ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Sopra un'osservazione del signor Scorza-Dragoni su un problema per le equazioni differenziali ordinarie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 11, nº 3-4 (1942), p. 217-221

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_3-4_217_0>

SOPRA UN' OSSERVAZIONE DEL SIGNOR SCORZA - DRAGONI SU UN PROBLEMA PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

di SILVIO CINQUINI (Pavia).

Le seguenti righe si propongono di rispondere in modo esauriente ad alcune affermazioni contenute in una Nota di G. SCORZA - DRAGONI (1) comparsa in questi giorni, e di porre così in evidenza che, tenuto conto della dimostrazione del prof. BRUSOTTI (2) che forma oggetto della Nota che precede la presente, ed al quale ci è grato rivolgere i nostri più vivi ringraziamenti per la Sua collaborazione, tutti i teoremi esistenziali per i problemi di valori al contorno relativi ad equazioni differenziali ordinarie e a sistemi di tali equazioni (di ordine qualunque) si possono stabilire evitando completamente l'uso della topologia.

Inoltre, si fa presente che anche il criterio, a cui lo SCORZA - DRAGONI dedica la Nota sopracitata, si può dedurre, come è ben naturale, in poche parole da un caso particolarissimo di un nostro teorema (3), citato anche dallo SCORZA - DRAGONI (4).

1\. - In una nostra Memoria (5) abbiamo esteso ai problemi di valori al contorno relativi ad equazioni differenziali di ordine n $(n \geqslant 2)$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

il procedimento da noi già seguito per $n=2$, e basato sull'approssimazione della funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ mediante una successione di funzioni lipschitziane rispetto alle variabili $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. In tale lavoro, al solo scopo di non usu-

---

(1) G. SCORZA - DRAGONI: *Un'osservazione su un problema per le equazioni differenziali ordinarie.* (Atti R. Istituto Veneto, T. 101 (1941-42), pp. 203-212).

(2) L. BRUSOTTI: *Dimostrazione di un lemma algebrico utile in questioni di analisi.* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. XI (1942) questo fascicolo), n. 2.

(3) S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n.* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. IX (1940), pp. 61-77), n. 1.

(4) Vedi luogo cit. in (1), nota (5) a pag. 204.

(5) Luogo cit. in (3).

fruire di un risultato stabilito da BIRKHOFF e KELLOGG (6) mediante considerazioni di analisi funzionale, abbiamo accennato sommariamente in una nota a piè di pagina (7) in qual modo si possa estendere ai problemi in questione il noto ragionamento elementare con cui si stabilisce, in condizioni particolarmente semplici, l'esistenza di almeno un integrale di un'equazione differenziale del secondo ordine congiungente due punti prefissati.

Come abbiamo già avuto occasione di rilevare (8), il contenuto di tale nota a piè di pagina, il quale è apparso incompleto (9), si illumina completamente tenendo presente un'osservazione sugli zeri comuni a m funzioni continue di m variabili. Questa nostra osservazione che avevamo comunicata a C. MIRANDA, il quale (10) l'ha trovata equivalente al noto teorema di BROUWER sulle trasformazioni continue, può senz'altro enunciarsi nei seguenti termini (11):

Se $\Phi_i(x_1, x_2, ..., x_m)$, $(i=1, 2, ..., m)$ sono m funzioni continue nel rettangolo ad m dimensioni $R \equiv [a_i \leqslant x_i \leqslant b_i;\ i=1, 2, ..., m;\ a_i < b_i]$ soddisfacenti alle disuguaglianze

$$\begin{cases} \Phi_i(x_1, ..., x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, ..., x_m) > 0, \\ \Phi_i(x_1, ..., x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, ..., x_m) < 0, \end{cases} \qquad (i=1, 2, ..., m),$$

esiste almeno un punto interno a R, nel quale le m funzioni $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_m$ si annullano simultaneamente.

Abbiamo inoltre rilevato (12) che *tale nostra osservazione è un'immediata conseguenza del caso particolare in cui le Φ_i, $(i=1, 2, ..., m)$ siano funzioni razionali intere*, caso nel quale ritenevamo la nostra affermazione come già nota.

Ora, presa conoscenza di quanto scrive a tal riguardo, in forma un po' ambigua, il Signor SCORZA-DRAGONI (13), abbiamo chiesto l'autorevole parere del

---

(6) G. D. BIRKHOFF e O. D. KELLOGG: *Invariant points in function space*. (Trans. of the American Math. Society, Vol. 23 (1922), pp. 96-115), n. 6, p. 109.

