ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SANDRO FAEDO

Su un teorema di esistenza dell'estremo assoluto in campi illimitati

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 12, nº 1-2 (1943), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1943_2_12_1-2_1_0>

SU UN TEOREMA DI ESISTENZA DELL' ESTREMO ASSOLUTO IN CAMPI ILLIMITATI

di SANDRO FAEDO (Roma).

1. - Sia A_L un insieme limitato e chiuso di punti del piano (x, y) ; per ogni punto di A_L ed ogni valore finito di y' è definita una funzione $f(x, y, y')$, reale e continua insieme alla derivata parziale $f_{y'}(x, y, y')$. Se

$$C: \quad y=y(x), \qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

è una curva assolutamente continua i cui punti appartengono tutti ad A_L e supposta integrabile in (a, b) la funzione $f(x, y(x), y'(x))$, indichiamo con $I(C)$ l'integrale

$$I(C)=\int_C f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

M. NAGUMO [1] ha dato il seguente importante teorema di esistenza dell'estremo, che estende uno precedentemente dato da L. TONELLI [2] :

« *Se* :

a) $I(C)$ *è quasi regolare positivo* [3] ;

b) *esiste una funzione* $\Phi(z)$, *definita in* $(0, +\infty)$, *inferiormente limitata, tale che* $\Phi(z) : z \to +\infty$ *per* $z \to +\infty$, *e per la quale si abbia in tutto* A_L

$$f(x, y, y') \geqslant \Phi(|y'|) ;$$

in ogni classe completa [4] *di curve ordinarie* C *appartenenti ad* A_L *esiste il minimo assoluto di* $I(C)$ ».

Successivamente E. J. MC SHANE [5] ha dimostrato che alla condizione *b)* può sostituirsi l'altra :

b') « *In ciascun punto di* A_L *è*

$$\lim_{|y'|\to\infty} \left| \frac{f(x, y, y')}{y'} \right| = \infty \text{ ».}$$

---

(1) M. NAGUMO : *Über die gleichmässige Summierbarkeit und ihre Anwendung auf ein Variationsproblem.* Japanese Journal of Mathematics. Vol. VI, 1929, pp. 173-182.

(2) L. TONELLI : *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Vol. II, pag. 282.

(3) L. TONELLI : *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Vol. I, pag. 361.

(4) L. TONELLI : *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Vol. II, pag. 3.

(5) E. J. MC SHANE : *Existence theorems for ordinary problems of the Calculus of Variations.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, s. II, vol. III (1934), pag. 298.

L. TONELLI [6] ha poi dimostrato che le condizioni b) e b') sono fra loro equivalenti.

I teoremi di NAGUMO e MC SHANE sono stati estesi da S. CINQUINI [7] a integrali dipendenti da derivate di ordine superiore al primo, anche nel caso che il campo non sia limitato.

Indichiamo con $A^{(n)}$ un insieme di uno spazio cartesiano $[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$ ad $n+1$ dimensioni, che contenga tutti i propri punti di accumulazione posti al finito.

Per ogni punto di $A^{(n)}$ ed ogni valore finito di $y^{(n)}$ è definita una funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, continua insieme alla derivata parziale $f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$.

Se

$$C^{(n)}: \quad y = y(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

è tale che $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ siano assolutamente continue in (a, b), tutti i punti

$$[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)], \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

appartengano ad $A^{(n)}$ ed $f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ sia integrabile in (a, b), indichiamo con $I(C^{(n)})$ l'integrale

$$I(C^{(n)}) = \int_{C^{(n)}} f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\, dx.$$

S. CINQUINI [8] ha dato il seguente teorema che estende quello di MC SHANE:

« *Se*:

a) *esiste un numero finito* $h > 0$ *tale che, in tutti i punti di* $A^{(n)}$, *sia* $-h \leqslant x \leqslant h$;

β) *l'integrale* $I(C^{(n)})$ è *quasi regolare positivo*;

γ) *esiste un numero finito* N *tale che in tutti i punti di* $A^{(n)}$ *e per ogni valore finito di* $y^{(n)}$ *sia*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant N;$$

---

(6) L. TONELLI: *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, s. II, vol. III (1934), pag. 416.

I teoremi di MC SHANE e NAGUMO sussistono anche quando l'integrale $I(C)$ invece che da curve piane dipende da curve appartenenti a un $S_m (m \geqslant 2)$. In tal caso essi sono ancora equivalenti, come è dimostrato in S. FAEDO: *Il Calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito*. Commentationes Pont. Acad. Scientiarum, 1943, Cap. II, § 1.

