

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

C. LONGO

Sulle trasformazioni puntuali fra due S_r nell'intorno di una coppia a jacobiano nullo di caratteristica massima

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 5, n° 3-4 (1951), p. 161-173

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_161_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE TRASFORMAZIONI PUNTUALI FRA DUE S_r ,
NELL'INTORNO DI UNA COPPIA
A JACOBIANO NULLO DI CARATTERISTICA MASSIMA

di C. LONGO (Roma)

1. — SCOPO DELLA NOTA (*).

Nella presente Nota determino le condizioni necessarie e sufficienti affinché una trasformazione puntuale T fra due S_r sia approssimabile fino all'intorno d'ordine n in una coppia di punti corrispondenti (O, O') con una trasformazione cremoniana, nel caso che nella coppia considerata lo jacobiano sia nullo di caratteristica $r - 1$.

Una trasformazione del tipo in esame determina una proiettività degenera fra gli intorni del 1° ordine di O e O' avente come spazio singolare una retta per O , detta *retta stazionaria*. È noto ⁽¹⁾ che, in generale, le trasformazioni in esame non si possono approssimare, oltre l'intorno del primo ordine, con una trasformazione cremoniana; ed è anche noto ⁽²⁾ che, nel caso che O sia semplice per la Jacobiana, condizione necessaria e sufficiente affinché esse si possano approssimare fino all'intorno del secondo ordine con una trasforma-

(*) In una prima redazione del presente lavoro (di cui ho distribuito alcuni estratti) sono incorso in una svista, in seguito alla quale credevo di dover completare il risultato di VILLA e VAONA enunciato a pag. 166. Debbo invece dichiarare che tale risultato è esatto e mi scuso presso il prof. VILLA della distribuzione dei suddetti estratti e Lo ringrazio per aver accolto questa rettifica.

(1) E. BOMPIANI. — *Corrispondenze puntuali fra piani proiettivi: esame delle Jacobiane*. Memorie Acc. Italia XIV, 1943.

(2) E. BOMPIANI. — *Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani*. Rend. Acc. Lincei, 8^o, II, 1947.

M. VILLA. — *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a jacobiano nullo nel caso cremoniano*. Rend. Acc. Lincei, VIII, II, 1947.

G. VAONA. — *Ancora sul caso cremoniano delle trasformazioni puntuali*. Boll. U. M. I., 3, VI, 1951.

zione cremoniana è che la retta stazionaria sia tangente in O alla Jacobiana.

Supposto O semplice per la Jacobiana, è chiaro che condizione *necessaria* affinché una trasformazione del tipo in esame sia approssimabile sino all'intorno d'ordine n è che la condizione precedente sia soddisfatta in tutto l'intorno di ordine $n - 2$ di centro O ed appartenente alla Jacobiana. Dimostro che tale condizione è anche sufficiente.

Nel caso che O sia punto $(s - 1)^{plo}$ per la Jacobiana dimostro che condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione sia approssimabile con una trasformazione cremoniana fino a tutto l'intorno d'ordine s , è che la tangente stazionaria sia tangente principale $(s - 1)^{pla}$ alla Jacobiana.

A partire da questo risultato determino le condizioni necessarie e sufficienti affinché la T sia approssimabile cremonianamente fino all'intorno d'ordine n ($n > s$).

Assegno inoltre alcune caratterizzazioni geometriche delle condizioni determinate: per $r = 2, 3$ ed $n = 2$ tali caratterizzazioni sono già state date da VILLA e VAONA (3).

Si osservi che se il punto O è semplice per la Jacobiana il determinante jacobiano in O ha caratteristica $r - 1$; ma non viceversa.

I risultati per $r = 2$ e nel caso di O punto semplice della Jacobiana sono già contenuti in un lavoro di C. F. MANARA (4) di cui sono venuto casualmente a conoscenza solo quando il presente lavoro era terminato: anche in questo caso, però, il metodo da me seguito è diverso da quello del MANARA.

2. — RICHIAMI E POSIZIONI DEL PROBLEMA.

