

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LANDOLINO GIULIANO

## **Sulle trasformazioni assolutamente continue**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 12, n° 3-4 (1947), p. 161-172

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1947\\_2\\_12\\_3-4\\_161\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1947_2_12_3-4_161_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## SULLE TRASFORMAZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE (\*)

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa).

È noto <sup>(1)</sup> che se  $y=f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , è una funzione continua a variazione limitata, condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia assolutamente continua è che ogni insieme di punti di  $(a, b)$  di misura nulla sia trasformato dalla  $f(x)$  in un insieme di punti di  $(c, d)$  (dove  $c = \min f(x)$ ,  $d = \max f(x)$ ) pure di misura nulla.

S. BANACH <sup>(2)</sup> e G. VITALI <sup>(3)</sup>, quasi contemporaneamente e indipendentemente hanno introdotto i concetti di trasformazione continua  $\Phi: x=x(u, v)$ ,  $y=y(u, v)$ ,  $(u, v) \in \bar{Q}$ , essendo  $\bar{Q}$  il quadrato chiuso  $(0, 0; 1, 1)$ , « a variazione limitata » e « assolutamente continua ». Si dimostra facilmente che, considerata la trasformazione continua  $\Phi: x=x(u, v)$ ,  $y=y(u, v)$ ,  $(u, v) \in \bar{Q}$ , che sia a variazione limitata secondo BANACH e VITALI, condizione necessaria e sufficiente affinché essa risulti assolutamente continua secondo questi AA., è che trasformi ogni insieme di punti di misura nulla di  $\bar{Q}$  in un insieme di punti di misura nulla.

A proposito delle sue fondamentali ricerche sulla quadratura delle superficie in forma parametrica, L. CESARI ha introdotto <sup>(4)</sup> i concetti di trasformazione continua « a variazione limitata » e « assolutamente continua », più generali di quelli corrispondenti di BANACH e VITALI. Dietro suggerimento del prof. CESARI — al quale rivolgo qui il mio ringraziamento — mi sono proposto di ricercare se la proprietà sopra notata relativamente alle trasformazioni assolutamente continue secondo BANACH e VITALI continui a sussistere per le trasformazioni assolutamente continue nel senso del CESARI. Ho trovato che la proprietà in

---

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) B. LEVI: *Ricerche sulle funzioni derivate*. Rend. Acc. Lincei, vol. XV (1906) pp. 674-684, p. 679.

(2) S. BANACH: *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*. Fundamenta Mathematicae. Tomo VII (1925) pp. 225-236.

(3) G. VITALI: *Sulle funzioni continue*. Ibidem Tomo VIII (1926) pp. 175-188.

(4) L. CESARI: *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica*. Bollettino dell'Un. Mat. It., Serie II (1942) pp. 109-117.

questione non sussiste in generale per tali trasformazioni <sup>(5)</sup>. Più precisamente, servendomi di un esempio costruito dal CESARI per altro scopo, mostro che esiste una trasformazione assolutamente continua definita in un cerchio  $\bar{C}$  e non biunivoca che trasforma un insieme di punti interni a  $\bar{C}$  di misura nulla in un insieme di punti di misura positiva. Inoltre un altro semplice esempio fa vedere che esiste una trasformazione assolutamente continua e biunivoca definita in un cerchio  $\bar{C}$  che trasforma la circonferenza  $C^*$  del cerchio in un insieme di misura positiva.

Passo quindi a dimostrare i due seguenti teoremi :

TEOREMA I. - *Siano  $A$  una regione di JORDAN del piano  $(u, v)$ ,  $A^*$  la frontiera di  $A$  e  $\bar{A} = A + A^*$ . Perchè la trasformazione continua a variazione limitata*

$$\Phi : x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \in \bar{A}$$

*sia assolutamente continua, è sufficiente che essa trasformi ogni insieme di punti (interni) di  $A$  di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla.*

TEOREMA II. - *Siano  $A$  una regione di JORDAN del piano  $(u, v)$ ,  $A^*$  la frontiera di  $A$  e  $\bar{A} = A + A^*$ . Ogni trasformazione continua*

$$\Phi : x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \in \bar{A}$$

*che sia biunivoca e assolutamente continua trasforma ogni insieme di punti (interni) di  $A$  di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla.*

Da questi teoremi si deduce in particolare che condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione continua e biunivoca

$$\Phi : x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \in \bar{A}$$

(che quindi è a variazione limitata (v. n. 5)) sia assolutamente continua è che trasformi ogni insieme di punti (interni) di  $A$  di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla.