(7) S. CINQUINI: *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, s. II, vol. V (1936), pagg. 169-190. *Nuovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n*. Ibidem, vol VI (1937), pagg. 191-209.

(8) S. CINQUINI, II° lavoro cit. in (7), pag. 201; per le definizioni relative agli integrali $I(C^{(n)})$ si veda il I° lavoro di S. CINQUINI cit. in (7).

δ) sia

$$\lim_{|y^{(n)}|\to\infty} \left| \frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| = \infty, \tag{1}$$

uniformemente *su tutto il campo* $A^{(n)}$;

ε) $K^{(n)}$ *è una classe completa di ordine n di curve* $C^{(n)}$: $y=y(x)$, *per ognuna delle quali esiste almeno una n-pla di valori* x_j $[j=0, 1, 2, \ldots, (n-1)]$, *distinti o no, appartenenti al rispettivo intervallo di definizione, i quali possono anche essere variabili con* $C^{(n)}$ *in* $K^{(n)}$, *e per i quali sono soddisfatte le seguenti disuguaglianze*

$$|y^{(j)}(x_j)| < L, \qquad (j=0, 1, 2, \ldots, n-1;\ y^{(0)} \equiv y), \tag{2}$$

con L numero fisso dipendente soltanto da $K^{(n)}$;

allora nella classe $K^{(n)}$ *esiste il minimo assoluto di* $I(C^{(n)})$ ».

Tale teorema è equivalente a un altro di CINQUINI ([9]) che estende quello di NAGUMO e che si può così enunciare:

« *Il precedente teorema continua a sussistere sostituendo alle condizioni γ) e δ) la*

$\bar{\delta}$) *esiste una funzione* $\Phi(z)$, *definita in* $(0, +\infty)$, *inferiormente limitata, tale che* $\Phi(z): z \to +\infty$, *per* $z \to +\infty$, *e per la quale si abbia in tutto il campo* $A^{(n)}$ *e per ogni valore finito di* $y^{(n)}$

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geq \Phi(|y^{(n)}|) \text{ ».}$$

Esaminiamo la condizione δ) del teorema di MC SHANE - CINQUINI.

Se il campo $A^{(n)}$ è limitato e se in ogni punto di $A^{(n)}$ sussiste la (1), ne segue che tale relazione è verificata *uniformemente* su tutto $A^{(n)}$ ([10]).

Se invece, come nel caso in questione, $A^{(n)}$ non è limitato, ciò non è più vero e l'imporre che la (1) sia verificata *uniformemente* rappresenta un vincolo effettivo.

Per questo S. CINQUINI ([11]) ha dato degli ulteriori teoremi in cui alla condizione δ) è sostituita l'altra più semplice:

δ') « *In ogni punto di* $A^{(n)}$ *è*

$$\lim_{|y^{(n)}|\to\infty} \left| \frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| = \infty \text{ »,}$$

con l'aggiunta di una ulteriore condizione variabile da teorema a teorema.

([9]) S. CINQUINI, II° lavoro cit. in ([7]), pag. 194.

([10]) Ciò segue immediatamente dal fatto che in tal caso la condizione di MC SHANE equivale a quella di NAGUMO (S. CINQUINI, I° lavoro cit. in ([7]), pag. 177).

([11]) S. CINQUINI, II° lavoro cit. in ([7]), pp. 202-206.

Le condizioni, che aggiunte alla δ') si possono sostituire alla δ), sono ad esempio :

δ_1') *Esistono due numeri finiti $\lambda > 0$ e N in modo che si abbia in tutto $A^{(n)}$ e per ogni valore di $y^{(n)}$*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant \lambda \,|\, y^{(n)} \,| + N,$$

oppure

δ_2') *Esiste un numero positivo λ e una funzione $\varphi(u)$, definita per $|\, u \,| \geqslant \lambda$, continua, non negativa, e tale che*

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \varphi(u)\, du = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{-\lambda} \varphi(u)\, du = +\infty,$$

in modo che si abbia, in tutti i punti $[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$ di $A^{(n)}$ con $|\, y^{(n-1)} \,| \geqslant \lambda$,

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant |\, y^{(n)} \,|\, \varphi(y^{(n-1)}),$$

per tutti gli $y^{(n)}$ che verificano la disuguaglianza

$$|\, y^{(n)} \,| \geqslant \frac{1}{\varphi(y^{(n-1)})}\,.$$

Oltre alle condizioni δ_1') e δ_2') S. CINQUINI ne ha date anche altre allo stesso scopo ([12]).