Sia T

$$x'_i = x'_i(x_1, \dots, x_r) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

una trasformazione puntuale fra due spazi lineari $S_r(x_1 \dots x_r)$ e $S'_r(x'_1 \dots x'_r)$ nella quale si corrispondano i punti O ed O' .

Indichiamo con

$$2.1 \quad J = \frac{\partial(x_1, \dots, x_r)}{\partial(x'_1, \dots, x'_r)} = 0$$

la Jacobiana della trasformazione.

(3) M. VILLA, G. VAONA. — *Sul caso cremoniano delle trasformazioni puntuali fra due piani o spazi*. Boll. U. M. I, III, V, 1950.

(4) C. F. MANARA. — *Sulle trasformazioni puntuali di un piano in un altro nell'intorno di un punto semplice della Jacobiana*. Atti Sem. Mat. e Fis. Un. Modena, 1951.

Ringrazio il MANARA per l'interessante estratto inviatomi.

Se in O è $J \neq 0$, la trasformazione è *regolare* nella coppia (O, O') ed è noto ⁽⁵⁾ che è approssimabile con trasformazioni cremoniane fino all'intorno di ordine n (qualsiasi finito), o, come diremo per brevità, la trasformazione è *n-cremoniana*.

Supponiamo che in O si abbia $J = 0$ e che la caratteristica del determinante jacobiano in O sia massima, ossia $r - 1$.

È noto ⁽⁶⁾ che con una parziale opportuna scelta dei riferimenti in S_r e S'_r le equazioni della T si possono porre nella forma:

$$2.2 \quad \begin{cases} x'_i = x_i + \varphi_{2,i}(x, z) + [3]_{xz} & (i = 1, 2, \dots, r - 1; s \geq 2) \\ z' = \psi_{2,0}(x) + \dots + \psi_{s,0}(x) + z \psi_{s-1,1}(x) + \dots + z^{s-1} \psi_{1,s-1}(x) + \\ & + a_s z^s + [s + 1]_{xz} \end{cases}$$

dove si è posto $x_r = z, x'_r = z'$ e si indicano con $\varphi_{h,i}(x, z)$ e $\psi_{h,l}(x)$ forme di grado h nelle variabili indicate e con $[n]_{x,z}$ termini di grado (complessivo) non minore di n .

L'omografia singolare Ω tra le stelle di centro O e O' , determinata dalla trasformazione, ha come spazi singolari la retta $x_1 = \dots = x_{r-1} = 0$ e l'iperpiano $z' = 0$; questi spazi singolari si diranno rispettivamente la *retta* e l'*iperpiano stazionario*; la Ω subordina poi una proiezione non singolare ω tra gli iperpiani per la retta stazionaria e gli S_{r-2} per O' appartenenti all'iperpiano stazionario.

È subito visto che la trasformazione 2.2 si può ottenere come prodotto di una trasformazione del tipo

$$2.3 \quad T \equiv \begin{cases} \bar{x}_i = x_i \\ z' = \psi_{2,0}(\bar{x}) + \dots + \psi_{s,0}(\bar{x}) + \bar{z} \psi_{s-1,1}(\bar{x}) + \dots + a_s \bar{z}^s + [s + 1]_{\bar{x}z} \end{cases}$$

per una trasformazione regolare nella coppia (O, O')

$$2.4 \quad R \equiv \begin{cases} \bar{x}_i = x_i + \varphi_{2,i}(x, z) + [3]_{xz} \\ \bar{z} = z. \end{cases}$$

⁽⁵⁾ B. SEGRE. — *Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane*. Annali di Mat. IV, 28, 1949.

C. F. MANARA. — *Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari, mediante trasformazioni cremoniane*. Rend. Acc. Lincei, VII, 8, 1950.

⁽⁶⁾ M. VILLA — G. VAONA. — *Le trasformazioni puntuali in una coppia a jacobiano nullo*. Rend. Acc. Lincei, VIII, 6, 1949.

Una trasformazione del tipo 2.3 la diremo una trasformazione *pseudo-dejonqueriana*.