#### Generalità - Definizioni.

1. - Detta  $A$  una regione di JORDAN del piano  $(u, v)$ ,  $A^*$  la sua frontiera (curva continua semplice e chiusa) e posto  $\bar{A} = A + A^*$ , siano  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  funzioni continue (ad un valore) in  $\bar{A}$  e sia  $\Phi$  la trasformazione continua (univoca)

$$(1) \quad \Phi : x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \in \bar{A}.$$

<sup>(5)</sup> D'ora in poi intenderò parlare di trasformazioni a variazione limitata e assolutamente continue secondo CESARI.

Ad ogni punto  $P$  di  $\bar{A}$  corrisponde nel piano  $(x, y)$  un punto  $Q \equiv \Phi(P)$  che diremo *immagine* del punto  $P$ . Diciamo  $\bar{B} = \Phi(\bar{A})$  l'insieme dei punti del piano  $(x, y)$  che sono immagini di qualche punto di  $\bar{A}$ . L'insieme  $\bar{B}$  è limitato e chiuso. Sia  $K$  un quadrato del piano  $(x, y)$  a lati paralleli agli assi contenente nel suo interno tutti i punti di  $\bar{B}$ .

Se  $Q$  è un punto di  $\bar{B}$ , esiste in  $\bar{A}$  un insieme non vuoto di punti  $P$ , che diremo i *modelli* del punto  $Q$ , la cui immagine coincide con  $Q$ .

Indicheremo tale insieme, che risulta chiuso, con  $\Phi^{-1}(Q)$ .

Se  $E$  è un insieme di punti di  $\bar{A}$ , diremo  $\Phi(E)$  l'insieme dei punti di  $\bar{B}$  che sono immagini di punti di  $E$ . Se  $\mathcal{E}$  è un insieme di punti di  $\bar{B}$ , diremo  $\Phi^{-1}(\mathcal{E})$  l'insieme dei punti di  $\bar{A}$  la cui immagine cade in  $\mathcal{E}$ . Se  $E$  è chiuso, anche  $\Phi(E)$  è chiuso; se  $\mathcal{E}$  è chiuso, anche  $\Phi^{-1}(\mathcal{E})$  è chiuso. Se, per ogni punto di  $\bar{B}$ ,  $\Phi^{-1}(Q)$  è formato da un solo punto, diremo che la trasformazione  $\Phi$  è *biunivoca*.

Sia  $r$  una regione di JORDAN (aperta) contenuta in  $A$  e sia  $r^*$  la curva continua semplice e chiusa costituente la frontiera di  $r$ . La trasformazione  $\Phi$  fa corrispondere alla curva  $r^*$  una curva continua e chiusa  $c$  (non necessariamente semplice) che diremo l'immagine di  $r^*$ . Indicheremo sempre con  $c$  anche l'insieme  $c = \Phi(r^*)$  occupato dai punti di  $c$  sul piano  $(x, y)$ . Fissato sul piano  $(u, v)$  un verso positivo per le rotazioni, la curva  $r^*$  risulterà orientata. Fissiamo ora anche sul piano  $(x, y)$  un verso positivo per le rotazioni (indipendente dal precedente). Sia  $O(x, y; c)$  l'indice topologico (di KRONECKER) relativo alla curva  $c$  (e che risulta nullo fuori di  $K$ ). Si dimostra facilmente che la funzione  $O(x, y; c)$  è di BAIRE e quindi quasi continua. Esiste perciò (finito o infinito) l'integrale di LEBESGUE

$$g(r) = \iint_K |O(x, y; c)| dx dy.$$

Sia ora  $\{r_i, i=1, \dots, n\}$  una suddivisione di  $\bar{A}$  in regioni di JORDAN. Sia  $c_i$  l'immagine della frontiera  $r_i^*$  di  $r_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Poniamo:

$$G(A) = G(\Phi) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^n g(r_i)$$

per tutte le possibili suddivisioni  $\{r_i, i=1, \dots, n\}$  di  $\bar{A}$  in regioni di JORDAN. In ogni punto  $Q \equiv (x, y)$  di  $K$  si ponga:

$$\Psi(x, y) = \Psi(x, y; \Phi) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^n |O(x, y; c_i)|$$

per tutte le possibili suddivisioni  $\{r_i, i=1, \dots, n\}$  di  $\bar{A}$  in regioni di JORDAN.

La funzione  $\Psi(x, y)$  (che assume solo valori interi  $\geq 0$ , non escluso  $+\infty$ ) si dirà la funzione caratteristica della trasformazione  $\Phi$ .

Si prova che la funzione  $\Psi(x, y)$  è semicontinua inferiormente in  $K$  e perciò è una funzione di classe 1 di BAIRE, dunque è quasi continua. E poichè  $\Psi(x, y)$  è una funzione non negativa, ne viene che esiste (finito o infinito) l'integrale di LEBESGUE

$$W = W(\Phi) = \iint_K \Psi(x, y; \Phi) dx dy.$$

Se è  $W(\Phi) < +\infty$ , si dirà che la trasformazione  $\Phi$  è a variazione limitata (secondo CESARI).

