} F(R) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m R) e^{-Dh_m^2 t} dR \right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{2 h_m^2 R^{\frac{n}{2}} F(R) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m R) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \rho) e^{-Dh_m^2 t}}{\left[ h_m^2 - \left( \frac{n}{2} - 1 \right)^2 \right] J_{\frac{n}{2}-1}^2(h_m) + h_m^2 J_{\frac{n}{2}-1}'^2(h_m)} dR,$$

(5) Per la dimostrazione della [24] basterà considerare la serie del Dini di una funzione  $f(x)$  tramite le funzioni di Bessel:

$$(1') f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_{\nu}(h_m x),$$

e quindi per la [13]

$$[25] \quad u(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{2 h_m^2 R^{\frac{n}{2}} \varrho^{1-\frac{n}{2}} F(R) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m R) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-D h_m^2 t}}{\left[ h_m^2 - \left( \frac{n}{2} - 1 \right)^2 \right] J_{\frac{n}{2}-1}^2(h_m) + h_m^2 J_{\frac{n}{2}-1}'^2(h_m)} dR.$$

Faremo vedere che la serie a secondo membro della [25] è convergente nell'intervallo (0,1).

Se poniamo per semplicità:

$$[26] \quad b_m = \int_0^1 \frac{2 h_m^2 R^{\frac{n}{2}} F(R) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m R)}{\left[ h_m^2 - \left( \frac{n}{2} - 1 \right)^2 \right] J_{\frac{n}{2}-1}^2(h_m) + h_m^2 J_{\frac{n}{2}-1}'^2(h_m)} dR.$$

la [25] diviene

$$[27] \quad u(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-D h_m^2 t}.$$

ove  $h_1, h_2, h_3 \dots h_{m-1}, h_m$  sono le radici dell'equazione

$$h^{-\nu} [h J_{\nu}'(h) + H J_{\nu}(h)] = 0,$$

disposte in ordine crescente e  $H + \nu > 0$  e  $\nu > -\frac{1}{2}$  (condizioni verificate nel nostro caso essendo  $H + \nu = \lambda > 0$  e  $\nu > \frac{n}{2} - 1 \geq -\frac{1}{2}$  poichè  $n \geq 3$ ).

I coefficienti della (1') sono dati da:

$$[(h_m^2 - \nu^2) J_{\nu}(h_m) + h_m^2 J_{\nu}'^2(h_m)] b_m = 2 h_m^2 \int_0^1 \xi f(\xi) J_{\nu}(h_m \xi) d\xi.$$

La serie (1') è convergente per  $0 < x \leq 1$  se  $f(\xi)$  è continua e a variazione limitata per  $0 \leq \xi \leq 1$ .

La serie (1') divisa per  $x^{\nu}$  converge anche per  $x=0$ . Vedi G. N. WATSON *Theory of Bessel Functions*. (Cambridge 1948) pp. 576-617, e 649-653

Osservando che per  $t \geq 0$  la funzione di  $h_m$ ,  $e^{-Dh_m^2 t}$  è variazione limitata nell'intervallo  $(0, \infty)$  e che la

$$[28] \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho),$$

non è altro che lo sviluppo in serie del Dini, moltiplicato  $\varrho^{1-\frac{n}{2}}$ , della funzione  $\varrho^{\frac{n}{2}-1} F(\varrho)$ , sviluppo che è uniformemente convergente per  $0 \leq \varrho \leq 1$  [essendo verificate le condizioni richieste per la  $\varrho^{\frac{n}{2}-1} F(\varrho)$ ] ne segue che la serie (27) è anch'essa uniformemente convergente per  $0 \leq \varrho \leq 1$ .

Abbiamo inoltre:

$$[29] \quad \begin{aligned} u(\varrho, 0) &= \lim_{t \rightarrow +0} \varrho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t} = \\ &= \varrho^{1-\frac{n}{2}} [\varrho^{\frac{n}{2}-1} F(\varrho)] = F(\varrho), \end{aligned}$$

ed è così verificata la [10]; e per la presenza del fattore  $e^{-Dh_m^2 t}$  si verifica anche la [12]. Resta a vedere se la funzione  $u(\varrho, t)$  soddisfa l'equazione differenziale [9] e la [11]. La verifica va fatta perchè il procedimento che ci ha condotto alla [27] è fondato sull'ipotesi che alla  $(u(\varrho, t))$  incognita insieme alle sue derivate  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}$ , sia applicabile la trasformazione [18].

Avendosi

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \left[ \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t} \right] &= \\ = e^{-Dh_m^2 t} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{n-1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + h_m^2 \right] \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) &= 0, \end{aligned}$$

e per la

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \lambda u \right]_{\varrho=1} = h_m J'_{\frac{n}{2}-1}(h_m) + \left[ \lambda + 1 - \frac{n}{2} \right] J_{\frac{n}{2}-1}(h_m) = 0,$$

per provare che anche la funzione  $u(\varrho, t)$  soddisfa le [9], [11] basterà dimostrare che le  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}$ , si possono ottenere eseguendo le corrispondenti

operazioni di derivazione sui singoli termini della serie a secondo membro della [27].