Per quanto si è ricordato sulle trasformazioni regolari, è chiaro che con condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione 2.2 sia *n* cremoniana, è che lo sia la trasformazione 2.3.

Nel seguito ci riferiremo quindi sempre a trasformazioni *pseudo-dejonqueriane*.

§ 1. — Approssimabilità cremoniana nell'intorno di un punto semplice della Jacobiana.

3. — TRASFORMAZIONI FRA PIANI.

Nella 2.3 posto $x_1 = y$, $x'_1 = y'$ si ha, essendo in tal caso $s = 2$,

$$3.1 \quad \begin{cases} y' = y \\ z' = a y^2 + b y z + c z^2 + \varphi_3(y, z) + \dots \end{cases}$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione precedente sia 2-cremoniana⁽⁷⁾ è che la tangente stazionaria sia tangente alla curva Jacobiana; ciò porta $c = 0$.

La trasformazione 3.1 si può allora scrivere

$$3.2 \quad \begin{cases} y' = y \\ z' = a y^2 + y z + \varphi_3(y, z) + \dots + \varphi_n(y, z) + [n + 1] \end{cases}$$

con

$$3.3 \quad \varphi_s(y, z) = \sum_0^s a_{n, s-h} y^h z^{s-h}.$$

La curva Jacobiana ha equazione

$$3.4 \quad y + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + \dots = 0.$$

TEOREMA: *Supposto che nella 3.2 si abbia*

$$3.5 \quad a_{0,h} = 0, \quad (h = 3, \dots, n - 1)$$

⁽⁷⁾ cfr. Il Lavoro citato in ⁽²⁾.

condizione necessaria e sufficiente affinché nei punti dell' E_{n-1} di origine O ed appartenente alla Jacobiana 3.4 la tangente stazionaria coincida con la tangente alla Jacobiana è che si abbia $a_{0,n} = 0$.

Nell'ipotesi 3.5 per l' E_{n-1} appartenente alla Jacobiana 3.4 si ha:

$$y = -n a_{0,n} z^{n-1} + [n]_z.$$

Sia $\bar{O}(\bar{y}, \bar{z})$ un punto della Jacobiana.

La tangente stazionaria in \bar{O} , a meno d'infinitesimi d'ordine superiore ad $n-2$, rispetto all'infinitesimo principale \bar{z} , ha equazione:

$$y = 0,$$

mentre la tangente alla Jacobiana in \bar{O} ha equazione:

$$y = -n(n-1) a_{0,n} \bar{z}^{n-2} z$$

e queste coincidono se e soltanto se $a_{0,n} = 0$.

Le condizioni 3.5 (per $h = 3, \dots, n$) sono quindi *necessarie* perchè la trasformazione sia n cremoniana.

Soddisfatte tali condizioni la trasformazione 3.2 si può scrivere:

$$3.6 \quad \begin{cases} y' = y \\ z' = ay^2 + y\{z + \varphi_2(y, z) + \dots + \varphi_{n-1}(y, z)\} + [n+1]; \end{cases}$$

si può quindi considerare come prodotto delle due trasformazioni:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ z' = a y_1^2 + y_1 z_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = y \\ z_1 = z + \varphi_2(y, z) + \dots + \varphi_{n-1}(y, z) + [n] \end{cases}$$

di cui la prima rappresenta una trasformazione quadratica e la seconda è regolare.

Le condizioni 3.5 sono quindi anche *sufficienti*.

È subito visto che alle precedenti condizioni analitiche si può dare la seguente interpretazione geometrica:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione puntuale fra due piani in una coppia di punti corrispondenti (O, O') a jacobiano nullo nell'intorno del punto O , semplice per la Jacobiana, sia approssimabile fino all'intorno d'ordine n con una trasformazione cremoniana è che l'elemento E_n d'origine O ed appartenente alla jacobiana appartenga alla curva corrispon-

dente alla retta stazionaria per O' ; ovvero, che le curve corrispondenti alle rette per O' abbiano un E_n comune (appartenente necessariamente alla jacobiana).