Si dice che la trasformazione continua  $\Phi$  è assolutamente continua (secondo CESARI) se :

a) ad ogni numero  $\varepsilon > 0$  arbitrario può farsi corrispondere un numero  $\sigma > 0$  tale che, per ogni gruppo  $\{\pi_i, i=1, \dots, n\}$  di poligoni semplici aperti di  $A$ , a due a due senza punti a comune e tali che  $\sum_{i=1}^n |\pi_i| < \sigma$ ,<sup>(6)</sup> si ha :

$$\sum_{i=1}^n g(\pi_i) < \varepsilon,$$

$\beta$ ) per ogni poligono  $\pi$  di  $A$  e per ogni suddivisione  $\{\pi_i, i=1, \dots, n\}$  di  $\pi$  in poligoni aperti semplici, a due a due senza punti a comune si ha :

$$G(\pi) = \sum_{i=1}^n G(\pi_i) \quad (7).$$

2. - Esempio di una trasformazione assolutamente continua che trasforma un insieme di punti interni di  $A$  di misura nulla in un insieme di punti di misura positiva.

Per altro scopo il CESARI aveva costruito<sup>(8)</sup> una trasformazione continua (non biunivoca)

$$\Phi : x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (\bar{c} : u^2 + v^2 \leq 1)$$

rappresentata da funzioni  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  assolutamente continue secondo TONELLI dotate di derivate parziali prime integrabili  $L^2$  che trasforma un insieme di punti interni al cerchio  $\bar{c}$  di misura nulla in un insieme di misura positiva.

<sup>(6)</sup> Dato un insieme  $E$ , indicheremo con  $|E|$  la sua misura esterna. Se  $E$  è misurabile,  $|E|$  indicherà la misura di  $E$ .

<sup>(7)</sup> Il CESARI ha dimostrato che le condizioni  $\alpha$ ) e  $\beta$ ) sono indipendenti (v. CESARI : *Sul concetto di trasformazione assolutamente continua*. Bollettino dell' Un. Mat. It. (1943) pp. 5-10.

<sup>(8)</sup> L. CESARI : *Sulle trasformazioni continue*. Annali di Matematica pura e applicata. Serie IV, Tomo XXI (1942) pp. 157-188, n. 19.

Ora, secondo un risultato dovuto a MORREY <sup>(9)</sup>, ogni trasformazione  $\Phi$  siffatta rappresenta una superficie (piatta) di area finita secondo LEBESGUE la cui area  $L(S)$  è data dall'integrale classico. Per un teorema di CESARI <sup>(10)</sup> si deduce che la trasformazione  $\Phi$  è assolutamente continua. Dunque esiste una trasformazione continua e assolutamente continua che trasforma un insieme di punti interni a  $\bar{c}$  di misura nulla in un insieme di misura positiva.

**3. - Esempio di una trasformazione assolutamente continua e biunivoca definita in un cerchio  $\bar{C}$  che trasforma la circonferenza  $C^*$  del cerchio in un insieme di misura positiva.**

Sia  $r^*$  una curva continua semplice e chiusa del piano  $(x, y)$  di misura positiva. Sia  $r$  la regione aperta di JORDAN definita da  $r^*$  e sia  $\bar{r} = r + r^*$ . È noto che la regione  $\bar{r}$  si può rappresentare con funzioni continue biunivocamente e conformemente in un cerchio in modo che la curva  $r^*$  sia rappresentata biunivocamente sulla circonferenza del cerchio. Poichè ogni rappresentazione conforme è assolutamente continua, ne viene che esiste una trasformazione continua, biunivoca e assolutamente continua che trasforma il contorno di un cerchio nel contorno di una regione di JORDAN di misura superficiale positiva.

**4. - Dimostrazione del teorema I.**

a) Supponiamo che il teorema sia falso; supponiamo cioè che la trasformazione  $\Phi$  che è a variazione limitata, non sia assolutamente continua, pur trasformando ogni insieme di punti di  $A$  di misura nulla in un insieme di punti di misura nulla.

Si supponga che esista, se possibile, un numero  $\varepsilon > 0$  e una successione di gruppi di poligoni semplici aperti, ciascun gruppo essendo costituito di un numero finito di poligoni interamente appartenenti ad  $A$  e a due a due senza punti a comune  $\{\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots, \pi_{\nu_n'}^{(n)}\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) tali che :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{\nu_n'} |\pi_i^{(n)}| < \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{i=1}^{\nu_n'} g(\pi_i^{(n)}) > \varepsilon > 0.$$

Poichè la trasformazione  $\Phi$  è a variazione limitata, detta  $\Psi(x, y; \Phi)$  la sua funzione caratteristica, questa risulta integrabile, secondo LEBESGUE, e si potrà

<sup>(9)</sup> C. B. MORREY : *A class of representations of manifolds*. Part I, American Journal of Mathematics, vol. LV (1933) pp. 683-707.

