

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ARNO PREDONZAN

## **Sulle vibrazioni forzate di un sistema non dissipativo a due gradi di libertà**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 12,  
n° 3-4 (1947), p. 173-183

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1947\\_2\\_12\\_3-4\\_173\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1947_2_12_3-4_173_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SULLE VIBRAZIONI FORZATE DI UN SISTEMA NON DISSIPATIVO A DUE GRADI DI LIBERTÀ (\*)

di ARNO PREDONZAN (Pisa).

**SUNTO.** - Si studia il moto forzato di un sistema a due gradi di libertà, soggetto a due sollecitazioni esterne di carattere sinusoidale, con particolare riguardo al variare delle ampiezze della vibrazione forzata in dipendenza della frequenza e delle ampiezze delle forze esterne.

Considerati poi due oscillatori accoppiati, soggetti a due sollecitazioni sinusoidali di frequenza variabile nell'intorno di una frequenza media, si determinano i valori dei coefficienti di accoppiamento e dei coefficienti e dell'ampiezza della sollecitazione esterna d'uno di essi in modo che la vibrazione forzata dell'altro risulti minima.

## Premessa.

Si considerano sistemi a due gradi di libertà, olonomi ed a vincoli indipendenti dal tempo; le forze interne derivano da una funzione potenziale mentre quelle esterne sono di carattere sinusoidale con frequenze uguali ed ampiezze diverse. Il moto avviene nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile definita da  $q_1 = q_2 = 0$ , essendo  $q_1$  e  $q_2$  le coordinate lagrangiane del sistema.

L'energia potenziale  $-V$  e l'energia cinetica  $T$  assumono, rispettivamente, la forma

$$-V = \frac{1}{2} (a_{11}q_1^2 + 2a_{12}q_1q_2 + a_{22}q_2^2),$$

$$T = \frac{1}{2} (b_{11}\dot{q}_1^2 + 2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2^2),$$

dove le costanti  $a_{rs}$  e  $b_{rs}$  ( $r, s = 1, 2$ ) soddisfano alle condizioni

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

$$b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \quad b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0,$$

essendo  $-V$  e  $T$  forme quadratiche definite positive.

Dette  $k_1 \text{ sen } \omega t$  e  $k_2 \text{ sen } \omega t$  le forze esterne relative alle coordinate  $q_1$  e  $q_2$ , rispettivamente, le equazioni del moto nell'intorno della configurazione  $q_1 = q_2 = 0$  possono scriversi

$$(1) \quad \begin{cases} b_{11}\ddot{q}_1 + b_{12}\ddot{q}_2 + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = k_1 \text{ sen } \omega t, \\ b_{12}\ddot{q}_1 + b_{22}\ddot{q}_2 + a_{12}q_1 + a_{22}q_2 = k_2 \text{ sen } \omega t. \end{cases}$$

(\*) Tesi di laurea discussa nell'Università di Pisa nel giugno del 1941.

Lo studio del moto si riduce, quindi, alla ricerca dell'integrale generale di questo sistema di equazioni differenziali lineari con i coefficienti delle  $q$  e  $\ddot{q}$  costanti.

### § 1. - Integrale generale del sistema differenziale.

L'integrale generale del sistema (1) si può ottenere aggiungendo un suo integrale particolare qualsiasi all'integrale generale del sistema omogeneo

$$(2) \quad \begin{cases} b_{11} \ddot{q}_1 + b_{12} \ddot{q}_2 + a_{11} q_1 + a_{12} q_2 = 0, \\ b_{12} \ddot{q}_1 + b_{22} \ddot{q}_2 + a_{12} q_1 + a_{22} q_2 = 0. \end{cases}$$

Quest'ultimo ammette soluzioni particolari del tipo

$$\begin{cases} q_1 = u_1^{(\rho)} \text{sen}(\sigma_\rho t - \gamma_\rho), \\ q_2 = u_2^{(\rho)} \text{sen}(\sigma_\rho t - \gamma_\rho), \end{cases}$$

dove  $\gamma_\rho$  è arbitrario mentre  $u_1^{(\rho)}$  e  $u_2^{(\rho)}$  sono dati, a meno di una costante moltiplicativa arbitraria, dal sistema

$$\begin{cases} (a_{11} - \sigma_\rho^2 b_{11}) u_1^{(\rho)} + (a_{12} - \sigma_\rho^2 b_{12}) u_2^{(\rho)} = 0, \\ (a_{12} - \sigma_\rho^2 b_{12}) u_1^{(\rho)} + (a_{22} - \sigma_\rho^2 b_{22}) u_2^{(\rho)} = 0, \end{cases}$$

essendo  $\sigma_\rho^2$  ( $\rho=1, 2$ ) radice dell'equazione, detta *caratteristica* o *delle frequenze*,