La caratterizzazione precedente ha evidentemente carattere topologico, quindi caratterizza le trasformazioni n -cremoniane del tipo in esame anche non pseudo dejonqueriane.

4. — TRASFORMAZIONI FRA DUE S_3 : APPROSSIMABILITÀ FINO INTORNO 3° ORDINE.

Per $r = 3$ indicate con x, y, z , e x', y', z' rispettivamente le coordinate in S_3 e S'_3 le equazioni 2.3 nel caso di O semplice per la Jacobiana (e quindi $s = 2$) si scrivono

$$4.1 \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = \psi_{2,0}(x, y) + z \psi_{2,1}(x, y) + a z^2 + \varphi_3(x, y, z) + [4]. \end{cases}$$

La condizione⁽⁸⁾ necessaria e sufficiente affinché la trasformazione sia 2-cremoniana è che sia $a = 0$.

Si verifica facilmente che la condizione precedente equivale al fatto che le superficie (o meglio le loro calotte del 2° ordine) corrispondenti ai piani per O' abbiano in comune l' E_2 .

$$x = [3]_t \quad , \quad y = [3]_t \quad , \quad z = t + [2]_t.$$

Questo fatto ha carattere topologico; quindi si ha il risultato di VILLA e VAONA:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione puntuale T fra due S_3 sia approssimabile, fino all'intorno del 2° ordine in una coppia (O, O') a jacobiano nullo, con O punto semplice della Jacobiana, con una trasformazione cremoniana è che le superficie corrispondenti ai piani per O' abbiano in comune un E_2 di centro O .

Supposta la 4.1 2-cremoniana possiamo assumere come piano $y = 0$ il piano tangente in O alla Jacobiana e nella 4.1 si ha

$$4.3 \quad z' = \psi_2(x, y) + y z + \varphi_3(x, y, z) + \dots + \varphi_n(x, y, z) + [n].$$

Determiniamo ora le condizioni affinché la trasformazione sia 3-cremoniana.

⁽⁸⁾ Nota (4) pag. 2.

Poniamo :

$$4.4 \quad \varphi_s(x, y, z) = \psi_{s,0}(x, y) + z \psi_{s-1,1}(x, y) + \dots + z^{s-1} \psi_{1,s-1}(x, y) + a_s z^s$$

$$\psi_{h,k}(x, y) = \sum_0^h \sum_0^k a_{h-l, l} x^{h-l} y^l \quad (h + k = s).$$

Per la superficie jacobiana J si ha

$$4.5 \quad y + \psi_{2,1}(x, y) + 2z \psi_{1,2}(x, y) + 3a_3 z^2 + \dots = 0.$$

Consideriamo il punto $\bar{O}(u, v, w)$, appartenente all'intorno del primo ordine di centro O della superficie Jacobiana. Effettuata la trasformazione

$$x = \bar{x} + u, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z} + v$$

in modo da portare l'origine in \bar{O} , con facili calcoli, si ha che la tangente stazionaria in \bar{O} ha equazioni :

$$\bar{x} = \bar{y} = 0.$$

Questa è tangente in \bar{O} alla Jacobiana se e soltanto se

$$\left(\frac{\partial J}{\partial z} \right)_0 = 2 a_{1,0}^2 u + 6 a_3 v = 0.$$

Se si vuole che questa relazione valga qualunque sia \bar{O} si deve avere

$$4.6 \quad a_{1,0}^2 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Queste condizioni sono dunque *necessarie* perchè la T sia 3-cremoniana. Soddisfatte le 4.6 si ha :

$$z' = \psi_{2,0}(x, y) + yz + \psi_{3,0}(x, y) + z \psi_{2,1}(x, y) + a_2 y z^2 + [4]$$

e la trasformazione T risulta allora prodotto (fino all'intorno del 3° ordine) delle due trasformazioni :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \bar{x}, \quad y' = \bar{y} \\ z' = \psi_{2,0}(\bar{x}, \bar{y}) + \psi_{3,0}(\bar{x}, \bar{y}) + z \{ \bar{y} + \psi_{2,1}(\bar{x}, \bar{y}) \} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = x, \quad \bar{y} = y \\ \bar{z} = z + a_2 z^2 \end{array} \right.$$

di cui la prima è una trasformazione di DE-JONQUIÈRES e la seconda è regolare.

