ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO BENEDICTY

Sopra una trasformazione cremoniana collegata con la teoria delle funzioni quasi abeliane

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 4, nº 1-2 (1950), p. 27-33
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_1-2_27_0>

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE CREMONIANA COLLEGATA CON LA TEORIA DELLE FUNZIONI QUASI ABELIANE

di MARIO BENEDICTY (Roma)

Scopo di questa nota (¹) è lo studio di una particolare trasformazione cremoniana tra due spazi lineari a δ dimensioni, la quale può presentare un certo interesse perchè strettamente collegata con la teoria delle funzioni quasi abeliane (²); da tale punto di vista i due S_δ di cui trattasi saranno due modelli della varietà quasi abeliana di JACOBI relativa ad un campo neutro di genere effettivo nullo e genere virtuale δ. Uno dei due modelli è usato sistematicamente da SEVERI (³), l'altro da CONFORTO (⁴). Nello studio della trasformazione, oltre a considerare i relativi sistemi omaloidici, mi occuperò delle varietà eccezionali della corrispondenza, soprattutto in considerazione del loro significato nella teoria delle funzioni quasi abeliane.

1. INTRODUZIONE. — In un S_δ proiettivo siano fissate (⁵) δ_1 $(\leq \delta)$ coppie di iperpiani distinti A_j, B_j $(j = 1, \dots, \delta_1)$ e δ_2 $(= \delta - \delta_1)$ coppie di iperpiani coincidenti A_l, A_l $(l = \delta_1 + 1, \dots, \delta)$ — ossia δ_2 iperpiani A_l e sopra ciascuno di essi un $S_{\delta-2}$, staccato dall'iperpiano B_l — con la sola condizione che δ iperpiani generici, uno in ciascuno dei fasci $R_i =$ costante $(i = 1, \dots, \delta)$ determinati dalle singole coppie, siano tra loro indipendenti. Indicato con $R_i(P)$ il valore assunto dalla R_i quando al posto delle varia-

(¹) Il cui argomento è stato oggetto di una comunicazione al II Congresso della Società Matematica Austriaca (Innsbruck, 1949).

(²) Teoria costruita da SEVERI nella Memoria *Funzioni quasi abeliane*, « Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia » n 4 (1947), cui si rimanda per le nozioni qui presupposte e che sarà citata nel seguito con F. Q. A.

(³) F. Q. A., p. es. n. 32.

(⁴) F. CONFORTO: *Sopra le trasformazioni in sè della varietà di Jacobi relativa ad una curva di genere effettivo diverso dal genere virtuale, in ispecie nel caso di genere effettivo nullo*, « Ann. di Mat. » (4) 27 (1948).

(⁵) F. Q. A., n. 48.

bili si pongano le coordinate di un punto P, l'associare ad S_δ il gruppo Γ delle trasformazioni cremoniane:

$$(1)\quad R_j(P') = c_j R_j(P), \ R_l(P') = R_l(P) + c_l \ (j = 1, \dots, \delta_1 ; \ l = \delta_1 + 1, \dots, \delta)$$

dipendenti dai parametri c_i $(i = 1, \dots, \delta)$, lo rende una varietà quasi abeliana avente il carattere p nullo.

Se Γ' è un gruppo consimile in $\overline{S}_\delta$, distinto da S_δ o con esso coincidente, ottenuto a partire dalle coppie A'_i, B'_i $(i = 1, \dots, \delta)$, e siano $R'_i =$ costante i relativi fasci, le equazioni di Γ' sono:

$$R'_j(P') = c_j R'_j(P), \ R'_l(P') = R'_l(P) + c_l \ (j = 1, \dots, \delta_1 ; \ l = \delta_1 + 1, \dots, \delta)$$

e la trasformazione cremoniana:

$$(2)\qquad R'_i(P') = R_i(P) \qquad (i = 1, \dots, \delta)$$

muta l'un gruppo nell'altro.

Ciò equivale a dire che la (2) muta l'uno nell'altro i due corpi di funzioni quasi abeliane cui dà luogo l'associazione del gruppo Γ, o Γ', alla varietà S_δ, o $\overline{S}_\delta$.

