

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ENRICO MAGENES

## **Sui teoremi di Tonelli per la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 15,  
n° 1-4 (1950), p. 113-125

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1950\\_2\\_15\\_1-4\\_113\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_2_15_1-4_113_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SUI TEOREMI DI TONELLI PER LA SEMICONTINUITÀ NEI PROBLEMI DI MAYER E DI LAGRANGE <sup>(1)</sup>

di ENRICO MAGENES (Pisa).

Nel 1936 <sup>(2)</sup> il compianto Prof. LEONIDA TONELLI ha enunciato alcuni notevoli teoremi sulle condizioni sufficienti per la semicontinuità dei funzionali, che si incontrano nei problemi di Mayer e di Lagrange, proponendosi, come Egli stesso scrisse, di pubblicarne successivamente le dimostrazioni; ed aggiungeva «..., *voglio fin d'ora rilevare che tali dimostrazioni si ottengono integrando opportunamente quelle da me date, per gli integrali semplici in forma parametrica, nei miei Fondamenti di Calcolo delle Variazioni (Vol. I, pp. 262-275) e, per gli integrali in forma ordinaria, nella mia Memoria <sup>(3)</sup>: Sugli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria (pp. 407-411) ».*

Scopo della presente Nota è di far vedere come si ottengano le dimostrazioni di quei teoremi, seguendo appunto le indicazioni sopra riportate.

## Forma parametrica.

a) Sia  $F(x, y, x', y', u)$  una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali del I ordine rispetto a  $x'$  e  $y'$ , per ogni  $(x, y)$  di un campo  $A$ , per ogni coppia  $(x', y')$  di numeri non ambedue nulli e per ogni  $u$  di un dato intervallo  $\Delta$ . Inoltre  $F(x, y, x', y', u)$  sia nel dominio indicato (che diremo dominio  $D$ ) positivamente omogenea di grado 1, rispetto a  $x'$  e  $y'$ , e soddisfi alla:

$$(1) \quad \frac{F(x, y, x', y', u_1) - F(x, y, x', y', u_2)}{u_1 - u_2} \leq R,$$

con  $R$  costante fissa e  $u_1 \neq u_2$ .

Diremo *curva ordinaria*, relativa alla  $F$  e all'elemento iniziale  $a \in \Delta$ , ogni curva continua e rettificabile  $C: x=x(s), y=y(s)$  ( $0 \leq s \leq L$ ) —  $s$  essendo la lun-

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

<sup>(2)</sup> *Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange*. Rend. Acc. Naz. dei Lincei (6), Vol. XXIV, 1936, pp. 399-404.

<sup>(3)</sup> *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, Vol. 3, 1934, pp. 401-450.

ghezza dell'arco variabile e  $L$  la lunghezza totale della  $C$  appartenente ad  $A$  e tale che l'equazione differenziale :

$$u'(s) = F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u(s))$$

ammetta, in quasi-tutto  $(0, L)$ , una soluzione, assolutamente continua in  $(0, L)$  e soddisfacente alla condizione:  $u(0) = a$ ,  $u(s) \in A$ . Rappresenteremo detta soluzione con  $u_{C, a}(s)$ .

Considerata una classe  $K$  di curve ordinarie  $C$ , diremo che il funzionale  $u_{C, a}(s)$  è, nella classe  $K$ , *uniformemente semicontinuo inferiormente* su una curva ordinaria  $C_0$ , della classe, relativa all'elemento iniziale  $a_0$ , se, preso ad arbitrio  $\varepsilon > 0$ , è possibile determinare  $\varrho > 0$ , in modo che, per ogni curva ordinaria  $C$  di  $K$ , appartenente ordinatamente all'intorno ( $\varrho$ ) di  $C_0$  e relativa all'elemento iniziale  $a$  tale che  $a - a_0 > -\varrho$ , fissata comunque una corrispondenza ordinata  $\Omega$  <sup>(4)</sup> fra  $C$  e  $C_0$ , tale che la distanza fra due punti corrispondenti qualsiasi risulti sempre  $\leq \varrho$ , la differenza tra il valore di  $u_{C, a}$  in un punto qualunque di  $C$  e quello di  $u_{C_0, a_0}$  nel punto corrispondente di  $C_0$  resti sempre  $> -\varepsilon$ .

Dei 3 teoremi enunciati dal TONELLI, mi limiterò a dimostrare il seguente Teorema II (il Teorema I si dimostra in modo analogo e il Teorema III si deduce da esso, seguendo gli accorgimenti usati dal TONELLI nel n. 98, pp. 272-275, del vol. I dei *Fondamenti* <sup>(5)</sup>).

TEOREMA II. - *Nelle ipotesi ammesse sulla  $F(x, y, x', y', u)$ , se nel dominio  $D$  è sempre, per tutte le coppie  $(\bar{x}, \bar{y}')$  di numeri non ambedue nulli:*

$$(2) \quad E(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}', u) = F(x, y, \bar{x}, \bar{y}', u) - \\ - \{ \bar{x}' F_x(x, y, x', y', u) + \bar{y}' F_{y'}(x, y, x', y', u) \} \geq 0,$$

e se, per  $x, y, x', y', u$  fissi il segno = in (2) non vale mai per tutte le coppie  $(\bar{x}, \bar{y}')$  sopraindicate, il funzionale  $u_{C, a}$  è, nella classe  $K$ , *uniformemente semicontinuo inferiormente* su ogni curva di  $K$ .

b) *Dimostrazione.* - Si può supporre  $R > 0$ . In virtù di noti ragionamenti <sup>(6)</sup>, per ogni  $(x_0, y_0)$  di  $A$  e ogni  $u_0$  di  $\Delta$ , si possono determinare 3 numeri  $p_0$ ,  $q_0$  e  $r_0$  con  $r_0 > 0$ , in modo che la funzione

$$\bar{F}(x, y, x', y', u) = F(x, y, x', y', u) + p_0 x' + q_0 y'$$

sia  $> 0$  per  $(x, y) \in A$  e  $u \in \Delta$ , soddisfacenti alla  $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (u-u_0)^2} \leq r_0$ ,

<sup>(4)</sup> Per la definizione di corrispondenza  $\Omega$  v. L. TONELLI: *Fondamenti...*, Vol. I, p. 72.