Le condizioni 4.6 sono quindi anche *sufficienti* affinché la trasformazione 4.2 sia 3-cremoniana.

È facile verificare che le condizioni 4.6 corrispondono al fatto che le superficie corrispondenti ai piani per O' abbiano in comune l' E_3 :

$$4.7 \quad x = [4]_t, \quad y = [4]_t, \quad z = t + [2]_t$$

e che le superficie corrispondenti ai piani per la retta $z' = y' = 0$ (corrispondente al piano tangente in O alla Jacobiana nella proiettività $\omega(n, 2)$) siano tangenti fra loro lungo l' $E_2(4.2)$ appartenente al precedente E_3 .

Le condizioni precedenti hanno carattere topologico; quindi:

Sia (O, O') una coppia di punti corrispondenti in una trasformazione puntuale T fra due S_3 a jacobiano nullo, con O punto semplice della Jacobiana: le condizioni necessarie e sufficienti affinché la T sia approssimabile fino all'intorno del 3° ordine con una trasformazione cremoniana sono:

1) *le superficie corrispondenti ai piani per O' debbono avere in comune un E_3 .*

2) *indicata con j' la retta per O' , appartenente al piano stazionario e corrispondente al piano tangente in O alla Jacobiana, nella proiettività tra i piani per la retta stazionaria per O e le rette per O' del piano stazionario, le superficie corrispondenti ai piani per j' si tocchino lungo l' E_2 appartenente all' E_3 .*

OSSERVAZIONE. — Le condizioni 4.6 si possono determinare osservando che, con la scelta fatta del piano tangente in O alla Jacobiana lo sviluppo della z' nella 4.1, deve coincidere, qualunque sia la x con l'analogo sviluppo della z' nella 3.6.

5. — TRASFORMAZIONI FRA DUE S_3 : APPROSSIMABILITÀ FINO ALL'INTORNO D'ORDINE n .

Si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione 4.1 sia n -cremoniana è che essa si possa scrivere nella forma

$$5.1 \quad \begin{cases} x' = x, & y' = y \\ z' = A_n(x, y) + B_{n-1}(x, y) C_{n-1}(x, y, z) + [n+1] \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned}
 A_n(x, y) &= \psi_2(x, y) + \dots + \psi_n(x, y) \\
 5.1' \quad B_{n-1}(x, y) &= y + \varphi_2(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y) \\
 C_{n-1}(x, y) &= z + z^2 \{a_2 + \zeta_1(x, y, z) + \dots + \zeta_{n-3}(x, y, z)\}.
 \end{aligned}$$

La sufficienza della condizione è subito vista, in quanto come nel caso della 3-cremonianità, la 5.1 si può considerare come prodotto di una trasformazione di DE-JONQUIÈRES e di una trasformazione regolare.

Dimostriamo che la condizione è necessaria. Poichè essa è soddisfatta per $n = 2, 3$ (n. prec.) procediamo per induzione.

Supposta la $T(n-1)$ -cremoniana si ha quindi

$$\begin{aligned}
 z' = A_{n-1}(x, y) + B_{n-2}(x, y) C_{n-2}(x, y, z) + \\
 + \psi_{n,0}(x, y) + z \psi_{n-1,1}(x, y) + \dots + a_n z^n.
 \end{aligned}$$

Condizione necessaria affinché la trasformazione sia n -cremoniana è che la tangente stazionaria in ogni punto della Jacobiana appartenente all'intorno d'ordine $n-2$ del punto O (ossia alla calotta σ_{n-2}^J di centro O ed appartenente alla Jacobiana) sia tangente alla Jacobiana.