Più tardi B. MANIÀ ([13]), in un lavoro uscito postumo, ha dato un teorema di esistenza che si può così enunciare :

« *Nel teorema di* MC SHANE - CINQUINI *si può alla condizione δ) sostituire l'altra* :

δ'') *$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ è un polinomio di secondo grado nelle variabili $y, y', \ldots, y^{(n)}$ a coefficienti funzioni continue di x, e l'integrale $I(C^{(n)})$ è seminormale* ([14]) ».

Ne segue che il coefficiente $y^{(n)2}$ è sempre positivo e quindi in ogni punto di $A^{(n)}$ è

$$\lim_{|\, y^{(n)} \,| \to \infty} \left| \frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| = \infty.$$

([12]) S. CINQUINI, II° lavoro cit. in ([7]), corollari del teorema IV e teorema V, pp. 204-206.

([13]) B. MANIÀ : *Sopra una questione di compatibilità nel metodo variazionale.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, s. II, vol. IX, pag. 79-95. In tale lavoro il teorema è dimostrato anche per curve di un S_m.

([14]) $I(C^{(n)})$ è *quasi-regolare positivo* se in ogni punto di $A^{(n)}$ la $f_{y^{(n)}}$ è, come funzione della sola $y^{(n)}$, non decrescente ; esso è inoltre *seminormale* se in nessun punto di $A^{(n)}$ la $f_{y^{(n)}}$ è costante per tutti i valori di $y^{(n)}$. *Nel teorema di Mc Shane - Cinquini segue dalle a) e δ) che $I(C^{(n)})$ oltre che quasi-regolare positivo è anche seminormale.*

Dalla δ'') non si può dedurre che tale relazione è verificata uniformemente su tutto $A^{(n)}$. Basta considerare il semplice esempio

$$f \equiv (y^{(n)} - y)^2.$$

Si ha così che se la $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ ha la particolare forma di un polinomio di secondo grado in $y, y', \ldots, y^{(n)}$, si può, nel teorema di MC SHANE - CINQUINI, sostituire direttamente alla condizione δ) la meno restrittiva δ') [v. nota ([14])]. *Il teorema di* B. MANIÀ *pone quindi la questione di vedere se sia, oppure no, possibile di sostituire in ogni caso alla* δ) la δ'), *senza dover aggiungere ulteriori condizioni.* Di questo mi occupo nella presente Nota.

Si tratta in sostanza di provare che la sottoclasse $K_M^{(n)}$ di $K^{(n)}$ costituita dalle curve per cui è

$$I(C^{(n)}) \leqslant M,$$

appartiene tutta a una parte limitata del campo $A^{(n)}$.

Più in generale verrà qui dimostrato che, se sono soddisfatte le ipotesi α), β), γ) *ed* ε) *e se esiste un* $l > 0$ *tale che sia in ogni punto* $[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$ *di* $A^{(n)}$

$$\lim_{|y^{(n)}| \to \infty} \left| \frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| \geqslant l,$$

di conseguenza la classe $K_M^{(n)}$ *appartiene a una regione limitata di* $A^{(n)}$.

In particolare, per $l = +\infty$, si ha che *nel teorema di* MC SHANE - CINQUINI *si può sempre sostituire alla condizione* δ) *la meno restrittiva* δ'), *senza che si debbano introdurre ulteriori condizioni.* Ne segue:

Quando $A^{(n)}$ *è limitato i due teoremi di* MC SHANE - CINQUINI e NAGUMO - CINQUINI *coincidono; invece se* $A^{(n)}$ *è illimitato quello di* MC SHANE - CINQUINI [*in cui alla* δ) *sia sostituita la condizione* δ')] *è più ampio di quello di* NAGUMO - CINQUINI.

Esaminiamo ora l'ipotesi γ) del teorema di MC SHANE - CINQUINI.

Se il campo $A^{(n)}$ è limitato, tale condizione è immediata conseguenza della continuità della $f(x, y, \ldots, y^{(n)})$ e delle ipotesi β) e δ). Se $A^{(n)}$ non è limitato, S. CINQUINI ([15]) ha dimostrato che la condizione γ) è invece indipendente dalle β) e δ).

È però ancora legittimo il dubbio che la condizione γ) sia sovrabbondante.

Infatti, indipendentemente dalla γ), si può determinare un $q > 0$ tale che in tutti i punti di $A^{(n)}$ in cui è $|y^{(n)}| > q$ sia anche

$$f(x, y, \ldots, y^{(n)}) \geqslant 0,$$

ed in tali punti è così soddisfatta la γ).

([15]) S. CINQUINI, II° lavoro cit. in ([7]), pag. 202.

D'altra parte se per la curva $C^{(n)}: y=y(x)$ fosse sempre $|y^{(n)}| \leqslant q$, dalla condizione ε) seguirebbe che $C^{(n)}$ appartiene a una parte limitata del campo $A^{(n)}$; ma allora ne viene come conseguenza la γ).