<sup>(5)</sup> È opportuno osservare che anche i teoremi analoghi, enunciati dal TONELLI nella stessa Nota per il caso in cui la  $F$  dipenda, oltre che da  $x, y, x', y', u$ , anche da un'altra variabile  $v$ , si possono dimostrare in modo analogo.

<sup>(6)</sup> V. L. TONELLI: *Fondamenti...*, Vol. I, pp. 239-241 e pag. 269.

e per tutte le coppie  $(x', y')$  di numeri non ambedue nulli. Sia allora  $C_0$   $[x=x_0(s); y=y_0(s), 0 \leq s \leq L_0]$  una curva ordinaria di  $K$ , di elemento iniziale  $\alpha_0$ .

Se consideriamo nello spazio  $(x, y, u)$  la curva rettificabile  $\Gamma$ , di equazioni:

$$x=x_0(s), \quad y=y_0(s), \quad u=u_{C_0, \alpha_0}(s), \quad 0 \leq s \leq L_0,$$

potremo quindi determinare per ogni punto  $[x_0(s), y_0(s), u_{C_0, \alpha_0}(s)]$  di  $\Gamma$  i numeri  $p_0, q_0$  e  $r_0$  sopra indicati (<sup>7</sup>), e quindi una sfera di raggio  $r_0$  col centro nel punto stesso. Sostituiamo a questa sfera un cilindro di asse parallelo all'asse  $u$  e inscritto nella sfera stessa, in modo che il massimo arco di  $\Gamma$ , contenente il punto  $[x_0(s), y_0(s), u_{C_0, \alpha_0}(s)]$  e in esso contenuto, sia anche contenuto nel cilindro coassiale di ugual base e di metà altezza, con baricentro nel punto stesso; e fissiamo di prendere tra tutti i possibili tali cilindri quello di raggio massimo. Il teorema di PINCHERLE-BOREL ci permette di scegliere un numero finito  $0_1, 0_2, \dots, 0_m$  di questi cilindri e quindi, sopprimendo in ciascuno di essi quelle parti che risultassero appartenere anche ad altri cilindri dello stesso gruppo e di indice inferiore, un numero finito di intorni spaziali, senza punti interni a comune, ricoprenti la curva  $\Gamma$ . In corrispondenza ad essi  $\Gamma$  risulterà spezzata in un numero finito di archi consecutivi e quindi così avverrà anche per la curva  $C_0$ . Potremo anche far in modo, suddividendo ulteriormente gli archi di  $C_0$ , così determinati, che ciascuno di essi abbia lunghezza  $\leq \frac{1}{2R}$ . Basterà allora dimostrare la semicontinuità inferiore di  $u_{C, \alpha}$  su ciascuno di questi archi, poichè sono in numero *finito*. Per questo supporremo senz'altro che  $C_0$  stessa soddisfi alle condizioni cui soddisfano gli archi suddetti, vale a dire:

I) alla lunghezza  $L_0 \leq \frac{1}{2R}$ ;

II) esistono 4 numeri  $p_0, q_0, \varrho_0 > 0, R_0 > 0$  in modo che la funzione:

$$(3) \quad \bar{F}(x, y, x', y', u) = F(x, y, x', y', u) + p_0 x' + q_0 y'$$

sia  $> 0$  per gli  $(x, y)$  di  $A$  appartenenti all'intorno  $(\varrho_0)$  di  $C_0$ , per  $u \in \Delta$  e soddisfacente alla  $\bar{u}_0 - R_0 \leq u \leq \bar{U}_0 + R_0$ , dove  $\bar{u}_0$  e  $\bar{U}_0$  sono il minimo e il massimo di  $u_{C_0, \alpha_0}(s)$  in  $(0, L_0)$ , e per le coppie  $(x', y')$  di numeri non ambedue nulli.

Scelto  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, ma  $\leq R_0$ , poniamo  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon R}{21R+1}$ . Detti  $m$  e  $M$  il minimo e il massimo di  $\bar{F}(x, y, x', y', u)$ , per  $(x, y) \in A$  e appartenente all'intorno  $(\varrho_0)$  di  $C_0$ , per  $u \in \Delta$  e soddisfacente alla  $\bar{u}_0 - R_0 \leq u \leq \bar{U}_0 + R_0$ , e per le coppie  $(x', y')$  normalizzate, determiniamo un  $\delta > 0$  in modo che, per ogni punto

(<sup>7</sup>) La scelta di  $p_0, q_0, r_0$  può fissarsi in modo analogo a quello indicato a pag. 269 del Vol. I dei *Fondamenti*.