Poichè

$$[30] \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t} \right] = -D \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m^2 \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t},$$

$$^{(6)} \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t} \right] = -\varrho \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m \varrho^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t},$$

[31]

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \left[ \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t} \right] = \\ & = (n-1) \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m \varrho^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t} - \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m^2 \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t}; \end{aligned}$$

basterà dimostrare la convergenza delle serie:

$$[32] \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m^2 \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t},$$

$$[33] \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m \varrho^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{h_m^{1-\frac{n}{2}}} \left[ (h_m \varrho)^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(h_m \varrho) \right] h_m^2 e^{-Dh_m^2 t}.$$

Ora osserviamo che per  $t > 0$  la funzione di  $h_m$ ,  $h_m^2 e^{-Dh_m^2 t}$  è a variazione limitata nell'intervallo  $(0, \infty)$  e che la funzione  $(h_m \varrho)^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(h_m \varrho)$  è limitata per  $0 \leq \varrho \leq 1$  (qualsiasi valore abbia  $m$ ) nè segue che la [32] è convergente per  $t > 0$   $0 \leq \varrho \leq 1$  e lo è anche la [33] tale essendo la

$$[34] \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{h_m^{1-\frac{n}{2}}} \quad ^{(7)}$$

<sup>(6)</sup> Nelle [31] si è tenuto conto delle formule ricorrenti:

$$x J'_\nu(x) - \nu J_\nu(x) = -x J_{\nu+1}(x),$$

$$x J_\nu(x) + x J_{\nu+2}(x) = 2(\nu+1) J_{\nu+1}(x)$$

Vedi G. N. WATSON op. cit. <sup>(5)</sup> pag. 45.

<sup>(7)</sup> La convergenza della [34] è dedotta dalla [28] (convergente per  $0 \leq \varrho \leq 1$ ) che per  $\varrho = 0$  diviene:

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b^m}{h_m^{1-\frac{n}{2}}}.$$

Possiamo concludere che le [30], [31], sono convergenti per  $t > 0$  e  $0 < \varrho \leq 1$  e la  $u(\varrho, t)$  soddisfa le condizioni richieste.

Se ora consideriamo il caso particolare  $n = 3$  le [19], [25], divengono

$$[35] \quad h^{-\frac{1}{2}} \left[ h J'_{\frac{1}{2}}(h) + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) J_{\frac{1}{2}}(h) \right] = 0$$

$$[36] \quad u(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{2 h_m^2 R^{\frac{3}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} F(R) J_{\frac{1}{2}}(h_m \varrho) J_{\frac{1}{2}}(h_m R) e^{-D h_m^2 t}}{\left[ h_m^2 - \frac{1}{4} \right] J_{\frac{1}{2}}^2(h_m) + h_m^2 J_{\frac{1}{2}}'^2(h_m)} dR;$$

e se teniamo conto delle

$$[37] \quad J_{\frac{1}{2}}(\varrho) = \left( \frac{2}{\pi \varrho} \right)^{\frac{1}{2}} \text{sen } \varrho; \quad J'_{\frac{1}{2}}(\varrho) = \left( \frac{2}{\pi \varrho} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \cos \varrho - \frac{\text{sen } \varrho}{2 \varrho} \right) \quad (8)$$

abbiamo:

$$[6] \quad \frac{h}{\text{tang } h} = 1 - \lambda,$$

$$[5] \quad u(\varrho, t) = \frac{2}{\varrho} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{R F(R) \text{sen } h_m R \text{sen } h_m \varrho e^{-D h_m^2 t}}{1 - \frac{\text{sen } 2 h_m}{2 h_m}} dR;$$

cioè la classica formula risolutiva della propagazione del calore in una sfera solida.

#### § 4. — Temperatura iniziale uniforme.

Se la temperatura iniziale è uniforme nell'interno dell'ipersfera, posto:

$$F(\varrho) = F_0,$$

la formula [25] effettuato l'integrale diviene

$$[38] \quad u(\varrho, t) = 2 F_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varrho^{1-\frac{n}{2}} h_m J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) J_{\frac{n}{2}}(h_m) e^{-D h_m^2 t}}{\left[ h_m^2 - \left( \frac{n}{2} - 1 \right)^2 \right] J_{\frac{n}{2}-1}^2(h_m) + h_m^2 J_{\frac{n}{2}-1}'^2(h_m)}, \quad (9)$$

(8) Vedi G. N. WATSON op. cit. (5) pag. 54.

(9) Per il calcolo dell'integrale della [25] basterà tener conto che

$$\frac{d}{dx} \{ x^{\nu} J_{\nu}(x) \} = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$$

vedi G. N. WATSON op. cit. (5) pag. 45.

e poichè in base alle [19] [6] si ha

$$h_m J_{\frac{n}{2}}(h_m) = \lambda J_{\frac{n}{2}-1}(h_m),$$

potremo scrivere la [38] nella forma:

$$[39] \quad u(\varrho, t) = 2 \lambda F_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(J_m \varrho) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m) e^{-Dh_m^2 t}}{\left[ h_m^2 - \left( \frac{n}{2} - 1 \right)^2 \right] J_{\frac{n}{2}-1}^2(h_m) + h_m^2 J_{\frac{n}{2}-1}'^2(h_m)}.$$

Nel caso particolare  $n = 3$  la [39] si trasforma nella:

$$[40] \quad u(\varrho, t) = 2 \lambda F_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varrho^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(h_m \varrho) J_{\frac{1}{2}}(h_m) e^{-Dh_m^2 t}}{\left[ h_m^2 - \frac{1}{4} \right] J_{\frac{1}{2}}^2(h_m) + h_m^2 J_{\frac{1}{2}}'^2(h_m)}, \quad (10)$$

e per le [37] si ha:

$$[41] \quad u(\varrho, t) = 2 \lambda F_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen } h_m \varrho}{h_m \varrho} \frac{e^{-Dh_m^2 t}}{(h_m \text{ cosec } h_m - \cos h_m)};$$

alla stessa formula si perviene partendo dalla [5] e tenendo conto della [6].

---

(10) Vedi H. RESAL — *Physique Mathématique* — Vol II<sup>o</sup> (Paris 1880) pag. 21.