Interessa quindi chiarire se la condizione γ) sia o no necessaria. Si mostra con un esempio (n. 4), che mancando tale condizione il teorema può non sussistere.

Non si può quindi togliere l'esplicita ipotesi γ) quando si passa dal caso del campo $A^{(n)}$ limitato a quello illimitato.

Si presenta ora la seguente questione:

È possibile dare un teorema che per i campi limitati si riduca a quello di NAGUMO - CINQUINI *e che, se il campo è illimitato, sia ancora equivalente al teorema di* MC SHANE - CINQUINI [*in cui alla δ) sia sostituita la δ'*)] ?

Ciò si può fare; basta nel teorema di NAGUMO - CINQUINI sostituire alla $\bar{\delta}$) la

$\bar{\delta}'$) *Ad ogni numero positivo Y si può fare corrispondere una funzione $\Phi_Y(z)$, definita in $(0, +\infty)$, tale che $\Phi_Y(z): z \to +\infty$, per $z \to +\infty$, e per la quale si abbia, in tutti i punti $[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$ di $A^{(n)}$ in cui è*

$$|y| + |y'| + \ldots + |y^{(n-1)}| \leqslant Y$$

e per ogni valore finito di $y^{(n)}$,

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant \Phi_Y(|y^{(n)}|);$$

esiste un numero N tale che, qualunque sia Y, si abbia

$$\Phi_Y(z) \geqslant N.$$

Si sono così ottenuti due teoremi, ancora fra loro equivalenti, che estendono quelli di NAGUMO - CINQUINI e MC SHANE - CINQUINI.

2. - Facciamo le seguenti ipotesi:

Il campo $A^{(n)}$ verifichi la condizione α); la funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ sia definita in ogni punto di $A^{(n)}$ e per ogni valore finito di $y^{(n)}$, continua insieme alla $f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ ed esistano due costanti $l > 0$ ed N tali che sia in ogni punto di $A^{(n)}$

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant N, \tag{3}$$

$$\lim_{|y^{(n)}| \to \infty} \left| \frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| \geqslant l. \tag{4}$$

Inoltre *l'integrale $I(C^{(n)})$ sia quasi regolare positivo* e *la classe $K^{(n)}$ soddisfi alla condizione ε).*

Sia

$$C^{(n)}: \quad y=y(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

una qualunque curva di $K^{(n)}$; è

$$I(C^{(n)}) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\, dx \geqslant 2hN,$$

per la (3) e perchè dalla α) segue che è

$$-h \leqslant a < b \leqslant h.$$

Il confine inferiore dei valori che assume $I(C^{(n)})$ in $K^{(n)}$ è allora finito; indichiamolo con i. Sia $K_1^{(n)}$ la sottoclasse delle curve di $K^{(n)}$ per cui è

$$I(C^{(n)}) \leqslant i+1.$$

Dimostriamo il seguente

LEMMA ([16]) : *Le curve*

$$C^{(n)}: \quad y = y(x)$$

della classe $K_1^{(n)}$ *sono tali che i punti*

$$[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)]$$

appartengono tutti a una regione limitata del campo $A^{(n)}$.

a) Indichiamo con $A_Y^{(n)}$ la parte limitata di $A^{(n)}$ per cui è

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} |\, y^{(r)} \,| \leqslant [2h]^{n-r-1} \cdot Y + L \sum\limits_{i=0}^{n-r-2} (2h)^i, & r = 0, 1, \ldots, n-2, \\ |\, y^{(n-1)} \,| \leqslant Y, \end{cases}$$

dove Y è un numero positivo prefissato e la costante L è data dalla (2).

Sia $[x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}]$ un punto di $A_Y^{(n)}$. Poichè $I(C^{(n)})$ è quasi regolare positivo,

$$f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

è una funzione non decrescente di $y^{(n)}$ e quindi, per la (4), è

$$\lim_{y^{(n)} \to +\infty} f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant l.$$

Si determini $q > 0$ in modo che se è $y^{(n)} \geqslant q$ sia

$$f(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) \geqslant \frac{2l}{3}\, y^{(n)},$$

$$f_{y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) \geqslant \frac{2l}{3}.$$

([16]) Per la prima parte della dimostrazione del lemma cfr. L. TONELLI, loc. cit. in ([6]), pag. 416-417 e per la seconda, pag. 414-415.