$(x_0, y_0)$  di  $C_0$ , se  $x'$  e  $y'$  soddisfano alla

$$\frac{1}{4} \leq x'^2 + y'^2 \leq \left(\frac{M}{m}\right)^2,$$

e se  $u$  soddisfa alla  $\bar{u}_0 - R_0 \leq u \leq \bar{U}_0 + R_0$ , sia

$$(4) \quad \left| \bar{F}(x, y, x', y', u) - \bar{F}(x_0, y_0, x', y', u) \right| < \varepsilon_1.$$

per ogni  $(x, y)$  di  $A$  distante da  $(x_0, y_0)$  per non più di  $\delta$ . Inoltre, tenendo presente che

$$\bar{F}_{x'}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_{C_0, a_0}(s)) \quad \text{e} \quad \bar{F}_{y'}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_{C_0, a_0}(s))$$

sono in  $(0, L_0)$  integrabili e in modulo  $\leq M_1$ , con  $M_1$  costante opportuna, determiniamo <sup>(8)</sup> un  $\eta > 0$  tale che sia

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_r \int_{a_r}^{b_r} y'(s) \bar{F}_{x'}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_{C_0, a_0}(s)) ds \right| < \varepsilon_1 + M_1 \sum_r |y(b_r) - y(a_r)|, \\ \left| \sum_r \int_{a_r}^{b_r} y'(s) \bar{F}_{y'}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_{C_0, a_0}(s)) ds \right| < \varepsilon_1 + M_1 \sum_r |y(b_r) - y(a_r)| \end{array} \right.$$

per ogni sistema di intervalli  $(a_r, b_r)$  non sovrappontentisi di  $(0, L_0)$  e per ogni funzione  $y(s)$  assolutamente continua soddisfacente negli  $(a_r, b_r)$  alla  $|y(s)| \leq \eta$ , e quasi-dappertutto negli  $(a_r, b_r)$  alla  $y'(s) \leq 1 + \frac{M}{m}$ .

Dividiamo ora  $C_0$  in  $n$  archi, di uguale lunghezza, mediante i punti  $P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, \dots, P_n^{(0)}$ , corrispondenti ai valori  $s_0=0, s_1, \dots, s_n=L_0$  di  $s$ , in modo che siano soddisfatte le

$$(6) \quad \frac{1+L_0}{n} < \frac{1}{2} \delta; \quad \frac{1+L_0}{n} < \eta; \quad \frac{4M_1}{n} < \varepsilon_1; \quad \frac{8M_1(1+L_0)}{n} < \varepsilon,$$

e la

$$(7) \quad |u_{C_0, a_0}(s') - u_{C_0, a_0}(s'')| < \varepsilon_1,$$

per ogni coppia  $(s', s'')$  di valori di  $s$  appartenenti a uno stesso intervallo  $(s_i, s_{i+1})$ , e inoltre in modo che, se  $\gamma_0$  è un qualsiasi arco di  $C_0$ , per ogni arco  $\gamma$  continuo e rettificabile, appartenente ordinatamente all'intorno  $\left(\frac{1+L_0}{n}\right)$  di  $\gamma_0$ , sia

$$(8) \quad \left| \int_{\gamma_0} (p_0 x_0' + q_0 y_0') ds - \int_{\gamma} (p_0 x' + q_0 y') ds \right| < \varepsilon_1.$$

<sup>(8)</sup> V. L. TONELLI : *Fondamenti*...., Vol. I, pag. 213.

Sia poi  $\varrho > 0$  e  $< \min\left(\varrho_0, \eta, \frac{1}{n^2}, \varepsilon_1\right)$  e inoltre tale che ogni curva, appartenente ordinatamente all'intorno  $(\varrho)$  di un qualunque arco  $C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})$  di  $C_0$ , abbia lunghezza  $> \frac{1}{2n} L_0$ .

Fissati così  $n$  e  $\varrho$ , sia  $C$  una qualunque curva ordinaria di  $K$ , di elemento iniziale  $\alpha$ , con  $\alpha - \alpha_0 > -\varrho$ , appartenente ordinatamente all'intorno  $(\varrho)$  di  $C_0$ . Sia  $\Omega'$  una qualunque corrispondenza ordinata tra  $C$  e  $C_0$  tale che la distanza tra due punti corrispondenti sia sempre  $\leq \varrho$  e indichiamo con  $P_0, P_1, \dots, P_n$  i punti di  $C$  corrispondenti a  $P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, \dots, P_n^{(0)}$ , intendendo che, se in base a  $\Omega'$  corrispondessero più punti sulla  $C$ ,  $P_r$  sia il primo di essi per  $r < n$  e l'ultimo per  $r = n$ . Indicando con  $\sigma$  le lunghezze degli archi di  $C$  e con  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  quelle di  $C(P_0, P_1), \dots, C(P_0, P_n)$ , sarà allora :

$$(9) \quad \sigma_{i+1} - \sigma_i > \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{2}, \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Per ogni  $i$  da 0 a  $n-1$ , poniamo fra  $C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})$  e  $C(P_i, P_{i+1})$  la nuova corrispondenza ordinata  $\Omega''$  definita da :

$$(10) \quad \sigma = \sigma(s) = \sigma_i + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{s_{i+1} - s_i} (s - s_i).$$

Se  $x = \bar{x}(\sigma)$ ,  $y = \bar{y}(\sigma)$  ( $0 \leq \sigma \leq \sigma_n$ ) è la rappresentazione parametrica di  $C$  in funzione di  $\sigma$ , introducendo le (10) otterremo per  $C(P_i, P_{i+1})$  :

$$x = \bar{x}[\sigma(s)] = x(s); \quad y = \bar{y}[\sigma(s)] = y(s), \quad (s_i \leq s \leq s_{i+1}).$$