In particolare, se Γ' è costruito a partire dalle coppie $x_i = 0$, $x_0 = 0$ $(i = 1, \dots, \delta)$, essendo $x_0, x_1, \dots, x_\delta$ coordinate proiettive omogenee in $\overline{S}_\delta$, le (2) si riducono alle:

$$(3)\qquad \frac{x_i}{x_0} = R_i(y_0, y_1, \dots, y_\delta) \qquad (i = 1, \dots, \delta)$$

ed è evidente che ogni trasformazione del tipo (2) è il prodotto di due trasformazioni del tipo (3), l'una diretta e l'altra inversa

Osservo appena: *a*) che l'associazione del gruppo Γ allo S_δ dà luogo ad un corpo di funzioni quasi abeliane nel quale $u_j = \log R_j$, $u_l = R_l$ $(j = 1, \dots, \delta_1 ; l = \delta_1 + 1, \dots, \delta)$ sono integrali invarianti, virtualmente di prima ed effettivamente di terza e rispettivamente di seconda specie; *b*) che la (3) si ottiene anche assumendo (v. nota (4)) come immagine della varietà quasi abeliana lo spazio $\overline{S}_\delta$ affine le cui coordinate (non omogenee) $\xi_i \left(= \frac{x_i}{x_0}\right)$ sono definite ponendo $\xi_j = e^{u_j}$, $\xi_l = u_l$ $(i, j, l$ assumono sempre i valori più volte precisati); *c*) che, qualora il corpo di funzioni quasi abeliane di cui si tratta sia ottenuto a partire da una curva C di genere effettivo nullo (v. nota (5)), su cui sia fissato un campo neutro mediante δ_1 coppie neutre di punti distinti e δ_2 coppie neutre di punti coincidenti, un modello S_δ della relativa varietà quasi abeliana di JACOBI si ottiene assumendo come coordinate (non omogenee) le funzioni simmetriche elementari dei gruppi di δ punti della curva, e come integrali virtualmente di prima specie:

$$u_j = \log \Pi_s{}_1^\delta \frac{t_s - \alpha_j}{t_s - \beta_j}\,, \quad u_l = \Sigma_s{}_1^\delta \frac{1}{t_s - \alpha_l}$$

(t_s sono le ascisse di δ punti variabili sopra una retta immagine di C; $\alpha_j\,,\beta_j$ e $\alpha_l\,,\alpha_l$ sono le ascisse dei punti delle coppie neutre).

La trasformazione, sia essa T, che in questo lavoro mi propongo di studiare, è appunto la (3); essa intercorre tra gli spazi S_δ e $\overline{S}_\delta$, in cui sono coordinate le x e le y sopra considerate. Previa un'eventuale omografia, si vedrà (n. 2) che i sistemi lineari omaloidici collegati con questa trasformazione sono: in S_δ quello delle forme d'ordine δ passanti per gli $S^*_{\delta-2}$ coordinati per l'origine e per δ $S^{**}_{\delta-2}$, uno in ciascuno degli iperpiani coordinati; in $\overline{S}_\delta$, il sistema delle forme d'ordine δ passanti per gli $\overline{S}^*_{\delta-2}$ impropri degli iperpiani coordinati e per una certa $\overline{V}_{\delta-2}$ di ordine $\delta^2 - 3\,\delta + 3$. Tra le eccezioni alla corrispondenza (n. 3) ha particolare importanza la $\overline{V}_{\delta-2}$, i cui punti si mutano nelle rette di S_δ appoggiate agli $S^{**}_{\delta-2}$. le quali, nel modello di cui all'osservazione c), rappresentano le g^1_δ neutre speciali della curva C.

2. I SISTEMI OMALOIDICI. — Si suppongano gli iperpiani $A_i\,, B_i$ ($i = 1\,,\ldots,\delta$) di S_δ del tutto generici, tali cioè da essere indipendenti a $\delta + 1$ a $\delta + 1$. Si potrà perciò ottenere, previa un'omografia di S_δ in sè, che A_i sia l'iperpiano $y_i = 0$ e (portando l'iperpiano improprio in quello individuato dai punti d'incontro dei nuovi assi con i rispettivi B_i) che i B_i abbiano le equazioni:

$$\beta_i\,(y) \equiv b_{i0}\,y_0 + \Sigma_h{}_1^\delta\, b_{ih}\,y_h = 0\,, \qquad b_{ii} = 0 \;\; (i = 1\,,\ldots,\delta).$$

Le (3) divengono allora (in coordinate non omogenee $\xi_i\,,\eta_i$ e con ovvio significato dei simboli):

$$\xi_i = \frac{\beta_i\,(\eta)}{\eta_i} \qquad (i = 1\,,\ldots,\delta) \tag{4}$$

e le loro inverse sono:

$$\eta_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \qquad (i = 1\,,\ldots,\delta), \tag{5}$$

con:

$$(6)\quad \varphi_0 = \begin{vmatrix} -\xi_1 & b_{12} \ldots & b_{1\delta} \\ b_{21} & -\xi_2 \ldots & b_{2\delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\delta 1} & b_{\delta 2} \ldots & -\xi_\delta \end{vmatrix}, \quad \varphi_i = - \begin{vmatrix} -\xi_1 \ldots b_{10} \ldots & b_{1\delta} \\ b_{21} \ldots b_{20} \ldots & b_{2\delta} \\ \cdot & \cdot \\ b_{\delta 1} \ldots b_{\delta 0} \ldots & -\xi_\delta \end{vmatrix} \quad (i=1,\ldots,\delta).$$

(φ_i è ottenuto da φ_0 sostituendo $-b_{10}, \ldots, -b_{\delta 0}$ agli elementi della colonna i-esima).