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma^2 b_{11} & a_{12} - \sigma^2 b_{12} \\ a_{12} - \sigma^2 b_{12} & a_{22} - \sigma^2 b_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Per quanto si sa dalla teoria generale, le radici  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  ( $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ ) della (3) sono reali, positive e, se  $\bar{\sigma}_1^2 \neq \bar{\sigma}_2^2$ , esterne all'intervallo  $(\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2)$  o una di esse coincidente con un estremo di questo, avendo posto

$$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{a_{11}}{b_{11}}, \quad \bar{\sigma}_2^2 = \frac{a_{22}}{b_{22}}.$$

L'integrale generale del sistema (2) assume allora la forma

$$\begin{cases} q_1 = u_1^{(1)} \text{sen}(\sigma_1 t - \gamma_1) + u_1^{(2)} \text{sen}(\sigma_2 t - \gamma_2), \\ q_2 = u_2^{(1)} \text{sen}(\sigma_1 t - \gamma_1) + u_2^{(2)} \text{sen}(\sigma_2 t - \gamma_2), \end{cases}$$

dove  $\gamma_1, \gamma_2$  e le due costanti a meno delle quali risultano definite le  $u$  possono determinarsi una volta che siano assegnati i valori iniziali delle  $q$  e  $\dot{q}$ .

Il moto libero del sistema vibrante risulta, quindi, dalla sovrapposizione di

due moti vibratori di carattere armonico, di frequenze  $\sigma_1/2\pi$  e  $\sigma_2/2\pi$ , rispettivamente.

Un integrale particolare del sistema (1) si determina nel modo consueto ponendo

$$(4) \quad \begin{cases} q_1 = f_1 \text{ sen } \omega t, \\ q_2 = f_2 \text{ sen } \omega t, \end{cases}$$

con  $f_1$  e  $f_2$  costanti definite dalle formole

$$(5) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{(a_{22} - \omega^2 b_{22})k_1 - (a_{12} - \omega^2 b_{12})k_2}{(a_{11} - \omega^2 b_{11})(a_{22} - \omega^2 b_{22}) - (a_{12} - \omega^2 b_{12})^2}, \\ f_2 = \frac{(a_{11} - \omega^2 b_{11})k_2 - (a_{12} - \omega^2 b_{12})k_1}{(a_{11} - \omega^2 b_{11})(a_{22} - \omega^2 b_{22}) - (a_{12} - \omega^2 b_{12})^2}. \end{cases}$$

Le (4) rappresentano la vibrazione forzata del sistema mentre le (5) ci danno i valori dell'ampiezza di detta vibrazione in funzione della frequenza e delle ampiezze delle forze esterne.

### § 2. - Studio delle ampiezze.

Riprendiamo le (5) e scriviamole nella forma

$$(5') \quad \begin{cases} f_1 = \frac{b_{12}k_2 - b_{22}k_1}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \cdot \frac{\omega^2 - \bar{\sigma}_2^2 \nu}{\omega^4 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\omega^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2}, \\ f_2 = \frac{b_{12}k_1 - b_{11}k_2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \cdot \frac{\omega^2 - \bar{\sigma}_1^2 \mu}{\omega^4 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\omega^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2}, \end{cases}$$

dove si è posto

$$\bar{\sigma}_2^2 \nu = \frac{a_{22}k_1 - a_{12}k_2}{b_{22}k_1 - b_{12}k_2}, \quad \bar{\sigma}_1^2 \mu = \frac{a_{12}k_1 - a_{11}k_2}{b_{12}k_1 - b_{11}k_2}.$$

Andiamo ora ad esaminare il comportamento di  $|f_1|$  al variare di  $\omega^2$  e  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$ . A tale scopo ci varremo della rappresentazione grafica tracciando la famiglia di curve di parametro  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$  i cui punti avranno per ascissa  $\omega^2$  e per ordinata  $|f_1|$ .

Due casi si debbono considerare a seconda che la condizione  $\frac{a_{12}}{b_{12}} \neq \bar{\sigma}_2^2$  sia o no soddisfatta.