<sup>(10)</sup> L. CESARI : *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*. Memorie Acc. d'Italia (1943) pp. 1323-1481, p. 1480.

perciò determinare un numero  $\sigma > 0$  tale che per ogni insieme  $E$  di punti di  $K$  di misura  $\leq \sigma$  si ha :

$$\iint_E \Psi(x, y; \Phi) dx dy < \varepsilon.$$

Si dica  $N$  l'insieme, di misura nulla, dei punti  $(x, y)$  di  $K$  nei quali è  $\Psi(x, y; \Phi) = +\infty$ .

b) Si osservi che se una poligonale  $\lambda$  divide un poligono semplice  $\pi$  in due poligoni semplici  $\pi'$  e  $\pi''$ , allora l'immagine di  $\lambda$  è, per l'ipotesi in cui ci siamo posti, una curva continua di misura superficiale nulla e si ha :

$$g(\pi) \leq g(\pi') + g(\pi'').$$

Suddividendo dunque i poligoni  $\pi_i^{(n)}$  in due, e quindi anche in più poligoni semplici, la prima delle somme (1) rimane invariata e la seconda non diminuisce. Si può perciò fare in modo che i poligoni  $\pi_i^{(n)}$  (e le loro immagini  $\Phi(\pi_i^{(n)})$ ) abbiano tutti diametro  $< \frac{1}{2^n}$ .

c) Dalla successione dei gruppi di poligoni  $\pi_i^{(n)}$  ( $i=1, 2, \dots, \nu_n$ ) si può dedurre una nuova successione di gruppi di poligoni  $\pi_i^{(n)}$  ( $i=1, 2, \dots, \nu_n$ ), ogni gruppo  $\pi_i^{(n)}$  ( $i=1, 2, \dots, \nu_n$ ) essendo formato di un numero finito di poligoni, ognuno di diametro  $< \frac{1}{2^n}$ , semplici, aperti, a due a due senza punti a comune, in modo che per la nuova successione siano soddisfatte le (1), e in modo che ogni poligono  $\pi_i^{(n)}$  ( $i=1, \dots, \nu_n$ ) sia completamente contenuto in uno dei poligoni  $\pi_j^{(n)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_n$ ) con  $n' < n$ , oppure sia completamente esterno a tutti i poligoni  $\pi_j^{(n)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_n$ ),  $n'=1, 2, \dots, n-1$ .

Infatti, se la successione dei gruppi di poligoni  $\pi_i^{(n)}$  ( $i=1, 2, \dots, \nu_n$ ) ha essa stessa la proprietà enunciata, l'assumeremo come successione  $\pi_i^{(n)}$  ( $i=1, \dots, \nu_n$ ) richiesta. In caso contrario, si consideri il gruppo dei poligoni  $\pi_j^{(1)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_1$ ) e si ponga :

$$\pi_1^{(1)} \equiv \pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)} \equiv \pi_2^{(1)}, \dots, \pi_{\nu_1}^{(1)} \equiv \pi_{\nu_1}^{(1)}.$$

Consideriamo ora il gruppo dei poligoni  $\pi_i^{(2)}$  ( $i=1, 2, \dots, \nu_2$ ). Se nessuno di essi ha punti a comune con qualche poligono del gruppo  $\pi_j^{(1)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_1$ ), si ponga :

$$\pi_1^{(2)} \equiv \pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)} \equiv \pi_2^{(2)}, \dots, \pi_{\nu_2}^{(2)} \equiv \pi_{\nu_2}^{(2)};$$

altrimenti, sia  $\pi_{\nu'}^{(2)}$  uno dei poligoni del gruppo  $\pi_i^{(2)}$  ( $i=1, 2, \dots, \nu_2$ ) che ha punti a comune con qualche poligono del gruppo  $\pi_j^{(1)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_1$ ). Siano, precisamente,  $\pi_{j_1}^{(1)}, \pi_{j_2}^{(1)}, \dots, \pi_{j_{\nu'}}^{(1)}$  ( $\nu' \leq \nu_1$ ) quei poligoni del gruppo  $\pi_j^{(1)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_1$ ) che si sovrappongono a  $\pi_{\nu'}^{(2)}$ .