(7) Vedi luogo cit. in (3), nota (10) a piè delle pp. 66-67.

(8) S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie*. (Rend. Seminario Matematico e Fisico di Milano, Vol. XIV (1940)), n. 8, *a*).

(9) Vedi in Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (Vol. 22, p. 339) la recensione di C. MIRANDA. La presente Nota risponde, al tempo stesso, anche a tale recensione.

(10) C. MIRANDA: *Un'osservazione su un teorema di Brouwer*. (Boll. Unione Matematica Italiana, A. III (1940), pp. 5-7).

(11) Cfr. luogo cit. in (8) ed anche: S. CINQUINI: *Sopra il problema di Nicoletti per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*. (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. X (1941), pp. 127-138), nota (8) a piè di pag. 134.

(12) Luogo cit. in (8), nota (12) a piè delle pp. 168-169.

(13) Dice fra l'altro lo SCORZA-DRAGONI nel luogo cit. in (4): « CINQUINI ha osservato altrove, e la cosa è banale, che è sufficiente stabilire questo fatto quando le funzioni G_i sono dei polinomi, nei riguardi del qual caso egli si limita a dire di ritenerlo noto ».

collega prof. L. BRUSOTTI su tale questione algebrica. Quest' ultimo Autore non ha trovato difficoltà a redigere la Nota già citata. Risulta ben evidente che la dimostrazione del BRUSOTTI usufruisce in modo essenziale del fatto che le funzioni in questione siano razionali intere, e che essa è semplice ed elementare proprio in virtù di questa ipotesi. D' altra parte la nostra affermazione (in merito a cui il prof. SCORZA-DRAGONI sentenzia : « e la cosa è banale ») è contenuta in una nota a piè di pagina del manoscritto di una conferenza [vedi luogo cit. in ([12])] rivolta ad un pubblico di cui fanno parte molti ingegneri : ora di fronte a tale uditorio l'oratore può riuscire ben più efficace, se non trascura considerazioni anche elementari ma utili nella pratica (e quindi « banali » soltanto per il Signor SCORZA-DRAGONI), che se si abbandona ad una astrusa disquisizione sugli elementi uniti degli spazi funzionali !

Ma c'è di più ; lo SCORZA-DRAGONI dice inoltre : « .... Questo criterio è stato esteso da CINQUINI (pel caso di n qualunque) e da ZWIRNER ([14]) (pel caso di $n=3$), con procedimenti di altra natura. Ma in seguito ZWIRNER stesso ha riconosciuto ([15]) che tutte queste estensioni sono anch' esse conseguenze dell'osservazione di CACCIOPPOLI, ecc. ». In merito a questa affermazione ci sono da fare, innanzi tutto, alcuni rilievi. Lo SCORZA-DRAGONI non aveva mai rilevato, per proprio conto, in circa due anni ([16]) ciò che lo ZWIRNER ha riconosciuto. Lo ZWIRNER ha pubblicato la Nota da noi citata in ([14]) e apparsa alcuni mesi dopo la nostra Memoria citata in ([3]) senza che il prof. SCORZA-DRAGONI, sotto la cui guida lo ZWIRNER lavora, si accorgesse che anche il risultato conseguito dallo ZWIRNER era « conseguenza » dell'osservazione di CACCIOPPOLI. Lo SCORZA-DRAGONI pubblica ora una Nota [da noi citata in ([1])] di dieci pagine per stabilire un criterio che, come risulta dal n. 2 della presente Nota, si deduce in poche parole proprio da un caso particolarissimo del nostro teorema cui si riferisce lo SCORZA-DRAGONI : pertanto il recente risultato del Signor SCORZA-DRAGONI viene ad essere, esso pure, una « conseguenza » dell'osservazione di CACCIOPPOLI ; e a tal riguardo è bene ricordare che tale risultato dello SCORZA-DRAGONI è *effettivamente* un'immediata conseguenza anche del teorema di BIRKHOFF e KELLOGG da noi citato in ([6]).

([14]) G. ZWIRNER : *Problemi al contorno per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine : teoremi di esistenza e di unicità.* (Atti R. Istituto Veneto, T. 99 (1939-40), pp. 263-275), n. 2. Tale Nota è stata presentata nella seduta del 17 dicembre 1939 e licenziata per la stampa il 1° marzo 1940.

([15]) G. ZWIRNER : *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie d'ordine n.* (Rend. Seminario Matematico di Padova, A. XII (1941), pp. 114-122).