1° CASO :  $\frac{a_{12}}{b_{12}} \neq \bar{\sigma}_2^2$ .

Dalla prima delle (5') si deduce che  $f_1$  soddisfa alle condizioni

$$(6) \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \sigma_1^2} f_1 = \lim_{\omega^2 \rightarrow \sigma_2^2} f_1 = \infty.$$

Dalla stessa (5') si ricava inoltre

$$(7) \quad f_1(\bar{\sigma}_2^2 \nu) = 0 \quad \text{per} \quad \bar{\sigma}_2^2 \nu \neq \sigma_1^2 \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_2^2 \nu \neq \sigma_2^2,$$

dato che per i valori  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  di  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$  si ha, rispettivamente,

$$(5_1') \quad f_1 = \frac{b_{12}k_2 - b_{22}k_1}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \sigma_2^2} \neq 0,$$

$$(5_2') \quad f_1 = \frac{b_{12}k_2 - b_{22}k_1}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \sigma_1^2} \neq 0.$$

Affinchè  $f_1$  presenti dei massimi o dei minimi è necessario che esistano e siano reali le radici  $\omega_1^2$  e  $\omega_2^2$  del numeratore di

$$\frac{\partial f_1}{\partial(\omega^2)} = \frac{b_{22}k_1 - b_{12}k_2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \cdot \frac{\omega^4 - 2\bar{\sigma}_2^2 \nu \omega^2 + \bar{\sigma}_2^2 \nu (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1^2 \sigma_2^2}{[\omega^4 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \omega^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2]^2},$$

o meglio che sia

$$(8) \quad (\bar{\sigma}_2^2 \nu)^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \bar{\sigma}_2^2 \nu + \sigma_1^2 \sigma_2^2 > 0.$$

Dalla (8) è stato escluso il caso di uguaglianza perchè da esso segue  $\bar{\sigma}_2^2 \nu = \sigma_1^2$  o  $\bar{\sigma}_2^2 \nu = \sigma_2^2$  e quindi, rispettivamente,

$$\frac{\partial f_1}{\partial(\omega^2)} = \frac{b_{22}k_1 - b_{12}k_2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \sigma_2^2)^2} \neq 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial(\omega^2)} = \frac{b_{22}k_1 - b_{12}k_2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \sigma_1^2)^2} \neq 0.$$

Ove si osservi che, quando  $\omega^2$  passa attraverso i valori reali  $\omega_1^2$  e  $\omega_2^2$ , cambia il segno di  $\frac{\partial f_1}{\partial(\omega^2)}$ , si viene a concludere che la (8) rappresenta non solo la condizione necessaria ma anche sufficiente per l'esistenza di massimi o minimi di  $f_1$ .

Ci resta ancora da confrontare i valori delle radici  $\omega_1^2$  e  $\omega_2^2$  ( $\omega_1^2 < \omega_2^2$ ) con i numeri 0,  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ . Ci serviremo a tale scopo del metodo elementare del FOURIER.

Ponendo

$$\varphi(\omega^2) = \omega^4 - 2\bar{\sigma}_2^2 \nu \omega^2 + \bar{\sigma}_2^2 \nu (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1^2 \sigma_2^2,$$

dalla stessa si ricava

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(\omega^2)} = 2(\omega^2 - \bar{\sigma}_2^2 \nu),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial(\omega^2)^2} = 2.$$

In virtù delle precedenti si deducono le seguenti condizioni che ci definiscono, quando sia soddisfatta la (8), la posizione di  $\omega_1^2$  e  $\omega_2^2$  (e quindi delle ascisse

dei punti di massimo o minimo di  $f_1$ ) sull'asse delle  $\omega^2$ , relativamente ai punti 0,  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ :

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (\omega^2)^2} \right]_0 = 2 > 0, \\ \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial (\omega^2)} \right]_0 = -2 \bar{\sigma}_2^2 \nu \leq 0 \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2 \nu \geq 0, \\ \varphi(0) = \bar{\sigma}_2^2 \nu (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1^2 \sigma_2^2 \leq 0 \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2 \nu \leq \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \\ \\ \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (\omega^2)^2} \right]_{\sigma_1^2} = 2 > 0, \\ \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial (\omega^2)} \right]_{\sigma_1^2} = 2(\sigma_1^2 - \bar{\sigma}_2^2 \nu) \leq 0 \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2 \nu \geq \sigma_1^2, \\ \varphi(\sigma_1^2) = \bar{\sigma}_2^2 \nu (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) - \sigma_1^2 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \geq 0 \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2 \nu \geq \sigma_1^2; \\ \\ \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (\omega^2)^2} \right]_{\sigma_2^2} = 2 > 0, \\ \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial (\omega^2)} \right]_{\sigma_2^2} = 2(\sigma_2^2 - \bar{\sigma}_2^2 \nu) \geq 0 \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2 \nu \leq \sigma_2^2, \\ \varphi(\sigma_2^2) = \bar{\sigma}_2^2 \nu (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_2^2 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \geq 0 \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2 \nu \leq \sigma_2^2. \end{array} \right.$$

Da quanto precede, tenendo presente che  $f_1(\omega^2)$  è una funzione definita solo per gli  $\omega^2$  positivi, si possono trarre le seguenti conclusioni:

a)  $\bar{\sigma}_2^2 \nu < 0$ . - Valgono le (6), (8) e dalle (9) si deduce  $\omega_1^2 < 0$ ,  $\sigma_1^2 < \omega_2^2 < \sigma_2^2$ :  $|f_1|$  presenta, quindi, due massimi (infiniti) in  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  e due minimi in 0 e  $\omega_2^2$  (fig. 1).

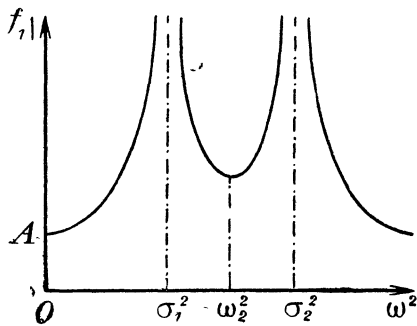


Fig. 1.

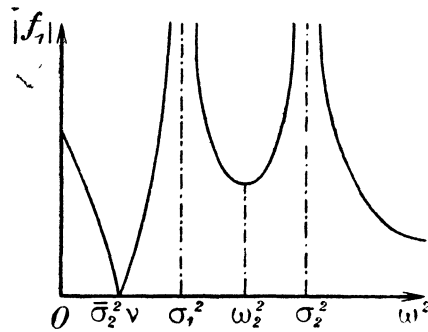


Fig. 2.

b)  $\bar{\sigma}_2^2 \nu = 0$ . - Valgono considerazioni analoghe a quelle del caso precedente: basta trasportare il punto  $A$  in 0.

c)  $0 < \bar{\sigma}_2^2 \nu < \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . - Valgono pure considerazioni analoghe a quelle del caso a) e vale inoltre la (7):  $|f_1|$  presenta, quindi, due massimi (infiniti) in  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ , un massimo in 0 e due minimi in  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$  e  $\omega_2^2$  (fig. 2).

d)  $\bar{\sigma}_2^2 \nu = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . - Valgono le (6), (7), (8) e dalle (9) si deduce  $\omega_1^2 = 0$ ,  $\sigma_1^2 < \omega_2^2 < \sigma_2^2$ :  $|f_1|$  presenta, quindi, due massimi (infiniti) in  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ , un massimo

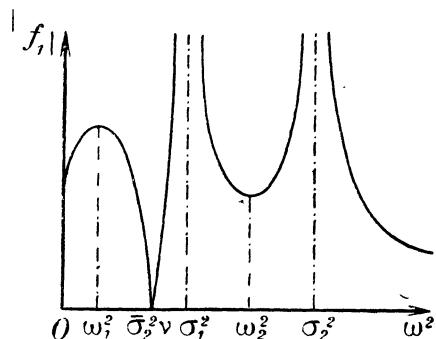


Fig. 3.

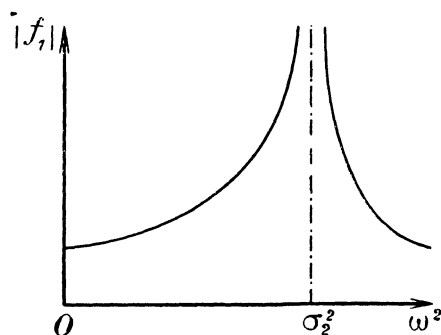


Fig. 4.

n 0 e due minimi in  $\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  e  $\omega_2^2$  (fig. 2 dove  $\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  prende il posto di  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$ ).

e)  $\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < \bar{\sigma}_2^2 \nu < \sigma_1^2$ . - Valgono le (6), (7), (8) e dalle (9) si deduce  $0 < \omega_1^2 < \sigma_1^2$ ,  $\sigma_1^2 < \omega_2^2 < \sigma_2^2$ :  $|f_1|$  presenta, quindi, due massimi (infiniti) in  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ , un massimo in  $\omega_1^2$  e tre minimi in 0,  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$  e  $\omega_2^2$  (fig. 3).