Detti  $Q^{(0)}$  e  $P$  i punti di  $C_0$  e  $C$ , corrispondenti, secondo la  $\Omega''$ , a uno stesso valore di  $s$  in  $(s_i, s_{i+1})$ , e detto  $P^{(0)}$  il punto di  $C_0$  corrispondente a  $P$  secondo  $\Omega'$ , risulta  $\text{dist.}(P^{(0)}, P) \leq \varrho < \frac{1}{n^2}$  e  $\text{dist.}(P^{(0)}, Q^{(0)}) \leq \frac{L_0}{n}$  e quindi  $\text{dist.}(Q^{(0)}, P) < \frac{1+L_0}{n}$  e perciò :

$$(11) \quad |x(s) - x_0(s)| < \frac{1+L}{n}; \quad |y(s) - y_0(s)| < \frac{1+L_0}{n},$$

per  $s \in (s_i, s_{i+1})$  e inoltre :

$$(12) \quad \begin{cases} |x(s_i) - x_0(s_i)| \leq \varrho; & |y(s_i) - y_0(s_i)| \leq \varrho, \\ |x(s_{i+1}) - x_0(s_{i+1})| \leq \varrho; & |y(s_{i+1}) - y_0(s_{i+1})| \leq \varrho. \end{cases}$$

E negli archi in cui è verificata la

$$\sigma_{i+1} - \sigma_i < \frac{M}{m} (s_{i+1} - s_i),$$

varranno pure in quasi-tutto  $(s_i, s_{i+1})$  le

$$(13) \quad \begin{cases} |x_0'(s)| \leq 1; & |y_0'(s)| \leq 1, \\ |x'(s)| < \frac{M}{m}; & |y'(s)| < \frac{M}{m}. \end{cases}$$

Sia ora  $\bar{P}$  un qualunque punto di  $C$  corrispondente al valore  $\bar{s}$  di  $s$ ; per i punti  $\bar{P}^{(0)}$  e  $\bar{Q}^{(0)}$ , corrispondenti a  $\bar{P}$  secondo la  $\Omega'$  e la  $\Omega''$  è soddisfatta, in virtù di (7), la

$$(14) \quad |u_0(\bar{P}^{(0)}) - u_0(\bar{Q}^{(0)})| < \varepsilon_1,$$

intendendo d'ora innanzi di indicare con  $u_0(P)$  e  $u(P)$  il valore di  $u_{C_0, a_0}$  e  $u_{C, a}$  in un punto  $P$ . Se è  $u(\bar{P}) - u_0(\bar{Q}^{(0)}) \geq 0$ , per la (14) è pure  $u(\bar{P}) - u_0(\bar{P}^{(0)}) > -\varepsilon$ . Supponiamo allora  $u(\bar{P}) < u_0(\bar{Q}^{(0)})$  e sia  $(s^*, \bar{s})$  l'intorno sinistro più ampio di  $\bar{s}$ , nei cui punti interni vale ancora la  $u(P) < u_0(Q^{(0)})$ ; supponiamo dapprima che sia verificata in  $(s^*, \bar{s})$  la:

$$(15) \quad u(P) \geq \bar{u}_0 - R_0.$$

Osserviamo che è

$$(16) \quad u(P^*) - u_0(Q^{*(0)}) > -\varepsilon_1.$$

dove  $P^*$  e  $Q^{*(0)}$  corrispondono a  $s^*$  rispettivamente su  $C$  e su  $C_0$ .

Se  $(s^*, \bar{s})$  è contenuto negli intervalli  $(s_i, s_{i+1})$  per  $i$  da  $r$  a  $q$ , cioè se è:

$$s_r \leq s^* < s_{r+1}; \quad s_q < \bar{s} \leq s_{q+1}, \quad (0 \leq r \leq q),$$

potremo scrivere

$$\begin{aligned} u(\bar{P}) &= u(P^*) + \int_{C(P^*, \bar{P})} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}', u) d\sigma = u(P^*) + \int_{C(P^*, \bar{P})} \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}', u) d\sigma - \\ &- \int_{C(P^*, \bar{P})} (p_0 \bar{x}' + q_0 \bar{y}') d\sigma = u(P^*) + \bar{I}_{C(P^*, \bar{P})} - \int_{C(P^*, \bar{P})} (p_0 \bar{x}' + q_0 \bar{y}') d\sigma = u(P^*) + \\ &+ \bar{I}_{C(P^*, P_{r+1})} + \sum_{i=r+1}^{q-1} \bar{I}_{C(P_i, P_{i+1})} + \bar{I}_{C(P_q, \bar{P})} - \int_{C(P^*, \bar{P})} (p_0 \bar{x}' + q_0 \bar{y}') d\sigma, \end{aligned}$$

dove si intende

$$\bar{I}_{C(P^*, \bar{P})} = \int_{C(P^*, \bar{P})} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}', u) d\sigma,$$

e analogamente per gli altri simboli.

E analogamente:

$$\begin{aligned} u_0(\bar{Q}^{(0)}) &= u_0(Q^{*(0)}) + \bar{I}_{C_0(Q^{*(0)}, P_{r+1}^{(0)})} + \sum_{i=r+1}^{q-1} \bar{I}_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})} + \bar{I}_{C_0(P_q^{(0)}, \bar{Q}^{(0)})} - \\ &- \int_{C_0(Q^{*(0)}, \bar{Q}^{(0)})} (p_0 x_0' + q_0 y_0') d\sigma. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, in virtù anche della ipotesi (15) è:

$$\bar{I}_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})} \leq M(s_{i+1} - s_i); \quad \bar{I}_{C(P_i, P_{i+1})} \geq m(\sigma_{i+1} - \sigma_i), \quad (i=r+1, \dots, q-1).$$

Se quindi è verificata la  $\sigma_{i+1} - \sigma_i \geq \frac{M}{m} (s_{i+1} - s_i)$ , è senz'altro :

$$\bar{I}_{C(P_i, P_{i+1})} \geq \bar{I}_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})}.$$