L'insieme  $\pi'_v{}^{(2)} \pi_{j_1}^{(1)}$  è la somma di un numero finito di poligoni ognuno dei quali è completamente contenuto in  $\pi_{j_1}^{(1)}$ . L'insieme <sup>(14)</sup>

$$H \equiv \pi'_v{}^{(2)} - \pi'_v{}^{(2)} \pi_{j_1}^{(1)} - \pi'_v{}^{(2)} \pi_{j_1}^{(1)} *$$

è la somma di un numero finito di poligoni ognuno dei quali è completamente esterno a  $\pi_{j_1}^{(1)}$ . Ne segue che gli elementi di queste due somme ci danno complessivamente un gruppo di un numero finito di poligoni (semplici, aperti, e due a due senza punti a comune) ciascuno dei quali o è completamente contenuto in  $\pi_{j_1}^{(1)}$  oppure è completamente esterno a  $\pi_{j_1}^{(1)}$ . Ragioniamo ora su ciascuno dei poligoni dell'insieme  $H$  rispetto a  $\pi_{j_2}^{(1)}$  come prima si è ragionato su  $\pi'_v{}^{(2)}$  rispetto a  $\pi_{j_1}^{(1)}$ . Otterremo così per ciascun poligono di  $H$  due gruppi di un numero finito di poligoni di cui il primo è formato di poligoni ognuno dei quali è completamente contenuto in  $\pi_{j_2}^{(1)}$  e il secondo è formato di poligoni ognuno dei quali è completamente esterno a  $\pi_{j_2}^{(1)}$ . Così continuando fino a considerare il poligono  $\pi_{j_v}^{(1)}$  si otterrà un numero finito  $\alpha_0$  di poligoni (semplici, aperti e due a due senza punti a comune) ciascuno dei quali o è completamente contenuto in qualche poligono del gruppo  $\pi_j^{(1)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_1$ ) o è completamente esterno a tutti i poligoni di tale gruppo. Si noti ancora che l'insieme somma di tutti questi  $\alpha_0$  poligoni differisce da  $\pi'_v{}^{(2)}$  per un numero finito di segmenti che costituiscono perciò un insieme di punti di misura superficiale nulla.

Il ragionamento si può ripetere per ognuno dei poligoni del gruppo  $\pi_i'^{(2)}$  che hanno la stessa proprietà di  $\pi'_v{}^{(2)}$  vale a dire che hanno punti a comune con qualche poligono del gruppo  $\pi_j^{(1)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_1$ ). Otterremo così complessivamente un numero finito di poligoni che insieme a quei poligoni del gruppo  $\pi_i'^{(2)}$  che non abbiamo considerato perchè completamente esterni a tutti i poligoni del gruppo  $\pi_j^{(1)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_1$ ) ci daranno un gruppo di  $\nu_2 \geq \nu_2'$  poligoni  $\pi_i^{(2)}$  ( $i=1, 2, \dots, \nu_2$ ) ognuno dei quali o è completamente contenuto in qualche poligono del gruppo  $\pi_j^{(1)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_1$ ) oppure è completamente esterno a tutti

i poligoni di tale gruppo. Notiamo ancora che l'insieme  $\sum_{i=1}^{\nu_2} \pi_i^{(2)}$  differisce dall'insieme  $\sum_{i=1}^{\nu_2'} \pi_i'^{(2)}$  per un numero finito di segmenti che costituiscono perciò

un insieme di punti di misura superficiale nulla.

Passando poi al gruppo  $\pi_h^{(3)}$  ( $h=1, 2, \dots, \nu_3'$ ) e confrontandolo con i gruppi  $\pi_j^{(1)}$  ( $j=1, 2, \dots, \nu_1$ ) e  $\pi_i^{(2)}$  ( $i=1, 2, \dots, \nu_2$ ) e poi al gruppo  $\pi_k^{(4)}$  ( $k=1, 2, \dots, \nu_4'$ ) e così via otterremo la successione di gruppi di poligoni  $\pi_r^{(n)}$  ( $r=1, 2, \dots, \nu_n$ ),

<sup>(14)</sup> Se  $p$  è un poligono aperto tutto appartenente ad  $A$ , insieme alla sua frontiera, indicheremo sempre con  $p^*$  la sua frontiera.



$n=1, 2, \dots$  (ogni gruppo essendo costituito di poligoni semplici, aperti e due a due senza punti a comune). Se si osserva infine che :

1°) i poligoni del gruppo  $\pi_r^{(n)}$  ( $r=1, 2, \dots, \nu_n$ ) hanno tutti diametro  $< \frac{1}{2^n}$  perchè questa proprietà possedevano i poligoni del gruppo  $\pi_s'^{(n)}$  ( $s=1, 2, \dots, \nu_n'$ ) della successione di partenza.