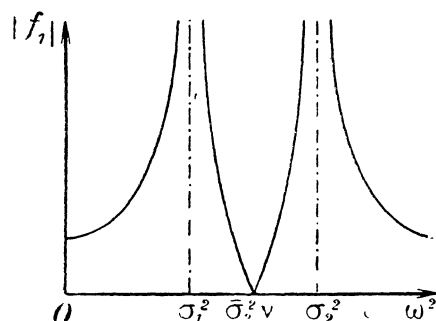


Fig. 5.

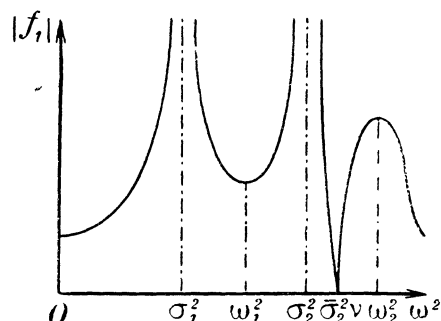


Fig. 6.

f)  $\bar{\sigma}_2^2 \nu = \sigma_1^2$ . - La prima delle (5') assume la forma (5\_1'):  $|f_1|$  presenta, quindi, un massimo (infinito) in  $\sigma_2^2$  e un minimo in 0 (fig. 4).

g)  $\sigma_1^2 < \bar{\sigma}_2^2 \nu < \sigma_2^2$ . - Valgono le (6), (7), ma non è soddisfatta la (8):  $|f_1|$  presenta, quindi, due massimi (infiniti) in  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  e due minimi in 0 e  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$  (fig. 5).

h)  $\bar{\sigma}_2^2 \nu = \sigma_2^2$ . - La prima delle (5') assume la forma (5\_2'):  $|f_1|$  presenta, quindi, un massimo (infinito) in  $\sigma_1^2$  e un minimo in 0 (fig. 4 dove  $\sigma_1^2$  prende posto di  $\sigma_2^2$ ).

i)  $\bar{\sigma}_2^2 \nu > \sigma_2^2$ . - Valgono le (6), (7), (8) e dalle (9) si deduce  $\sigma_1^2 < \omega_1^2 < \sigma_2^2$ ,  $\sigma_2^2 < \omega_2^2$ :  $|f_1|$  presenta, quindi, due massimi (infiniti) in  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ , un massimo in  $\omega_2^2$  e tre minimi in 0,  $\omega_1^2$  e  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$  (fig. 6).

2° CASO:  $\frac{a_{12}}{b_{12}} = \bar{\sigma}_2^2$ .

La prima delle (5) diviene

$$f_1 = \frac{b_{22}k_1 - b_{12}k_2}{b_{11}b_{22}(\bar{\sigma}_1^2 - \omega^2) - b_{12}^2(\bar{\sigma}_2^2 - \omega^2)},$$

dalla quale, osservando che in questo caso si ha  $\sigma_2^2 \equiv \bar{\sigma}_2^2$ , si deduce che  $|f_1|$  presenta un massimo (infinito) in  $\sigma_1^2$  e un minimo in 0 (fig. 4 dove  $\sigma_1^2$  prende il posto di  $\sigma_2^2$ ).

Per lo studio di  $|f_2|$  si debbono pure considerare due casi a seconda che la condizione  $\frac{a_{12}}{b_{12}} \neq \bar{\sigma}_1^2$  sia o no soddisfatta.

1° CASO:  $\frac{a_{12}}{b_{12}} \neq \bar{\sigma}_1^2$ .

Si traggono conclusioni analoghe a quelle del precedente 1° caso: basta sostituire  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$  con  $\bar{\sigma}_1^2 \mu$ .

2° CASO:  $\frac{a_{12}}{b_{12}} = \bar{\sigma}_1^2$ .