Analoga osservazione va fatta per gli archi  $C_0(Q^{*(0)}, P_{r+1}^{(0)})$ ,  $C(P^*, P_{r+1})$ ,  $C_0(P_q^{(0)}, \bar{Q}^{(0)})$ ,  $C(P_q, \bar{P})$ . Cosicchè, tenendo presente la (16) e la (8), si ha :

$$(17) \quad u(\bar{P}) - u_0(\bar{Q}^{(0)}) \geq -\varepsilon_1 + \sum_i'' [\bar{I}_{C(P_i, P_{i+1})} - \bar{I}_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})}] - \varepsilon_1,$$

dove  $\sum_i''$  è estesa solo a quegli archi in cui valga la  $\sigma_{i+1} - \sigma_i < \frac{M}{m} (s_{i+1} - s_i)$  [o le analoghe se si tratta di  $C_0(Q^{*(0)}, P_{r+1}^{(0)})$ ,  $C(P^*, P_{r+1})$  o di  $C_0(P_q^{(0)}, \bar{Q}^{(0)})$ ,  $C(P_q, \bar{P})$ ]. Posto allora, per ogni  $i$  della  $\sum_i''$ ,

$$D_i = \bar{I}_{C(P_i, P_{i+1})} - \bar{I}_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})},$$

si ha :

$$\begin{aligned} D_i &= \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{ \bar{F}(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u[\sigma(s)]) - \bar{F}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_0(s)) \} ds = \\ &= \int_{s_i}^{s_{i+1}} [\bar{F}(x, y, x', y', u) - \bar{F}(x_0, y_0, x', y', u)] ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \bar{F}(x_0, y_0, x', y', u) - \\ &\quad - \bar{F}(x_0, y_0, x', y', u_0) ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} [\bar{F}(x_0, y_0, x', y', u_0) - \bar{F}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0)] ds. \end{aligned}$$

Il primo integrale dell'ultimo membro è  $> -\varepsilon_1(s_{i+1} - s_i)$ ; il secondo, in virtù delle (1) e (3), e poichè è  $u_0(s) - u[\sigma(s)] > 0$  per  $s^* < s \leq \bar{s}$ , è  $\geq R \int_{s_i}^{s_{i+1}} (u_0 - u) ds$  e quindi, se  $\delta_1$  è il massimo di  $u_0(s) - u[\sigma(s)]$  in  $(s^*, \bar{s})$ , è pure  $\geq -R(s_{i+1} - s_i)\delta_1$ . Infine si ha :

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_0, y_0, x', y', u_0) - \bar{F}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0) &= E(x_0, y_0, x_0', y_0', x', y', u_0) + \\ &\quad + (x' - x_0') \bar{F}_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0) + (y' - y_0') \bar{F}_{y'}(x_0, y_0, y_0', y_0', u_0). \end{aligned}$$

Cosicchè, sommando rispetto ad  $i$  secondo la  $\sum_i''$ , e ricordando la (2), si ha :

$$\begin{aligned} u(\bar{P}) - u_0(\bar{Q}^{(0)}) &> -2\varepsilon_1 - \varepsilon_1 L_0 - R\delta_1 L_0 + \int_{s^*}^{s_{r+1}} (x' - x_0') \bar{F}_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0) ds + \\ &+ \sum_{r+1}^{q-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x' - x_0') \bar{F}_{x'} ds + \int_{s_q}^{\bar{s}} (x' - x_0) \bar{F}_{x'} ds + \int_{s^*}^{s_{r+1}} (y' - y_0') \bar{F}_{y'}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0) ds + \\ &+ \sum_{r+1}^{q-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (y' - y_0') \bar{F}_{y'} ds + \int_{s_q}^{\bar{s}} (y' - y_0') \bar{F}_{y'} ds, \end{aligned}$$

dove gli integrali estesi a  $(s^*, s_{r+1})$  e  $(s_q, \bar{s})$  possono eventualmente mancare.

In virtù allora delle (11), (13), (6) e (5), otteniamo :

$$\begin{aligned} \left| \int_{s^*}^{s_{r+1}} (x' - x_0') \bar{F}_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0) ds \right| &< \varepsilon_1 + M_1 |x(s_{r+1}) - x_0(s_{r+1}) + x_0(s^*) - x(s^*)|, \\ \left| \sum_{r+1}^{q-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x' - x_0') \bar{F}_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0) ds \right| &< \varepsilon_1 + M_1 \sum_{r+1}^{q-1} |x(s_{i+1}) - x_0(s_{i+1}) + x_0(s_i) - x(s_i)|, \\ \left| \int_{s_q}^{\bar{s}} (x' - x_0') \bar{F}_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0) ds \right| &< \varepsilon_1 + M_1 |x(\bar{s}) - x_0(\bar{s}) + x_0(s_q) - x(s_q)|, \end{aligned}$$

e analogamente per gli altri integrali. Sicchè, in virtù delle (11), (12), (6) e della  $L_0 \leq \frac{1}{2R}$ , otteniamo in definitiva :

$$u(\bar{P}) - u_0(\bar{Q}^{(0)}) > -\varepsilon_1 \left(10 + \frac{1}{2R}\right) - \frac{\delta_1}{2}.$$