È evidente che l'iperpiano $h_0 + \sum_1^\delta {}_i\, h_i\, \xi_i = 0$ di $\overline{S}_\delta$ si muta nella forma F^δ di S_δ:

$$(7)\qquad f(\eta) \equiv h_0\, \eta_1 \ldots \eta_\delta + \sum_1^\delta {}_i\, h_i\, \eta_1 \ldots \eta_{i-1}\, \beta_i(\eta)\, \eta_{i+1} \ldots \eta_\delta = 0,$$

mentre l'iperpiano $k_0 + \sum_1^\delta {}_i\, k_i\, \eta_i = 0$ di S_δ si muta nella forma Φ^δ di $\overline{S}_\delta$:

$$(8)\qquad \varphi(\xi) \equiv \begin{vmatrix} k_0 & k_1 \ldots & k_\delta \\ b_{10} & -\xi_1 \ldots & b_{1\delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\delta 0} & b_{\delta 1} \ldots & -\xi_\delta \end{vmatrix} = 0.$$

È immediato che *le F sono forme di ordine δ di S_δ, passanti con molteplicità $k-1$ per gli $S^*_{\delta-k}$ coordinati $\eta_{p_1} = \ldots = \eta_{p_k} = 0$ e con molteplicità h per gli $S^{**}_{\delta-2h}$ $\eta_{q_1} = \ldots = \eta_{q_h} = \beta_{q_1} = \ldots = \beta_{q_h} = 0$, dove $p_1, \ldots, p_k$ $[q_1, \ldots, q_h]$ sono combinazioni degli indici* $1,\ldots,\delta$ $\left((k = 2,\ldots, \delta\,;\ h = 1,\ldots, \left[\frac{\delta}{2}\right]\right)$.

Si osservi che, imponendo ad una forma d'ordine δ di S_δ di contenere gli $S^*_{\delta-2}$ e gli $S^{**}_{\delta-2}$ (cioè facendo solo $k = 2$, $h = 1$) si ottiene una F.

Per quanto riguarda il sistema delle Φ, siano Φ_0, Φ_i le forme $\varphi_0 = 0$, $\varphi_i = 0$ [cfr. (6)]; si noti che, passando in forma omogenea, le φ_i vengono a contenere x_0 a fattore; tuttavia Φ_i sarà la forma già privata dell'iperpiano improprio. Dal fatto che nelle equazioni $\varphi_0 = 0$, $\varphi_i = 0$ le ξ non compaiono ciascuna con grado superiore al primo, e che anzi in φ_i la ξ_i non compare affatto, segue immediatamente che gli $\overline{S}^*_{\delta-k-1}$ impropri $x_0 = x_{p_1} = \ldots = x_{p_k} = 0$ (con simbolismo evidente e con $k = 1,\ldots, \delta - 1$) sono di molteplicità k per la Φ; inoltre la Φ generica non possiede altri punti impropri fuori di tali spazi.

Sia $\overline{V}$ la varietà costituita dai punti propri nei quali si annulla la matrice:

$$(9) \qquad \left\| \begin{matrix} b_{10} - \xi_1 & b_{12} \dots & b_{1\delta} \\ b_{20} & b_{21} - \xi_2 \dots & b_{2\delta} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ b_{\delta 0} & b_{\delta 1} \quad b_{\delta 2} \dots & - \xi_\delta \end{matrix} \right\|$$

e dai loro punti di accumulazione; proverò ora che essa è una $\overline{V}_{\delta-2}^{\delta^2-3\delta+3}$, che si può ottenere, al finito, come interferenza di due delle forme Φ_0, Φ_i, p. es. Φ_1 e Φ_2, e ne indicherò alcuni caratteri proiettivi.