2°) l'insieme  $\sum_{r=1}^{\nu_n} \pi_r^{(n)}$  differisce dall'insieme  $\sum_{s=1}^{\nu_n'} \pi_s'^{(n)}$  per un numero finito di segmenti che costituiscono perciò un insieme di punti di misura superficiale nulla e quindi, tenendo presente l'osservazione fatta in b) si deduce, per le (1) :

$$(2) \quad \sum_{r=1}^{\nu_n} |\pi_r^{(n)}| = \sum_{s=1}^{\nu_n'} |\pi_s'^{(n)}| < \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{r=1}^{\nu_n} g(\pi_r^{(n)}) \geq \sum_{s=1}^{\nu_n'} g(\pi_s'^{(n)}) > \varepsilon > 0$$

si conclude che la successione ottenuta gode di tutte le proprietà enunciate.

d) Poniamo ora :

$$E_n = \sum_{r=1}^{\nu_n} \pi_r^{(n)}, \quad F_n = \sum_{j=n}^{\infty} E_j.$$

È  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ . Si ponga poi  $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ . Gli insiemi  $E_n, F_n, F$  sono misurabili.

Abbiamo  $|F_n| < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}}$  e perciò  $|F| = \lim_{n \rightarrow \infty} |F_n| = 0$ .

Si dica  $H_n$  l'insieme misurabile di tutti i punti  $(x, y)$  di  $K$  nei quali è :

$$\sum_{r=1}^{\nu_n} |O(x, y; c_r^{(n)})| \neq 0$$

dove  $c_r^{(n)}$  è la curva continua e chiusa immagine della poligonale  $\pi_r^{(n)*}$  costituente la frontiera di  $\pi_r^{(n)}$ . L'insieme  $H_n$  ha misura  $> \sigma$ . Infatti, se fosse  $|H_n| \leq \sigma$ , si avrebbe :

$$\begin{aligned} \varepsilon < \sum_{r=1}^{\nu_n} g(\pi_r^{(n)}) &= \sum_{r=1}^{\nu_n} \iint_K |O(x, y; c_r^{(n)})| dx dy = \iint_K \sum_{r=1}^{\nu_n} |O(x, y; c_r^{(n)})| dx dy = \\ &= \iint_{H_n} \sum_{r=1}^{\nu_n} |O(x, y; c_r^{(n)})| dx dy \leq \iint_{H_n} \Psi(x, y; \Phi) dx dy < \varepsilon. \end{aligned}$$

Si ponga :

$$J_n = \sum_{j=n}^{\infty} H_j.$$

È  $J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_n \supset \dots$ . Sia  $J = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ . Gli insiemi  $J_n, J$  sono misurabili.

Da  $|H_n| > \sigma$  si ricava:  $|J_n| > \sigma$  e  $|J| \geq \sigma$ .

Dimostriamo ora che:

$$(3) \quad \Phi(F) \supset J - N.$$

Sia infatti  $Q(x_0, y_0)$  un punto di  $J - N$ . Allora  $Q(x_0, y_0)$  appartiene a  $J$  e perciò a tutti gli  $J_n$  e quindi a infiniti  $H_n$ . Esistono perciò infiniti poligoni  $p_j \equiv \pi_r^{(n)}$  di indice  $n$  comunque elevato per i quali  $O(x_0, y_0; c_r^{(n)}) \neq 0$ .

Poniamo:

$$m_0 = \Psi(x_0, y_0; \Phi).$$

È:  $0 < m_0 < +\infty$ . Pensiamo ordinati tali poligoni  $p_j \equiv \pi_r^{(n)}$  in una successione  $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$  in modo che la successione dei corrispondenti indici sia monotona non decrescente. Ciascun poligono  $p_j$  è completamente esterno a tutti i poligoni precedenti, oppure è completamente contenuto in un poligono  $p_{j'}$ , con  $j' < j$ .

Diciamo  $c_j$  la curva continua e chiusa immagine della poligonale  $p_j^*$  costituente la frontiera di  $p_j$ . Non possono esistere  $m > m_0$  poligoni  $p_j$  a due a due esterni l'uno all'altro, altrimenti si avrebbe:

$$m_0 = \Psi(x_0, y_0; \Phi) \geq \sum_{j=1}^m |O(x_0, y_0; p_j)| > m_0.$$

I poligoni  $p_j$  debbono perciò distribuirsi in  $m_0' \leq m_0$  successioni di poligoni:

$$p_1^{(s)} \supset p_2^{(s)} \supset \dots \supset p_{j^{(s)}}^{(s)} \supset \dots \quad (s=1, 2, \dots, m_0' \leq m_0)$$

ognuno contenente il successivo.