Dico che è

$$\delta_1 < 2\varepsilon_1 \left(10 + \frac{1}{2R}\right).$$

Infatti, se  $s'$  è un valore di  $(s^*, \bar{s})$  tale che  $u_0(s') - u[\sigma(s')] = \delta_1$ , detti  $P'$  e  $Q'^{(0)}$  i punti corrispondenti a  $s'$  su  $C$  e su  $C_0$ , ripetendo su  $u(P') - u_0(Q'^{(0)})$  il ragionamento, fatto or ora su  $u(\bar{P}) - u_0(\bar{Q}^{(0)})$ , otterremo :

$$u(P') - u_0(Q'^{(0)}) = \delta_1 > -\varepsilon_1 \left(10 + \frac{1}{2R}\right) - \frac{\delta_1}{2},$$

da cui

$$\delta_1 < 2\varepsilon_1 \left(10 + \frac{1}{2R}\right).$$

In virtù anche della (14), si ha quindi :

$$(18) \quad u(\bar{P}) - u_0(\bar{P}^{(0)}) > -\varepsilon.$$

Dimostriamo ora che la (15) è effettivamente verificata. Infatti, se ciò non fosse, poichè vale la (16), ci sarà un primo valore di  $s$ ,  $s'' > s^*$ , tale che  $u[\sigma(s'')] = \bar{u}_0 - R_0$ , e per  $s^* \leq s < s''$  è verificata la (15). Ripetiamo allora su  $u(P'') - u_0(P''^{(0)})$  (dove  $P''$  corrisponde a  $s''$  su  $C$  e  $P''^{(0)}$  corrisponde a  $P''$  secondo la  $\Omega'$ ) il ragionamento fatto più sopra per  $u(\bar{P}) - u_0(\bar{P}^{(0)})$ , che ci ha condotti alla (18); otterremo  $u(P'') - u_0(P''^{(0)}) > -\varepsilon_1 > -R_0$ , in contraddizione col fatto che, essendo  $\bar{u}_0$  il minimo di  $u_0(P^{(0)})$  su  $C_0$ , dovrebbe essere  $u(P'') - u_0(P''^{(0)}) \leq -R_0$ . c. v. d.

### Forma ordinaria.

a) Sia  $f(x, y, y', u)$  una funzione finita e continua, insieme con la sua derivata parziale  $f_{y'}$ , per ogni  $(x, y)$  di un campo  $A$ , ogni  $y'$  finito e ogni  $u$  di un intervallo  $\Delta$ . Inoltre, nel dominio  $D_1$ , ora indicato, la  $f$  soddisfi alla

$$(1) \quad \frac{f(x, y, y', u_1) - f(x, y, y', u_2)}{u_1 - u_2} \leq R \{ 1 + |y'| + |f(x, y, y', u_2)| \},$$

con  $R$  costante fissa e  $u_1 \geq u_2$ . Diremo *curva ordinaria*, relativa alle  $f$  e all'elemento iniziale  $a \in \Delta$ , ogni curva  $C: y=y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , con  $y(x)$  assolutamente continua in  $(a, b)$ , appartenente ad  $A$  e tale che l'equazione differenziale

$$u'(x) = f(x, y(x), y'(x), u(x)),$$

ammetta in quasi-tutto  $(a, b)$  una soluzione, assolutamente continua in  $(a, b)$  e soddisfacente alla  $u(a) = a$  e alla  $u(x) \in \Delta$ . Rappresenteremo detta soluzione con  $u_{C, a}(x)$ , e porremo ovviamente una definizione di *semicontinuità inferiore uniforme*, analoga a quella data per la forma parametrica.

Dei teoremi enunciati dal TONELLI, mi limito anche qui a dimostrare il Teorema IV (il Teorema V si deduce da esso come si può dedurre il Teorema III dal Teorema II; valgono anche qui osservazioni analoghe a quelle della nota (5)).

TEOREMA IV. - *Nelle ipotesi ammesse sulla  $f(x, y, y', u)$ , se nel dominio  $D_1$  è, per tutti gli  $\bar{y}'$ ,*

$$(2) \quad E(x, y, y', \bar{y}', u) = f(x, y, \bar{y}', u) - \{ f(x, y, y', u) + (\bar{y}' - y') f_{y'}(x, y, y', u) \} \geq 0,$$

*purchè per  $x, y, y', u$  fissi, il segno = non valga mai per tutti gli  $\bar{y}'$ , il funzionale  $u_{C, a}$  è, in una classe  $K$  di curve ordinarie  $C$ , uniformemente semicontinuo inferiormente su ogni elemento di  $K$ .*

b) Si può supporre  $R > 0$ . In virtù di noti ragionamenti <sup>(9)</sup>, preso ad arbitrio un  $\varepsilon > 0$ , per ogni  $(x_0, y_0) \in A$ , ogni  $u_0 \in \Delta$  e ogni  $y'_0$ , si possono determinare 4 numeri  $p, q, \varrho > 0, r > 0$ , in modo che per  $(x, y) \in A, u \in \Delta$  e soddisfacenti alla :

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (u-u_0)^2} \leq \varrho,$$

sia :

$$f(x, y, y', u) - (p + qy') > r|y'|$$

per tutti gli  $y'$ , e

$$f(x, y, y', u) < p + qy' + \varepsilon$$

per gli  $y'$  tali che  $|y' - y'_0| \leq \varrho$ .