Con facili calcoli si ha:

1°) equazione della σ_{n-2}^J :

$$x = u, \quad z = v, \quad y = \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_{n-2} u^{n-2} + [n-1]_{uv}$$

ove

$$x = u, \quad y = \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_{n-2} u^{n-2} + [n-1]_u$$

è l'elemento lineare individuato dalla curva di equazione $B_{n-2}(x, y) = 0$

2°) posto

$$x = \bar{x} + u, \quad z = \bar{z} + v, \quad y = \bar{y} + \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_{n-2} u^{n-2}$$

la tangente stazionaria nel punto $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ ha equazione

$$\bar{x} = \bar{y} = 0;$$

3°) indicato con $a_{h,0}^n$ il coefficiente di x^h nella forma $\psi_{h,n-h}(x, y)$ la tangente stazionaria è tangente alla Jacobiana se e soltanto se

$$a_n = 0, \quad a_{h,0}^n = 0 \quad (h = 2, \dots, n-2);$$

4^o) le condizioni precedenti sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché la 5.2 abbia la forma che ha la z' nella 5.1.

È così dimostrato quanto si voleva.

Determiniamo ora una caratterizzazione geometrica della 5.1.

La superficie Jacobiana relativa alla 5.1 ha equazioni

$$B_{n-1}(x, y)[1 + \dots] + [n]_{xyz} = 0$$

e la sua calotta σ_{n-1}^J posto $x = u$, $z = v$ ha equazioni del tipo

$$x = u + [n]_{uv}, \quad y = \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1} + [n]_{uv}, \quad z = v + [n]_{uv}.$$

Alla calotta σ_{n-1}^J la trasformazione 5.1 fa corrispondere, l'elemento lineare E'_{n-1}

$$\begin{aligned} x' &= u + [n]_u, & y' &= \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1} + [n]_u, \\ z' &= \beta_2 u^2 + \dots + \beta_{n-1} u^{n-1} + [n]_u \end{aligned}$$

ove i coefficienti β_n dipendono dalle α_k e dai coefficienti del polinomio $A_n(x, y)$.

Quindi condizione necessaria affinché la T sia n -cremoniana è che esista una calotta d'ordine $n - 1$ di centro O alla quale corrisponda un elemento lineare E'_{n-1} .

La condizione è sufficiente: infatti se esiste un elemento E'_{n-1} di centro O' che si trasforma in una calotta questa è necessariamente del tipo

$$y = \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + [n]_{xz}$$

e pertanto la trasformazione è del tipo 5.1.

Quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione puntuale fra due S_3 in una coppia (O, O') a jacobiano nullo, con O punto semplice della Jacobiana sia approssimabile fino all'intorno d'ordine n con una trasformazione cremoniana è che esista una calotta di centro O d'ordine $n - 1$, a cui corrisponda un elemento lineare E'_{n-1} di centro O' .

Si osservi che al punto O' corrisponde l' E_n avente equazione

$$x = [n + 1]_t, \quad y = [n + 1]_t, \quad z = t + [2]_t;$$

ne segue che ai piani per O' corrispondono superficie passanti per l' E_n precedente.

6. — TRASFORMAZIONI FRA DUE S_r ($r > 3$).

Quanto si è detto nei due numeri precedenti per $r = 3$, si trasporta immediatamente al caso $r > 3$: basta sostituire ad x ed x' rispettivamente x_i ed x'_i .

Si ha quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione pseudo-de-jonqueriana sia n -cremoniana è che essa si possa scrivere nella forma

$$\begin{cases} x'_i = x_i \\ z' = A_n(x) + B_{n-1}(x) C_{n-1}(x, z) + [n + 1] \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, r - 1)$$

ove A_n, B_{n-1} sono polinomi nelle x di gradi rispettivamente n ed $n - 1$, C_{n-1} polinomio di grado $n - 1$ nelle x e z , contenente il termine di primo grado in z .

Ancora:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione puntuale fra due S , in una coppia (O, O') a jacobiano nullo, con O punto semplice della Jacobiana, sia approssimabile fino all'intorno d'ordine n con una trasformazione cremoniana è che esista una calotta ad $r - 1$ dimensioni di centro O e d'ordine $n - 1$ a cui corrisponda una calotta ad $r - 2$ dimensioni di centro O' .