La seconda delle (5) diviene

$$f_2 = \frac{b_{11}k_2 - b_{12}k_1}{b_{11}b_{22}(\bar{\sigma}_2^2 - \omega^2) - b_{12}^2(\bar{\sigma}_1^2 - \omega^2)},$$

dalla quale, osservando che in questo caso si ha  $\sigma_1^2 \equiv \bar{\sigma}_1^2$ , si deduce che  $|f_2|$  presenta un massimo (infinito) in  $\sigma_2^2$  e un minimo in 0 (fig. 4).

### § 3. - Un caso particolare.

Si supponga verificata la condizione

$$\bar{\sigma}_1^2 = \bar{\sigma}_2^2 = \frac{a_{12}}{b_{12}} = \bar{\sigma}^2.$$

Per la precedente la (3) diviene

$$(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(\bar{\sigma}^2 - \omega^2)^2 = 0,$$

dalla quale risulta che le due radici  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  vengono ad assumere il comune valore  $\bar{\sigma}^2$ .

Pertanto i sistemi (1) e (2) divengono, rispettivamente,

$$(1') \quad \begin{aligned} b_{11}(\ddot{q}_1 + \bar{\sigma}^2 q_1) + b_{12}(\ddot{q}_2 + \bar{\sigma}^2 q_2) &= k_1 \text{ sen } \omega t, \\ b_{12}(\ddot{q}_1 + \bar{\sigma}^2 q_1) + b_{22}(\ddot{q}_2 + \bar{\sigma}^2 q_2) &= k_2 \text{ sen } \omega t; \end{aligned}$$

$$(2') \quad \begin{aligned} b_{11}(\ddot{q}_1 + \bar{\sigma}^2 q_1) + b_{12}(\ddot{q}_2 + \bar{\sigma}^2 q_2) &= 0, \\ b_{12}(\ddot{q}_1 + \bar{\sigma}^2 q_1) + b_{22}(\ddot{q}_2 + \bar{\sigma}^2 q_2) &= 0. \end{aligned}$$



Il sistema (2'), in virtù della condizione  $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$ , necessariamente diviene

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \bar{\sigma}^2 q_1 = 0, \\ \ddot{q}_2 + \bar{\sigma}^2 q_2 = 0, \end{cases}$$

il cui integrale generale, che rappresenta il moto libero del sistema vibrante, è dato da

$$\begin{cases} q_1 = u_1 \text{ sen } (\bar{\sigma}t - \gamma_1), \\ q_2 = u_2 \text{ sen } (\bar{\sigma}t - \gamma_2), \end{cases}$$

con  $u_1, u_2, \gamma_1, \gamma_2$  costanti arbitrarie.

Il moto forzato invece è rappresentato dall'integrale particolare del sistema (1')

$$\begin{cases} q_1 = f_1 \text{ sen } \omega t, \\ q_2 = f_2 \text{ sen } \omega t, \end{cases}$$

dove  $f_1$  e  $f_2$  sono definite dalle formole

$$\begin{cases} f_1 = \frac{b_{12}k_2 - b_{22}k_1}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \frac{1}{\omega^2 - \bar{\sigma}^2}, \\ f_2 = \frac{b_{12}k_1 - b_{11}k_2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \frac{1}{\omega^2 - \bar{\sigma}^2}. \end{cases}$$

Quest'ultime ci dicono che  $|f_1|$  e  $|f_2|$  presentano un massimo (infinito) in  $\bar{\sigma}^2$  e un minimo in 0 (fig. 4).

#### § 4. - Ammortizzazione di vibrazioni.

Siano le (1) le equazioni del moto di un sistema a due gradi di libertà derivante dall'accoppiamento di due sistemi sollecitati  $S_1$  ed  $S_2$  ad un grado di libertà, di frequenze  $\bar{\sigma}_1/2\pi$  e  $\bar{\sigma}_2/2\pi$ , rispettivamente.

Supposto che la frequenza  $\omega/2\pi$  delle sollecitazioni esterne  $k_1 \text{ sen } \omega t$  e  $k_2 \text{ sen } \omega t$ , agenti rispettivamente su  $S_1$  ed  $S_2$ , non si mantenga fissa ma vari nell'intorno di una frequenza media  $\omega_m/2\pi$ , ci proponiamo di determinare i valori dei coefficienti di  $S_2$ , dell'ampiezza della sollecitazione esterna ad esso relativa e dei coefficienti di accoppiamento in modo che risulti minima la vibrazione forzata della coordinata  $q_1$ .