Considerata allora una curva ordinaria  $C_0$  di  $K$  ( $y = y_0(x)$   $a_0 \leq x \leq b_0$ ), di elemento iniziale  $a_0$ , sfruttando la prima parte della proprietà ora enunciata, in modo analogo a quanto si è fatto per il Teorema II, potremo riportare la dimostrazione al caso che  $C_0$  soddisfi alla condizione :

I) esistano 5 numeri  $p, q, r, \varrho_0, r_0$ , con  $r, \varrho_0$  e  $r_0$  positivi, in modo che per  $(x, y) \in A$  e appartenenti all'intorno ( $\varrho_0$ ) di  $C_0$ , per  $u \in \Delta$  e soddisfacente alla  $\bar{u}_0 - r_0 \leq u \leq \bar{U}_0 + r_0$ , (dove  $\bar{u}$  e  $\bar{U}$  sono rispettivamente il minimo e il massimo di  $u_{C_0, a_0}(x)$  in  $(a_0, b_0)$ ), e per ogni  $y'$  sia

$$(3) \quad \bar{f}(x, y, y', u) = f(x, y, y', u) - (p + qy') > r|y'|;$$

e inoltre, in virtù dell'uniforme continuità di  $y_0(x)$  e di  $u_{C_0, a_0}(x)$  in  $(a_0, b_0)$ , e sempre per il fatto che, avendo diviso una curva in un numero *finito* di archi e volendo dimostrare la semicontinuità di  $u_{C, a}$  su di essa, basta dimostrarla su ciascuno degli archi considerati, potremo anche supporre che  $C_0$  soddisfi alla condizione

$$\text{II) } \max \left[ b_0 - a_0; 2|p|(b_0 - a_0); \quad \bar{U}_0 - \bar{u}_0; \quad \frac{\bar{U}_0 - \bar{u}_0}{r}; \quad \frac{|p|(b_0 - a_0)}{r}; \right. \\ \left. \frac{|q|(\bar{U}_0 - \bar{u}_0)}{r}; \quad \frac{|p||q|(b_0 - a_0)}{r}; \quad \frac{|q|(\bar{Y}_0 - \bar{y}_0)}{r}; \quad \frac{q^2(\bar{Y}_0 - \bar{y}_0)}{r} \right] \leq \frac{1}{20R},$$

dove  $\bar{Y}_0$  e  $\bar{y}_0$  indicano il massimo e il minimo di  $y_0(x)$  ( $a_0, b_0$ ).

Sia ora  $C: y = y(x), a \leq x \leq b$ , una qualsiasi curva ordinaria di  $K$ , appartenente propriamente all'intorno ( $\varrho$ ) di  $C_0$  e relativa all'elemento iniziale  $a$ , tale che  $a - a_0 > \varrho$ , dove  $\varrho$  è positivo e  $< \varrho_0$  e  $< r_0$ .

Preso ad arbitrio un  $\varepsilon > 0$  e  $< r_0$ , sia  $\bar{x}$  un qualunque punto di  $(a, b)$ . Indichiamo per brevità  $u_{C, a}(x)$  con  $u(x)$  e  $u_{C_0, a_0}(x)$  con  $u_0(x)$  e poniamo

$$\varepsilon_1 = \min \left[ \frac{7}{60} \varepsilon, \frac{r}{20R(2 + 6|q| + 2r + 4q^2)} \right].$$

<sup>(9)</sup> V. Lemma 2, pag. 405 e Lemma 14, pag. 422, della nota citata in <sup>(3)</sup>.

Supporremo che sia  $u(\bar{x}) < u_0(\bar{x})$  e inoltre, per il momento, che in tutto  $(a, \bar{x})$  sia verificata la

$$(4) \quad u(x) \geq \bar{u}_0 - \tau_0.$$

Allora, se  $\bar{x} \in (a_0 + \varrho, b_0 - \varrho)$  potremo scrivere :

$$\begin{aligned} u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) &= a - a_0 + \int_a^{\bar{x}} f(x, y, y', u) dx - \int_{a_0}^{\bar{x}} f(x, y_0, y_0', u_0) dx = \\ &= a - a_0 + \int_a^{a_0 + \varrho} f(x, y, y', u) dx + \int_{a_0 + \varrho}^{\bar{x}} f(x, y, y', u) dx - \int_{a_0}^{a_0 + \varrho} f(x, y_0, y_0', u_0) dx - \\ &\quad - \int_{a_0 + \varrho}^{\bar{x}} f(x, y_0, y_0', u_0) dx + \int_a^{\bar{x}} (p + qy') dx - \int_{a_0}^{\bar{x}} (p + qy_0') dx, \end{aligned}$$

e quindi in virtù del fatto che, per le (4) e (3), è  $\bar{f}(x, y(x), y'(x), u(x)) > 0$ , della assoluta continuità della funzione integrale e della continuità dell'integrale  $\int (p + qy') dx$ , se  $\varrho$  è sufficientemente piccolo :

$$(5) \quad u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > a - a_0 + \int_{a_0 + \varrho}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y, y', u) dx - \frac{\varepsilon_1}{4} - \int_{a_0 + \varrho}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y_0, y_0', u_0) dx - \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

Se  $\bar{x} \in (a, a_0 + \varrho)$  le stesse considerazioni ora fatte danno subito :

$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > a - a_0 - \varepsilon_1$  ; se  $\bar{x} \in (b_0 - \varrho, b)$ , considerazioni analoghe ci permettono di riportare il problema al caso :  $\bar{x} \in (a_0 + \varrho, b_0 - \varrho)$  ; perciò ci limiteremo a quest'ultimo. Sia allora  $(x^*, \bar{x})$  l'intorno sinistro di  $\bar{x}$  più ampio, contenuto in  $(a_0 + \varrho, \bar{x})$ , nei punti interni del quale è ancora  $u(x) < u_0(x)$ . Se è  $x^* > a_0 + \varrho$ , è  $u(x^*) = u_0(x^*)$ , se è  $x^* = a_0 + \varrho$ , per la (5), è  $u(x^*) - u_0(x^*) > -\varrho - \frac{\varepsilon_1}{2}$  ; in ogni caso sarà dunque :

$$\begin{aligned} u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) &= u(\bar{x}) - u(x^*) - u_0(\bar{x}) + u_0(x^*) + u(x^*) - u_0(x^*) > -\varrho - \varepsilon_1 + \\ &\quad + \int_{x^*}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y, y', u) dx - \int_{x^*}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y_0, y_0', u_0) dx. \end{aligned}$$