§ 2. — Approssimabilità cremoniana nell'intorno di un punto multiplo della Jacobiana.

7. — TRASFORMAZIONI FRA PIANI.

Nella 2.3 posto $x_1 = y$ e $x'_1 = y'$ e supposto il punto O $(s - 1)^{\text{plo}}$ per la curva jacobiana, si ha:

$$7.1 \quad T \equiv \begin{cases} y' = y \\ z' = a_{20} y^2 + \dots + a_{s0} y^s + a_{s-1,1} y^{s-1} z + \dots + a_{0,s} z^s + [s + 1]_{yz} . \end{cases}$$

La curva Jacobiana ha equazione:

$$7.2 \quad a_{s-1,1} y^{s-1} + 2 a_{s-2,2} y^{s-2} z + \dots + s a_{0,s} z^{s-1} + [s]_{yz} = 0 .$$

Supponiamo che esista una trasformazione cremoniana T_c che approssimi la T fino all'intorno d'ordine s .

Poichè al punto O corrisponde un ben determinato punto O' , il punto O non è fondamentale per la T_c . Inoltre poichè le componenti della Jacobiana, contate ciascuna una sola volta sono curve di genere virtuale $g = 0$ ⁽⁹⁾, queste non hanno punti multipli fuori dei punti fondamentali. Quindi perchè O sia $(s - 1)^{p_1}$, la componente passante per O deve essere componente $(s - 1)^{p_1}$ per la Jacobiana.

Ne segue che condizione necessaria perchè esista una trasformazione che approssimi la T nella coppia (O, O') O deve essere origine di $s - 1$ rami lineari, tangenti in O con tangente la tangente stazionaria. Poichè questa ha equazione $y = 0$, dalla 6.2 si ha che condizioni necessarie perchè la 6.1 sia s -cremoniana è che si abbia

$$7.3 \quad a_{s-2,2} = a_{s-3,3} = \dots = a_{0,s} = 0.$$

Soddisfatte queste condizioni la trasformazione T (7.1) si scrive

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = a_{20} y^2 + \dots + a_{s0} y^s + a_{s-1,2} y^{s-1} z + [s + 1]_{yz} \end{cases}$$

ed è evidente che essa è s -cremoniana.

Quindi: *condizioni necessarie e sufficienti affinché la trasformazione T sia s -cremoniana è che siano soddisfatte le 7.3.*

Con ragionamento del tutto analogo al caso di O punto semplice, si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione in esame sia n -cremoniana è che essa si possa scrivere nella forma:

$$7.4 \quad \begin{cases} y' = y \\ z' = a_{20} y^2 + \dots + a_{s-1,0} y^{s-1} + y^{s-1} \{ \varphi_1(y, z) + \dots + \\ \quad + \varphi_{n-s+1}(y, z) \} + [n + 1]_{yz} \end{cases}$$

Le equazioni precedenti mettono poi in evidenza che anche in questo caso vale la caratterizzazione data alla fine del n. 3; quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione puntuale fra piani in una coppia (O, O') a jacobiano nullo di caratteristica uno sia approssimabile con una trasformazione cremoniana è che esista un elemento E_n di centro O che si trasformi nel punto O' : ovvero, che le curve corrispondenti alle rette per O' abbiano un E_n comune.

(9) F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, 1949, p. 35.

7. — TRASFORMAZIONI FRA DUE S_r ($r > 2$).

Dal confronto di quanto si è detto nel n. prec. con quanto si è visto nel caso che O sia punto semplice della Jacobiana, si può senz'altro affermare, che le caratterizzazioni date al n. 6 valgono anche nel caso attuale.

Esse quindi caratterizzano le trasformazioni puntuali in una coppia (O, O') a jacobiano nullo con determinante jacobiano di caratteristica massima tanto nel caso che O sia punto semplice della Jacobiana, quanto nel caso che O sia punto multiplo.

[*Pervenuta in Redazione il 12 VI-1951*]