Si osservi anzitutto che, se i b sono generici, la Φ_i è una forma (cilindrica) di ordine $\delta - 1$, irriducibile e razionale, perchè se ne ricava subito dall'equazione una rappresentazione parametrica razionale. Inoltre nel punto generico (proprio) di $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ non si annulla evidentemente il minore:

$$(10) \qquad \left\| \begin{matrix} b_{20} & b_{23} \dots & b_{2\delta} \\ b_{30} & - \xi_3 \dots & b_{3\delta} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ b_{\delta 0} & b_{\delta 3} \dots & - \xi_\delta \end{matrix} \right\|$$

della (9); annullandosi in tale punto φ_1 e φ_2, la (9) risulta in esso nulla. L'inverso è evidente. Segue che, al finito, la varietà $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ coincide con $\overline{V}$; e su tale varietà è ovviamente verificata la $\varphi = 0$, cioè per essa passano le Φ; anzi la Φ generica ci passa semplicemente, come la Φ_i, che si ottiene particolarizzando le k_i. La $\overline{V}$ è irriducibile e razionale per la medesima ragione per cui lo sono le Φ_i. Per determinarne l'ordine, la si concepisca come interferenza (incompleta, nello spazio proiettivo) di Φ_1, Φ_2; queste hanno in comune, oltre alla $\overline{V}$, il cui punto generico è ovviamente intersezione semplice, i $\delta - 2$ $\overline{S}_{\delta-2}^{*}$ $x_0 = x_{i'} = 0$ $(i' = 3, \dots, \delta)$, e il punto generico di ciascuno di questi è anch'esso intersezione semplice, come si verifica immediatamente; l'ordine di $\overline{V}_{\delta-2}$ è perciò $(\delta - 1)^2 - (\delta - 2) = \delta^2 - 3\,\delta + 3$.

Per determinare la molteplicità di $\overline{V}$ nel punto generico dello $\overline{S}_{\delta-h}^{*}$ $x_0 = x_{p_1} = \dots = x_{p_{h-1}} = 0$ $(h = 2, \dots, \delta - 1)$ si può supporre, per la simmetria formale della $\overline{V}$ rispetto alle x_i, che $p_1, \dots, p_{h-1}$ siano diversi da 1,2; si determina quindi con facili calcoli che esso è $(h - 1)$-plo per le Φ_1, Φ_2 e che i coni tangenti sono irriducibili e distinti; scartati gli $h + 1$ $\overline{S}_{\delta-2}^{*}$ per il punto, esso risulta per $\overline{V}$ di molteplicità $(h - 1)^2 - (h - 1) =$

$= (h-1)(h-2)$. Analogamente si determina la molteplicità dei punti impropri degli assi coordinati, che risulta $(\delta - 2)^2$.

Dopo di ciò si può enunciare;

Le forme Φ di $\overline{S}_\delta$ che per la (4) *si mutano in iperpiani di S_δ, sono forme di ordine δ passanti con molteplicità $k-1$ per gli $\overline{S}^*_{\delta-k}$ coordinati impropri* ($k = 2, \ldots, \delta$) *e semplicemente per la varietà $\overline{V}_{\delta-2}^{\delta^2-3\delta+3}$ su cui si annulla la* (9), *la quale è una varietà razionale contenente con molteplicità $(h-1)(h-2)$ gli $\overline{S}^*_{\delta-h}$ ($h = 2, \ldots, \delta-1$) e con molteplicità $(\delta-2)^2$ i punti impropri degli assi.*

È da notare che una forma d'ordine δ di $\overline{S}_\delta$, passante per $\overline{V}_{\delta-2}$ e per gli $\overline{S}^*_{\delta-2}$ è una Φ.

3. GLI ELEMENTI ECCEZIONALI. — Dalle equazioni (4) e (5) della T, scritte in forma omogenea e, dove occorra, con considerazioni di limite, si deduce facilmente che in T si corrispondono:

a) l'intorno dell'origine di S_δ e l'iperpiano improprio di $\overline{S}_\delta$;

b) gli iperpiani $y_i = 0$ di S_δ e gli intorni dei punti impropri degli assi di $\overline{S}_\delta$;

c) gli iperpiani $\beta_i = 0$ di S_δ e gli iperpiani $x_i = 0$ di $\overline{S}_\delta$;

d) gli intorni dei punti degli $S^*_{\delta-2}$ di S_δ e le generatrici dei cilindri Φ_i di $\overline{S}_\delta$;

e) l'intorno di ciascun punto degli $\overline{S}^*_{\delta-2}$ di $\overline{S}_\delta$ e l'asse y_i di S_δ;

infine, come subito preciserò:

f) gli intorni dei punti della $\overline{V}_{\delta-2}$ di $\overline{S}_\delta$ e le rette di S_δ appoggiate agli $S^{**}_{\delta-2}$.