Poichè, in virtù delle (1) e (2), la funzione  $\bar{f}(x, y(x), y'(x), u_0(x))$  è maggiorata e minorata da funzioni integrabili in  $(x^*, \bar{x})$ , esiste l'integrale

$$\int_{x^*}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y, y', u_0) dx,$$

e si può scrivere :

$$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > -\varrho - \varepsilon_1 + \int_{x^*}^{\bar{x}} [\bar{f}(x, y, y', u) - \bar{f}(x, y, y', u_0)] + \\ + \int_{x^*}^{\bar{x}} [\bar{f}(x, y, y', u_0) - \bar{f}(x, y_0, y_0', u_0)] dx.$$

Il secondo integrale del secondo membro, in cui compare solo la  $u_0(x)$  può essere reso  $> -\varepsilon_1$ , con un ragionamento analogo a quello svolto dal TONELLI nella nota citata in (3), n. 3, pp. 407-410, se  $\varrho$  è sufficientemente piccolo; in virtù anche della (1), si avrà quindi :

$$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > -\varrho - 2\varepsilon_1 + \int_{x^*}^{\bar{x}} [\bar{f}(x, y, y', u) - \bar{f}(x, y, y', u_0)] dx \geq -\varrho - 2\varepsilon_1 + \\ + R \int_{x^*}^{\bar{x}} [1 + |y'| + |f(x, y, y', u)|] (u(x) - u_0(x)) dx,$$

da cui, posto  $\delta = \max_{x^* \leq x \leq \bar{x}} [u_0(x) - u(x)]$  :

$$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > -\varrho - 2\varepsilon_1 - \delta R(\bar{x} - x^*) - \delta R \int_{x^*}^{\bar{x}} |y'| dx - \delta R \int_{x^*}^{\bar{x}} |f(x, y, y', u)| dx.$$

Ma si ha :

$$(6) \quad \int_{x^*}^{\bar{x}} |f(x, y, y', u)| dx \leq \int_{x^*}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y, y', u) dx + \int_{x^*}^{\bar{x}} [|p| + |q| |y'|] dx.$$

E d'altra parte, avendo supposto  $u(\bar{x}) < u_0(\bar{x})$  è :

$$(7) \quad u(x^*) + \int_{x^*}^{\bar{x}} f(x, y, y', u) dx < u_0(x^*) + \int_{x^*}^{\bar{x}} f(x, y_0, y_0', u_0) dx,$$

cioè :

$$\int_{x^*}^{\bar{x}} \bar{f}(x, y, y', u) dx + \int_{x^*}^{\bar{x}} (p + qy') dx < \varrho + \varepsilon_1 + \left| \int_{x^*}^{\bar{x}} f(x, y_0, y_0', u_0) dx \right| \leq \varrho + \varepsilon_1 + \bar{U}_0 - \bar{u}_0,$$

e perciò la (6) diventa :

$$\int_{x^*}^{\bar{x}} |f(x, y, y', u)| dx < \varrho + \varepsilon_1 + \bar{U}_0 - \bar{u}_0 + 2 \int_{x^*}^{\bar{x}} [|p| + |q| |y'|] dx.$$

Ne segue

$$(8) \quad u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > -\varrho - 2\varepsilon_1 - \delta R(\bar{x} - x^*) - \delta R \int_{x^*}^{\bar{x}} |y'| dx - \\ - \delta R \left[ \varrho + \varepsilon_1 + \bar{U}_0 - \bar{u}_0 + 2 \int_{x^*}^{\bar{x}} [ |p| + |q| |y'| ] dx \right].$$

Dalla (7) e dalla (3) ricaviamo:

$$\int_{x^*}^{\bar{x}} \nu |y'| dx + \int_{x^*}^{\bar{x}} (\varrho + qy') dx < \int_{x^*}^{\bar{x}} f(x, y, y', u) dx < \varrho + \varepsilon_1 + \int_{x^*}^{\bar{x}} f(x, y_0, y_0', u_0) dx,$$

da cui

$$\int_{x^*}^{\bar{x}} |y'| dx < \frac{\varrho}{\nu} + \frac{\varepsilon_1}{\nu} + \frac{\bar{U} - \bar{u}_0}{\nu} + \frac{|p|(b_0 - a_0)}{\nu} + \frac{|q|}{\nu} [\bar{Y}_0 - \bar{y}_0 + 2\varrho].$$

Sicchè sostituendo in (8) si ottiene, se  $\varrho \leq \varepsilon_1$ , tenendo presente il valore di  $\varepsilon_1$  e l'ipotesi II):

$$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > -3\varepsilon_1 - \delta \frac{13}{20}.$$

Ragionando in modo analogo a quanto si è fatto per  $\delta_1$  nella dimostrazione del Teorema II, si ottiene una maggiorazione di  $\delta$  ( $\delta < \frac{60}{7} \varepsilon_1$ ) e in definitiva quindi:

$$(9) \quad u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) > -\varepsilon.$$

È poi immediato verificare, in modo analogo a quanto si è fatto nella dimostrazione del Teorema II, che l'ipotesi, espressa dalla (4), è effettivamente soddisfatta. La (9) è dunque verificata qualunque sia  $\bar{x}$ , purchè  $\varrho$  sia sufficientemente piccolo.