Per la continuità di f e $f_{y^{(n)}}$ si può determinare un intorno R di $[x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}]$ in modo che, se $[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$ è un punto qualunque di R che appartiene ad $A_Y^{(n)}$, sia pure

$$f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, q) \geqslant \frac{l}{2} q,$$

$$f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, q) \geqslant \frac{l}{2},$$

e quindi, per $y^{(n)} > q$,

$$f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant \frac{l}{2}.$$

Ne segue, in un punto di R e per $y^{(n)} > q$,

$$\frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) - f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, q)}{y^{(n)} - q} = f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \overline{y}^{(n)}) \geqslant \frac{l}{2},$$

essendo $\overline{y}^{(n)}$ un conveniente valore di $y^{(n)} > q$.

Ma allora è

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)} \geqslant \frac{l}{2} y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, q) - q\frac{l}{2} \geqslant \frac{l}{2} y^{(n)}.$$

È così provato che tutti i punti di R (che appartengono ad $A_Y^{(n)}$) godono della proprietà che per $y^{(n)} \geqslant q$ è

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant \frac{l}{2} y^{(n)}.$$

Si ricopra ogni punto di $A_Y^{(n)}$ con il corrispondente intorno R. Poichè $A_Y^{(n)}$ è chiuso, per il teorema di PINCHERLE-BOREL esistono un numero finito di intorni R tali che ogni punto di $A_Y^{(n)}$ è interno ad almeno uno di essi. Se φ_1 è il maggiore dei q relativi a questi R, ne segue che per $y^{(n)} \geqslant \varphi_1$ è, qualunque sia $[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$ in $A_Y^{(n)}$,

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant \frac{l}{2} y^{(n)}.$$

In modo analogo si prova che si può determinare un numero $\varphi_2 > 0$ tale che, se è

$$y^{(n)} \leqslant -\varphi_2,$$

è

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant -\frac{l}{2} y^{(n)}.$$

Se φ è il maggiore fra φ_1 e φ_2 è, per $|y^{(n)}| \geqslant \varphi$,

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant \frac{l}{2} |y^{(n)}|.$$

Conveniamo di prendere per φ il numero più piccolo possibile.

Ad ogni numero positivo Y corrisponde un campo $A_Y^{(n)}$ e a questo un numero φ, che è così funzione di Y,

$$\varphi(Y).$$

Dal modo in cui si è costruita tale funzione è finita, positiva o nulla e non decrescente.

Si ha così che se è

$$|\, y^{(n)} \,| \geqslant \varphi\,(|\, y^{(n-1)} \,|)$$

è

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) \geqslant \frac{l}{2}\,|\, y^{(n)} \,|,$$

purchè sia anche

$$|\, y^{(r)} \,| \leqslant (2h)^{n-r-1}\,|\, y^{(n-1)} \,| + L \sum_{i=0}^{n-r-2} (2h)^i, \qquad (r=0, 1, 2, \ldots, n-2).$$

b) Sia

$$C^{(n)}: \quad y = y(x), \qquad -h \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant h,$$

una qualunque curva di $K_1^{(n)}$; per la (2) esistono n punti $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ tali che

$$a \leqslant x_j \leqslant b, \qquad (j=0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

ed è

$$|\, y^{(j)}(x_j) \,| < L, \qquad (y_0^{(n)} \equiv y).$$

Sia x un qualunque punto di (a, b) con $x \geqslant x_{n-1}$. Si ottiene

$$y^{(n-1)}(x) = y^{(n-1)}(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x} y^{(n)}(x)\, dx,$$

$$|\, y^{(n-1)}(x) \,| < L + \int_{x_{n-1}}^{x} |\, y^{(n)}(x) \,|\, dx. \tag{6}$$

Definiamo la funzione $z(x)$ nel modo seguente sull'intervallo (x_{n-1}, b):

Per $x = x_{n-1}$ è $z(x_{n-1}) = |\, y^{(n-1)}(x_{n-1}) \,|$;

per $x_{n-1} < \bar{x} \leqslant b$ si consideri il massimo valore della funzione continua $|\, y^{(n-1)}(x) \,|$ nell'intervallo $(x_{n-1}, \bar{x})$; si ponga

$$z(\bar{x}) = \max\, |\, y^{(n-1)}(x) \,| \quad \text{su} \quad (x_{n-1}, \bar{x}).$$

La funzione $z(x)$ è così definita, continua, positiva o nulla e non decrescente per x in (x_{n-1}, b).

Ciò premesso, dividiamo i punti dell'intervallo (x_{n-1}, x) in due insiemi E_1 ed E_2. Un punto x starà nell'insieme E_1 se è

$$|\, y^{(n)}(x) \,| < \varphi\,[z(x)].$$

Se invece è
$$| y^{(n)}(x) | \geq \varphi [z(x)],$$
il punto x apparterrà all'insieme E_2.