Per soddisfare alla condizione del problema postoci occorre che si abbia

$$(10) \quad \omega_m^2 = \bar{\sigma}_2^2 \nu = \frac{a_{22}k_1 - a_{12}k_2}{b_{22}k_1 - b_{12}k_2}.$$

Inoltre, perchè l'ampiezza  $f_1$  si mantenga limitata al variare di  $\omega$  nell'intorno di  $\omega_m$ , occorre che il massimo valore della differenza  $|\omega^2 - \omega_m^2|$  risulti, quando sia verificata la (10), minore di  $|\sigma^{*2} - \bar{\sigma}_2^2 \nu|$ , intendendo per  $\sigma^{*2}$  quella delle due radici della (3) che è più prossima a  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$ .

Si presenta quindi il problema di determinare i coefficienti  $a_{22}$ ,  $b_{22}$ ,  $a_{12}$ ,  $b_{12}$  in modo che la differenza  $|\sigma^{*2} - \bar{\sigma}_2^2 \nu|$  sia la più grande possibile.

A tale scopo riprendiamo la (3) e scriviamola nella forma

$$(\sigma^2 - \bar{\sigma}_1^2)(\sigma^2 - \bar{\sigma}_2^2) - (\alpha - \beta \sigma^2)^2 = 0,$$

dove si è posto

$$(11) \quad \alpha = \frac{a_{12}}{\sqrt{b_{11} b_{22}}}, \quad \beta = \frac{b_{12}}{\sqrt{b_{11} b_{22}}}.$$

Ponendo inoltre

$$m = \frac{\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_2^2 - 2\beta(\alpha - \beta \bar{\sigma}_2^2)}{2(1 - \beta^2)}, \quad n = \frac{(\alpha - \beta \bar{\sigma}_2^2)^2}{1 - \beta^2},$$

la precedente può scriversi

$$(\sigma^2 - \bar{\sigma}_2^2)^2 - 2m(\sigma^2 - \bar{\sigma}_2^2) - n = 0,$$

dalla quale si ricava

$$\sigma^2 - \bar{\sigma}_2^2 \nu = m - \bar{\sigma}_2^2(\nu - 1) \pm \sqrt{m^2 + n}.$$

Indicando con  $y^*$  il valore di  $\sigma^2 - \bar{\sigma}_2^2 \nu$  corrispondente a  $\sigma^{*2}$ , si ha :

$$y^* = m - \bar{\sigma}_2^2(\nu - 1) \pm \sqrt{m^2 + n} \quad \text{per} \quad m \leq \bar{\sigma}_2^2(\nu - 1).$$

Si suppongano ora fissati  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{22}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  e si faccia variare  $\bar{\sigma}_1^2$ : ciò equivale a fissare  $n$  e  $\nu$  e far variare  $m$ .

Derivando  $y^*$  rispetto ad  $m$  si ottiene

$$\frac{\partial y^*}{\partial m} = 1 \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + n}} > 0 \quad \text{per} \quad m \leq \bar{\sigma}_2^2(\nu - 1),$$

dalla quale si rileva che  $y^*$  è sempre crescente.

Osservando inoltre che  $y^*$  soddisfa alle condizioni

$$\lim_{m \rightarrow \bar{\sigma}_2^2(\nu - 1)^+} y^* = \pm \sqrt{\bar{\sigma}_2^2(\nu - 1)^2 + n},$$

$$y^* \geq -\bar{\sigma}_2^2(\nu - 1) \quad \text{per} \quad m \leq \bar{\sigma}_2^2(\nu - 1),$$

si viene a concludere che si ha il massimo valore di  $|y^*|$  per

$$m = \bar{\sigma}_2^2(\nu - 1),$$

o meglio per

$$(12) \quad \bar{\sigma}_2^2 \nu = \frac{\bar{\sigma}_1^2 - 2\alpha\beta + \bar{\sigma}_2^2}{2(1-\beta^2)} = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Dalla precedente si può trarre un valore di  $\bar{\sigma}_2^2$  compatibile con la condizione  $\bar{\sigma}_1^2 \bar{\sigma}_2^2 > \alpha^2$  solamente quando  $\alpha$  e  $\beta$  sono scelti in modo tale che si abbia

$$(13) \quad \bar{\sigma}_2^2 \nu > \frac{\bar{\sigma}_1^4 - 2\alpha\beta \bar{\sigma}_1^2 + \alpha^2}{2\bar{\sigma}_1^2(1-\beta^2)},$$

il che può avvenire semprechè risulti

$$\bar{\sigma}_2^2 \nu > \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2,$$

dove  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$  s'intende fissato.