Infatti le rette di S_δ appoggiate agli $S^{**}_{\delta-2}$ sono $\infty^{\delta-2}$ e riempiono, come luogo di punti, una forma rigata $E_{\delta-1}$, il cui ordine è $\delta - 1$ (6). È d'altronde evidente che la condizione per F di passare per un punto generico di una delle rette suddette è indipendente dal punto e che quindi a tutti i punti di una tal retta corrisponde in $\overline{S}_\delta$ il medesimo punto; e segue dalle formule che tale punto (fondamentale in $\overline{S}_\delta$) sta al finito, e quindi sulla $\overline{V}$.

4. LE TRASFORMATE DELLE RETTE. — Come immediata conseguenza delle proprietà considerate si determinano le curve che per le T, T^{-1} si mutano in rette.

Una retta di S_δ incontra in δ punti le F, in un punto ciascuno degli iperpiani $y_i = 0$, in $\delta - 1$ punti la $E_{\delta-1}$, quindi *una retta di S_δ si muta in una curva razionale di ordine δ di $\overline{S}_\delta$, passante per i punti impropri de-*

---

(6) Cfr. F. Q. A., n. 31.

gli assi e appoggiata in $\delta - 1$ *punti alla* $\overline{V}_{\delta-2}$; *ed ogni tale curva proviene da una retta,* perchè incontra in un punto la generica Φ, e come si può verificare anche mediante computo di costanti.

Una retta di $\overline{S}_\delta$ incontra in δ punti le Φ, in un punto l'iperpiano improprio, in $\delta - 1$ punti ciascuna Φ_i, quindi *una retta di* $\overline{S}_\delta$ *si muta in una curva razionale di ordine* δ *di* S_δ, *passante per l'origine e appoggiata in* $\delta - 1$ *punti a ciascuno degli* $S_{\delta-2}^{**}$; *ed ogni tale curva proviene da una retta,* perchè incontra in un punto la generica F, e come si può verificare mediante computo di costanti.

Per esemplificare: nel caso $\delta = 3$ le F sono superficie cubiche con punto doppio nell'origine, contenenti gli assi coordinati e tre rette giacenti nei piani coordinati; si mutano in rette le cubiche sghembe per l'origine e appoggiate in due punti a ciascuna delle rette suddette. Le Φ sono superficie cubiche contenenti le rette improprie dei piani coordinati, doppiamente i punti impropri degli assi e semplicemente una cubica sghemba $\overline{V}_1^3$ passante per questi ultimi punti; si mutano in rette le cubiche sghembe per tali punti e appoggiate in altri due punti (variabili) alla $\overline{V}$.

5. Osservazioni. — Se lo S_δ è il modello di cui al n. 1, c) della varietà quasi abeliana di Jacobi di un campo neutro di caratteri $p = 0$, $\pi = \delta = \delta_1 + \delta_2$, gli iperpiani A_j, B_j, A'_l sono osculatori ad una curva razionale e normale di S_δ; i B_l, che intersecano i rispettivi A'_l secondo $S_{\delta-2}$ osculatori alla curva (nel punto di osculazione di A_l), si possono scegliere del resto genericamente, sì da poter ragionare come nei nn. 2, 3, 4.

Si noti che ora i punti di $E_{\delta-1}$ sono immagini di gruppi neutri speciali e le generatrici di $E_{\delta-1}$ rappresentano le g_δ^1 neutre speciali; e la T muta la $E_{\delta-1}$ in $\overline{V}_{\delta-2}$, i cui punti rappresentano pertanto le g_δ^1 neutre speciali.

Lo $\overline{S}_\delta$ è dunque un modello, non privo di eccezioni, delle g_δ del campo neutro considerato, ma in esso le varietà di infinito degli integrali u_i (la trasformazione delle quali è messa in evidenza al n. 3) non sono tutte distinte, come avveniva in S_δ; questo era però un modello senza eccezione dei gruppi di δ punti della curva.

Come ha osservato il prof. Conforto al Congresso di Innsbruck, si pone qui il problema dell'esistenza ed eventualmente della costruzione di un modello proiettivo che rappresenti senza eccezione la varietà delle g_δ neutre del campo considerato, tale inoltre che le varietà di infinito degli integrali u_i siano tutte distinte.

Termino osservando che, ove non valgano le ipotesi di generalità fatte al n. 2, pur continuando a sussistere la trasformazione T, le conclusioni tratte possono alterarsi; può ad es. abbassarsi l'ordine della T, che, in ovvi casi estremi, può essere anche un'omografia.

[*Pervenuta alla Redazione il 24-1-1950*]