Dalla (6) segue

(7) $$| y^{(n-1)}(x) | < L + \int_{x_{n-1}}^{x} | y^{(n)}(x) | dx = L + \int_{E_1} | y^{(n)}(x) | dx + \int_{E_2} | y^{(n)}(x) | dx \leq$$
$$\leq L + \int_{E_1} \varphi(z(x))\, dx + \int_{E_2} | (y^{(n)}(x) | dx .$$

Nei punti di E_2, tenuto conto della (2), è:
$$| y^{(n-1)}(x) | \leq z(x)$$
$$| y^{(n-2)}(x) | \leq 2h\, z(x) + L$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$| y(x) | \leq (2h)^{n-1} z(x) + L \sum_{i=0}^{n-2} (2h)^i ;$$

pertanto i punti di $C^{(n)}$, la cui x sta in E_2, appartengono al campo $A^{(n)}_{z(x}$ definito dalle limitazioni (5).

Poichè in un punto di E_2 è
$$| y^{(n)}_{(x)} | \geq \varphi [z(x)],$$
è di conseguenza
$$f(x, y(x), y'(x),\ldots\ldots, y^{(n)}(x)) \geq \frac{l}{2} | y^{(n)}(x) |,$$
$$\int_{E_2} | y^{(n)}(x) | dx \leq \frac{2}{l} \int_{E_2} f(x, y(x), y'(x),\ldots\ldots, y^{(n)}(x))\, dx \leq$$
$$\leq \frac{2}{l} [I(C^{(n)}) + 2h | N |] \leq \frac{2}{l} [i + 1 + 2h | N |].$$

Dalla (7), posto $L + \frac{2}{l} [i + 1 + 2h | N |] = H > L$, si ottiene
$$| y^{(n-1)}(x) | < \int_{x_{n-1}}^{x} \varphi [z(x)]\, dx + H.$$

Osserviamo ora che è anche

(8) $$z(x) < \int_{x_{n-1}}^{x} \varphi [z(x)]\, dx + H.$$

Dalla definizione della funzione $z(x)$ segue
$$z(x) = | y^{(n-1)}(x') |,$$

con $x_{n-1} \leqslant x' \leqslant x$; è quindi

$$z(x) = |\, y^{(n-1)}(x') \,| < \int_{x_{n-1}}^{x'} \varphi\,[z(x)]\, dx + H \leqslant \int_{x_{n-1}}^{x} \varphi\,[z(x)]\, dx + H.$$

Consideriamo la funzione $z = z_1(x)$ che soddisfa all'equazione differenziale a variabili separate

$$z_1'(x) = \varphi(z_1),$$

con la condizione

$$z_1(x_{n-1}) = H.$$

Dico che in tutto (x_{n-1}, b) è verificata la disuguaglianza

(9) $$0 \leqslant z(x) < z_1(x).$$

Infatti nel punto x_{n-1} è

$$0 \leqslant z(x_{n-1}) < H = z_1(x_{n-1})$$

e quindi c'è tutto un intorno destro di x_{n-1} in cui è verificata la (9). Sia x_0 il primo punto di (x_{n-1}, b) in cui è

$$z(x_0) = z_1(x_0).$$

Si avrebbe

(10) $$z(x_0) = z_1(x_0) = \int_{x_{n-1}}^{x_0} \varphi(z_1)\, dx + H \geqslant \int_{x_{n-1}}^{x_0} \varphi(z)\, dx + H,$$

perchè nell'intervallo (x_{n-1}, x_0) è $z \leqslant z_1$ e la funzione $\varphi(z)$ è non decrescente. Ma la (10) è in contraddizione con la (8) a cui soddisfa la $z(x)$. Sussiste allora la (9) ed è

$$0 \leqslant z(x) < z_1(x) \leqslant z_1(b) \leqslant z_1(h) = D_1 .$$

È così

$$|\, y^{(n-1)}(x) \,| \leqslant z(x) \leqslant D_1 ,$$

dove D_1 è un numero indipendente dalla curva $C^{(n)}$: $y = y(x)$.

In modo analogo si determina un D_2, indipendente dalla curva $C^{(n)}$: $y = y(x)$, tale che, se $-h \leqslant a \leqslant x \leqslant x_{n-1}$, sia

$$|\, y^{(n-1)}(x) \,| \leqslant D_2 .$$

Se D è il maggiore fra D_1 e D_2 risulta in tutto (a, b)

(11) $$|\, y^{(n-1)}(x) \,| \leqslant D.$$

Segue dalla condizione ε) (v. (2)) che è

$$\left\{\begin{array}{l} |\, y^{(n-2)}(x) \,| \leqslant 2hD + L \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\, y(x) \,| \leqslant (2h)^{n-1}D + L \sum_{i=0}^{n-2} (2h)^i. \end{array}\right. \tag{12}$$

Tutte le curve della classe $K_1^{(n)}$ appartengono alla parte di $A^{(n)}$ limitata dalle (11) e (12) ed il lemma è completamente dimostrato.