Per ognuna di queste  $m_0'$  successioni esiste perciò almeno un punto  $P^{(s)}$  ( $s=1, \dots, m_0'$ ) contenuto in ogni poligono della successione, oppure, se ciò fosse possibile, sulla frontiera di ogni poligono, a partire da un certo indice  $j_0$  in poi. Ma proveremo subito che quest'ultima eventualità non si verifica. Infatti, si noti che  $O(x_0, y_0; c_j^{(s)}) \neq 0$  (dove si è indicata con  $c_j^{(s)}$  la curva continua e chiusa immagine della frontiera  $p_j^{(s)*}$  di  $p_j^{(s)}$ ) per ogni  $j$  e perciò per un lemma di RADÒ<sup>(12)</sup>, in ogni poligono  $p_j^{(s)}$  esiste un modello  $P_j^{(s)}$  di  $Q$ , cioè un punto  $P_j^{(s)}$  tale che  $\Phi(P_j^{(s)}) = Q$ .

Ne segue che  $P^{(s)}$  è punto di accumulazione di infiniti punti  $P_j^{(s)}$  e perciò, essendo la  $\Phi$  una trasformazione continua,  $\Phi(P^{(s)}) = Q$ . Inoltre, essendo  $O(x_0, y_0; c_j^{(s)}) \neq 0$ ,  $P^{(s)}$  non può appartenere a  $p_j^{(s)*}$  e perciò esso è punto *interno* di tutti i poligoni  $p_j^{(s)}$  a cui appartiene. Ciò prova che  $P^{(s)}$  appartiene a infiniti poligoni  $\pi_r^{(n)}$  con indice  $n$  comunque elevato, cioè ad infiniti insiemi  $E_n$  e quindi a tutti gli insiemi  $F_n$  ed infine a  $F$ . Perciò  $F$  è un insieme di punti

(12) T. RADÒ: *On continuous transformations in the plane*. Fundamenta Mathematicae, Tomo XXVII. (1936) pp. 201-211.

di  $A$  non vuoto, di misura nulla, per cui l'insieme corrispondente  $\Phi(F)$  è tale che :

$$\Phi(F) \supset J-N, \quad |\Phi(F)| \geq |J-N| = |J| \geq \sigma > 0.$$

Ciò contraddice l'ipotesi ammessa ed è perciò soddisfatta la condizione  $\alpha$ ) di cui alla definizione di trasformazione assolutamente continua.

Ripetendo considerazioni analoghe a quelle svolte da CESARI in un suo lavoro <sup>(13)</sup>, dall'ipotesi che la  $\Phi$  trasforma ogni insieme di punti di  $A$  di misura nulla in un insieme di punti di misura nulla, segue che per ogni poligono  $\pi$  di  $A$  e per ogni suddivisione  $\{\pi_i, i=1, 2, \dots, n\}$  di  $\pi$  in poligoni aperti semplici, a due a due senza punti a comune, si ha :

$$G(\pi) = \sum_{i=1}^n G(\pi_i).$$

La condizione  $\beta$ ) di cui alla definizione di trasformazione assolutamente continua è perciò anch'essa soddisfatta e il teorema resta pertanto provato.

5. - Prima di dimostrare il teorema II, proviamo il seguente :

TEOREMA. - *Ogni trasformazione  $\Phi$  biunivoca e continua è a variazione limitata insieme alla sua inversa  $\Phi^{-1}$ .*

Si noti intanto che la  $\Phi^{-1}$  è, come la  $\Phi$ , biunivoca e continua. Ciò segue subito se si osserva che, essendo  $\Phi$  continua e biunivoca, ad ogni  $\varepsilon > 0$  si può far corrispondere un numero  $\sigma > 0$  tale che se  $Q$  e  $Q'$  sono due punti di  $\bar{B}$  tali che  $\overline{QQ'} < \sigma$ , allora la distanza dei punti  $P$  e  $P'$  di  $\bar{A}$  corrispondenti a  $Q$  e  $Q'$  risulta  $< \varepsilon$ . Si potrà perciò limitarsi a dimostrare la proprietà enunciata per la trasformazione  $\Phi$ .

Sia  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  una suddivisione di  $A$  in regioni di JORDAN e siano  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  le regioni di JORDAN immagini delle precedenti per la trasformazione  $\Phi$ . La  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  costituisce una suddivisione di  $B$  in regioni di JORDAN e se  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sono le curve continue e chiuse costituenti la frontiera di  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , si ha

$$O(x, y; c_i) = \begin{cases} \pm 1 & \text{se } (x, y) \varepsilon \gamma_i \\ = 0 & \text{se } (x, y) \text{ non } \varepsilon \gamma_i. \end{cases}$$