Nel caso in cui sia  $\bar{\sigma}_2^2 \nu \leq \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2$  è sufficiente, per rendere massimo il divario  $|\sigma^{*2} - \bar{\sigma}_2^2 \nu|$ , far coincidere  $\sigma_1^2$  con  $\bar{\sigma}_1^2$  — il che avviene per  $\frac{a_{12}}{b_{12}} = \bar{\sigma}_1^2$  — ed assegnare a  $\bar{\sigma}_2^2$  un valore maggiore di  $\bar{\sigma}_1^2$ . Da  $\bar{\sigma}_1^2$  e  $\bar{\sigma}_2^2$  si possono poi trarre i valori di  $a_{12}$ ,  $b_{12}$  e  $a_{22}$ ,  $b_{22}$ , rispettivamente, tenendo presente che gli stessi debbono soddisfare alle condizioni  $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$  e  $b_{11}b_{22} > b_{12}^2$ .

Resta ancora da vedere quale influenza hanno i coefficienti  $a_{12}$  e  $b_{12}$  sul valore della differenza  $|\sigma^{*2} - \bar{\sigma}_2^2 \nu|$  nel caso in cui sia  $\bar{\sigma}_2^2 \nu > \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2$ .

A tale scopo osserviamo che, per la (12), si ha:

$$|\sigma^{*2} - \bar{\sigma}_2^2 \nu| = \frac{1}{2}(\sigma_2^2 - \sigma_1^2),$$

o meglio

$$|\sigma^{*2} - \bar{\sigma}_2^2 \nu| = \frac{\sqrt{(\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_2^2)^2 + 4(\alpha - \beta \bar{\sigma}_1^2)(\alpha - \beta \bar{\sigma}_2^2)}}{2(1-\beta^2)}.$$

Dalla precedente risulta che, per rendere il valore di  $|\sigma^{*2} - \bar{\sigma}_2^2 \nu|$  il più grande possibile, occorre che sia  $\alpha\beta < 0$  e  $|\alpha|$  e  $|\beta|$  assumano valori possibilmente grandi.

Da quanto precede si possono pertanto trarre le seguenti conclusioni in virtù delle quali risulta minima, nel sistema  $S_1 + S_2$  considerato, la vibrazione forzata della coordinata  $q_1$  nell'ipotesi che siano assegnati i valori dei coefficienti di  $S_1$  e dell'ampiezza e della frequenza della forza esterna ad esso relativa:

a)  $\omega_m^2 > \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2$ . - Scegliere  $\alpha$  e  $\beta$  in modo che sia  $\alpha\beta < 0$  e  $|\alpha|$  e  $|\beta|$  assumano valori possibilmente grandi, ma tali che risultino soddisfatte la (13),

dove  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$  s'intende sostituito con  $\omega_m^2$ , e la condizione  $|\beta| < 1$ ; trarre dalla (12), dove  $\omega_m^2$  prende il posto di  $\bar{\sigma}_2^2 \nu$ , il valore di  $\bar{\sigma}_2^2$  e da esso, a meno di una costante moltiplicativa positiva arbitrariamente assegnabile, i valori di  $a_{22}$  e  $b_{22}$ ; assegnare a  $k_2$  il valore dato dalla (10) dopo aver ricavato dalle (11) i valori di  $a_{12}$  e  $b_{12}$ .

b)  $\omega_m^2 \leq \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2$ . - Scegliere per  $a_{22}$ ,  $b_{22}$ ,  $a_{12}$ ,  $b_{12}$  valori tali da soddisfare alle condizioni  $\bar{\sigma}_2^2 > \bar{\sigma}_1^2 = \frac{a_{12}}{b_{12}}$ ,  $a_{22} > 0$ ,  $b_{22} > 0$ ,  $a_{11} a_{22} > a_{12}^2$ ,  $b_{11} b_{22} > b_{12}^2$ ; assegnare a  $k_2$  il valore dato dalla (10).

#### BIBLIOGRAFIA

- G. KRALL: *Meccanica Tecnica delle Vibrazioni*. Nicola Zanichelli, Bologna, 1940.  
 P. E. DANIELE: *Lezioni di Fisica-Matematica*. R. Università di Pisa, 1925-26.