3. - Passiamo ora a considerare il teorema di MC SHANE - CINQUINI e *supponiamo di sostituire alla condizione δ) la meno restrittiva δ').* Per il lemma premesso le curve della classe $K^{(n)}$ appartengono a una parte limitata di $A^{(n)}$, che indicheremo con $\overline{A}^{(n)}$. Possiamo pertanto ridurci a considerare il campo $\overline{A}^{(n)}$ e ricercare il minimo di $I(C^{(n)})$ nella classe $K_1^{(n)}$, tutta contenuta in $\overline{A}^{(n)}$. Tale minimo, se esiste, coincide con quello di $I(C^{(n)})$ in $K^{(n)}$.

Ma, per il teorema di esistenza di MC SHANE - CINQUINI [17] in campi limitati, basta supporre, invece della δ), che in ogni punto di $\overline{A}^{(n)}$ sia

$$\lim_{|y^{(n)}| \to \infty} \left| \frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| = \infty .$$

L'integrale $I(C^{(n)})$ ammette quindi minimo in $K_1^{(n)}$, e di conseguenza in $K^{(n)}$, *anche se alla condizione δ) si sostituisce la δ').*

Naturalmente il teorema così esteso non equivale più a quello di NAGUMO - CINQUINI nel quale la tendenza all'infinito di

$$\left| \frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right|,$$

per $|\, y^{(n)} \,| \to \infty$ avviene in modo uniforme rispetto al campo $A^{(n)}$, essendo tale espressione maggiorata da una funzione della sola $|\, y^{(n)} \,|$, che tende all'infinito per $|\, y^{(n)} \,| \to \infty$.

4. - Mostriamo, con un esempio, che nel teorema di MC SHANE - CINQUINI ora esteso non si può togliere la condizione γ). Si ponga

$$f(y, y') = y'^2 - y^2,$$

e per campo A si prenda la striscia del piano (x, y) definita da

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}.$$

---

[17] S. CINQUINI, I° lavoro cit. in [7], pag. 177.

Si consideri l'integrale

$$I(y)=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(y'^2-y^2)\,dx,$$

e se ne cerchi il minimo nella classe K delle curve assolutamente continue, di equazione $y=y(x)$ $\left(0\leqslant x\leqslant \frac{3\pi}{4}\right)$ e per cui è $y(0)=0$ e la $y'^2(x)-y^2(x)$ risulti integrabile in $\left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$.

Sono ovviamente soddisfatte le condizioni α), β), δ') ed ε). Non lo è invece la γ).

Dimostriamo che $I(y)$ non ammette minimo in K. Si consideri infatti la successione di curve $y=y_n(x)$ di K così definite:

$$y_n(x)=n \text{ sen } x.$$

È

$$I(y_n)=n^2\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\{\cos^2 x-\text{sen}^2 x\}\,dx=n^2 \text{ sen }\frac{3\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{n^2}{2},$$

e

$$\lim_{n\to\infty} I(y_n)=-\infty.$$

5. - Il teorema di MC SHANE - CINQUINI, quando si sostituisca alla δ) la più larga condizione δ'), non è più equivalente a quello di NAGUMO - CINQUINI, ma è più ampio.

Interessa pertanto allargare anche questa seconda proposizione in modo da ristabilire l'equivalenza con l'altra. A tale scopo dimostriamo il seguente

TEOREMA: *Se sono verificate le condizioni* α), β), *ed* ε) *del teorema di* NAGUMO - CINQUINI (v. n. 1); *se inoltre*:

$\bar{\delta}'$) *ad ogni numero positivo* Y *si può fare corrispondere una funzione* $\Phi_Y(z)$, *definita in* $(0, +\infty)$, *tale che* $\Phi_Y(z): z\to+\infty$, *per* $z\to+\infty$, *e per la quale si abbia, in tutti i punti* $[x, y, y',...., y^{(n-1)}]$ *di* $A^{(n)}$ *in cui è*

$$|y|+|y'|+....+|y^{(n-1)}|\leqslant Y$$

e per ogni valore finito di $y^{(n)}$,

$$f(x, y, y',...., y^{(n)})\geqslant \Phi_Y(|y^{(n)}|);$$

esista un numero N *tale che, qualunque sia* Y, *si abbia*

$$\Phi_Y(z)\geqslant N;$$

allora nella classe $k^{(n)}$ *esiste il minimo assoluto di* $I(C_n)$.