Poichè la  $\Phi$  è una trasformazione biunivoca si ha  $\Psi(x, y; \Phi) \leq 1$  se  $(x, y) \varepsilon B$ ,  $\Psi(x, y; \Phi) = 0$  se  $(x, y)$  non  $\varepsilon B$ . D'altra parte, essendo per  $n=1$ ,  $r_1 \equiv A$  e perciò  $\Psi(x, y; \Phi) \geq 1$  se  $(x, y) \varepsilon B$ ,  $\Psi(x, y; \Phi) = 0$  se  $(x, y)$  non  $\varepsilon B$  risulta  $\Psi(x, y; \Phi) = 1$  se  $(x, y) \varepsilon B$ ,  $\Psi(x, y; \Phi) = 0$  se  $(x, y)$  non  $\varepsilon B$ . In altre parole è  $W(\Phi) = \iint_K \Psi(x, y; \Phi) dx dy = |B| < +\infty$  e perciò la  $\Phi$  risulta a variazione limitata.  $\bar{K}$

<sup>(13)</sup> L. CESARI : *Sulle trasformazioni continue e sull'area delle superficie*. Memorie Acc d'Italia (1941) pp. 1305-1395, p. 1314.

6. - Dimostrazione del teorema II.

Supponiamo il teorema falso; supponiamo cioè che la trasformazione  $\Phi$  biunivoca e continua e perciò a variazione limitata, per quanto abbiamo provato nel n. 5, sia anche assolutamente continua ed esista un insieme  $E$  di punti (interni) di  $A$  di misura nulla che sia trasformato dalla  $\Phi$  in un insieme  $\Phi(E)$  di misura esterna <sup>(14)</sup> positiva. Si abbia cioè:

$$|\Phi(E)| = \sigma > 0.$$

Si dica  $A_\tau$  l'insieme (chiuso) dei punti di  $A$  la cui distanza da  $A^*$  è  $\geq \tau$  e, analogamente, si dica  $B_\lambda$  l'insieme (chiuso) dei punti di  $B$  la cui distanza da  $B^*$  <sup>(15)</sup> è  $\geq \lambda$ . È, evidentemente,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} B_\lambda = B, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} B_\lambda \Phi(E) = \Phi(E), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} |B_\lambda \Phi(E)| = |\Phi(E)|$$

ed esiste perciò un  $\bar{\lambda} > 0$  tale che:

$$|B_{\bar{\lambda}} \Phi(E)| > \frac{\sigma}{2}.$$

Si ponga  $\mathcal{E}_0 = B_{\bar{\lambda}} \Phi(E)$ ,  $E_0 = \Phi^{-1}(\mathcal{E}_0)$ .

È:  $E_0 \subset E$ ,  $|E_0| = 0$ ,  $|\mathcal{E}_0| > \frac{\sigma}{2}$ .

Poichè  $E_0$  corrisponde (biunivocamente) all'insieme  $\mathcal{E}_0 \subset B_{\bar{\lambda}}$ , esisterà un  $\bar{\tau} > 0$  tale che  $E_0 \subset A_{\bar{\tau}}$ . Si osservi ancora che  $A_{\bar{\tau}}$  è tutto costituito di punti interni di  $A_{\bar{\tau}/2}$  e che l'insieme chiuso  $\Phi(A_{\bar{\tau}/2})$  ha una distanza  $\lambda' > 0$ ,  $0 < \lambda' < \bar{\lambda}$  da  $B^*$  ed è perciò interamente contenuto nell'insieme chiuso  $B_{\lambda'}$ . Per ogni intero  $n$  esiste una successione di rettangoli aperti a lati paralleli agli assi, non sovrappoventisi,  $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \dots$ , appartenenti interamente all'insieme  $A_{\bar{\tau}/2}$ , tali che il plurirettangolo  $A_n$  che essi costituiscono ricopre una parte  $E_0'$  di  $E_0$  per cui  $|\Phi(E_0 - E_0')| = 0$  e soddisfa alla condizione <sup>(16)</sup>

$$|A_n| = \sum_{r=1}^{\infty} |\delta_r^{(n)}| < \frac{1}{2^n}.$$

<sup>(14)</sup> Si tenga presente che non è detto che a un insieme  $E$  di  $A$  misurabile corrisponda per la  $\Phi$  un insieme misurabile.

<sup>(15)</sup> Si osservi che la trasformazione  $\Phi$  induce una corrispondenza biunivoca e continua fra le frontiere  $A^*$  e  $B^*$  di  $A$  e di  $B$ .

<sup>(16)</sup> Basta tener presente che, nelle nostre ipotesi, ogni poligonale semplice  $l$  tutta costituita di punti di  $A$  è trasformata da  $\Phi$  in una curva continua (semplice) di misura superficiale nulla. Infatti, supposto, ciò che è possibile,  $l$  completamente interna ad  $A$ , estremi inclusi, siano  $l_1$  e  $l_2$  due poligonali, aventi gli estremi in comune tra loro e con  $l$  e tali che il poligono semplice aperto  $\pi$  il cui contorno è  $l_1 + l_2$  è completamente contenuto in  $A$  e