Se esiste una funzione $\Phi(z)$, definita in $(0, +\infty)$, inferiormente limitata, tale che $\Phi(z) : z \to +\infty$ per $z \to +\infty$ ed inoltre, qualunque sia Y, sia sempre

$$\Phi_Y(z) \geqslant \Phi(z),$$

allora il teorema ora enunciato si riduce a quello di NAGUMO - CINQUINI per campi illimitati.

Se $A^{(n)}$ è limitato si può determinare Y_1 così grande che sia sempre in $A^{(n)}$

$$|y| + |y'| + ... + |y^{(n)}| \leqslant Y_1 ;$$

posto allora $\Phi(z) = \Phi_{Y_1}(z)$, si ottiene il teorema di NAGUMO - CINQUINI per i campi limitati.

Per dimostrare questa proposizione basta osservare che *dalla condizione* $\overline{\delta}'$) *seguono le* γ) *e* δ') del teorema di MC SHANE - CINQUINI esteso nel n. 3.

Quanto alla γ) si ha

$$f(x, y, y',...., y^{(n)}) \geqslant \Phi_Y^{(|y^{(n)}|)} \geqslant N,$$

qualunque sia Y.

Consideriamo ora un *qualunque* punto $[x_0, y_0, y_0',...., y_0^{(n-1)}]$ di $A^{(n)}$. Posto

$$|y_0| + |y_0'| + ... + |y_0^{(n-1)}| = Y_0 ,$$

è

$$\lim_{|y^{(n)}| \to \infty} \left| \frac{f(x_0, y_0, y_0',...., y_0^{(n-1)}, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| \geqslant \lim_{|y^{(n)}| \to \infty} \frac{\Phi_{Y_0}^{(|y^{(n)}|)}}{|y^{(n)}|} = +\infty ,$$

ed è così verificata la δ').

Il teorema è così dimostrato.

Ma *viceversa dalle* γ) *e* δ') (e se sono soddisfatte le α), β) ed ε)) *segue la* $\overline{\delta}'$).

Infatti, si fissi Y; nel campo limitato $A_Y^{(n)}$ costituito dai punti di $A^{(n)}$ in cui è

$$|y| + |y'| + ... + |y^{(n-1)}| \leqslant Y,$$

il teorema di MC SHANE - CINQUINI coincide con quello di NAGUMO - CINQUINI e quindi si può trovare una funzione $\Phi_Y(z)$, definita in $(0, +\infty)$, con $\Phi_Y(z) : z \to +\infty$, per $z \to +\infty$, e tale che, in tutti i punti di $A_Y^{(n)}$ e per ogni valore finito di $y^{(n)}$, si abbia

$$f(x, y, y',...., y^{(n)}) \geqslant \Phi_Y(|y^{(n)}|).$$

Inoltre si può sempre supporre ([18]) che $\Phi_Y(z)$ coincida col minimo fra i valori assunti nel campo limitato e chiuso $A_Y^{(n)}$ dalle funzioni continue

$$f(x, y, y',...., y^{(n-1)}, z) \quad \text{e} \quad f(x, y, y',...., y^{(n-1)}, -z) ;$$

([18]) V. L. TONELLI, loc. cit. in ([6]), pag. 416-417.

quindi dalla γ) segue, qualunque sia Y,

$$\Phi_Y(z) \geqslant N.$$

È così provata l'equivalenza di questa nuova proposizione coll'estensione del teorema di MC SHANE - CINQUINI data nel n. 3.

OSSERVAZIONE : Nell'estensione ora data del teorema di NAGUMO - CINQUINI si può sostituire alla condizione che esista un N tale che sia

$$\Phi_Y(x) \geqslant N,$$

qualunque sia Y, l'altra :

« *esiste un numero finito* N *tale che in tutti i punti di* $A^{(n)}$ *e per ogni valore finito di* $y^{(n)}$ *sia*

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) \geqslant N \text{ ».}$$

Ciò segue immediatamente dal ragionamennto fatto per dimosrare l'equivalenza delle estensioni qui date dei teoremi di NAGUMO - CINQUINI e MC SHANE - CINQUINI, tenendo sopratutto presente quanto si è richiamato nella nota ([18]).

6. - Le proposizioni date nel presente lavoro continuano a sussistere anche se l'integrale $I(C^{(n)})$ invece che da una curva piana dipende da una curva appartenente a uno spazio S_m ad $m > 2$ dimensioni.

Le proposizioni di NAGUMO - CINQUINI e MC SHANE - CINQUINI così estese sono ancora fra loro equivalenti (v. nota ([6])).