([16]) I risultati contenuti nella nostra Memoria citata in ([3]) sono stati comunicati nel fascicolo novembre-dicembre 1939 del Boll. Unione Matematica Italiana, e la Memoria stessa è apparsa nel gennaio 1940, mentre la Nota dello ZWIRNER citata in ([15]) è pervenuta in redazione il 10 ottobre 1941.

Ma è inutile dilungarci ([17]), perchè bastano poche parole, *le quali mettono le cose a posto in modo chiaro e definitivo*, per rispondere contemporaneamente sia all'affermazione dello SCORZA-DRAGONI riportata poco sopra, sia alla seguente altra dello stesso autore: « In definitiva, per il momento anche CINQUINI rinuncia, implicitamente, ad evitare l'uso della topologia ».

Infatti, tenuta presente la dimostrazione del BRUSOTTI, *è pacifico che per stabilire tutti i teoremi esistenziali per i problemi di valori al contorno* (relativi a equazioni differenziali ordinarie ed anche a sistemi di tali equazioni), dovuti non solo a noi ma anche ad altri autori ([18]), *non c'è alcun bisogno di ricorrere alle considerazioni di analisi funzionale dovute a* BIRKHOFF *e* KELLOGG (e riprese otto anni dopo da R. CACCIOPPOLI, il quale ha dovuto poi riconoscere la priorità degli autori citati), *ma nemmeno di usufruire della topologia degli spazi ad un numero finito di dimensioni*: basta seguire il procedimento elementare che abbiamo sviluppato nei nostri lavori e che trae il suo spunto dalle note ricerche di C. SEVERINI. Ma ciò è questione di gusti: a noi piace dare il nostro modesto contributo a porre in luce i metodi della Scuola di CESARE ARZELÀ; invece, evidentemente, il Signor SCORZA-DRAGONI preferisce insistere nel valorizzare le idee di BIRKHOFF e KELLOGG!

Non ci indugiamo ulteriormente a replicare allo SCORZA-DRAGONI ([19]), ma vogliamo far presente che, *tenuto conto della nostra osservazione e del risultato del* MIRANDA, *la Nota del* BRUSOTTI *fornisce una dimostrazione elementare del teorema di* BROUWER.

([17]) Mettiamo ancora in rilievo che lo ZWIRNER impiega una Nota di nove pagine [da noi citata in ([15])] per mostrare che il nostro teorema citato in ([3]) è « conseguenza » dell'osservazione di CACCIOPPOLI: è dunque ben evidente che, se pur i teoremi da noi stabiliti per via elementare si possono ritrovare anche con mezzi più elevati (ma l'interessante sarebbe proprio il viceversa!), ciò non è una semplice « conseguenza », come il prof. SCORZA-DRAGONI va sentenziando con molta facilità e con irriducibile insistenza, ma richiede la pubblicazione di lavori che riempiono parecchie pagine.

([18]) G. ZWIRNER in una Nota [*Un criterio d'esistenza relativo a un problema al contorno per un'equazione differenziale ordinaria d'ordine n.* (Rend. R. Accademia d'Italia, Vol. III (1941), pp. 217-222)], nella quale dà un'estensione di un nostro precedente teorema dice (p. 220): « tengo però a far rilevare esplicitamente che i ragionamenti svolti dal CINQUINI sarebbero sufficienti anch'essi a stabilire il criterio, ecc. ».

([19]) Ad altra sua affermazione [« I teoremi che CINQUINI dà nell'ultima delle sue Memorie citate, sono tutti conseguenze della proposizione di CACCIOPPOLI ricordata nella nota ([3]); cfr. G. ZWIRNER: *Problemi di valori al contorno per sistemi di equazioni differenziali ordinarie.* (Atti R. Istituto Veneto, in corso di stampa) »] risponde già una nostra recente Nota [*Sopra una recensione del Signor Scorza-Dragoni* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. XI (1942), pp. 105-106)]; ci limitiamo qui a soggiungere quanto abbiamo posto in evidenza in ([17]).

2. - Il criterio che forma oggetto della Nota dello SCORZA-DRAGONI citata in [1] si può precisare nei seguenti termini [20]:

Sia $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ una funzione definita per ogni x di (a, b) e per ogni n-pla $y, y', ..., y^{(n-1)}$ di numeri reali, la quale, per ogni x fissato, risulti continua rispetto a $(y, y', ..., y^{(n-1)})$ e, per ogni n-pla $(y, y', ..., y^{(n-1)})$ fissata, risulti quasi continua rispetto a x. Supponiamo che esista una costante $H > 0$ tale che, per

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad |y| \leqslant \frac{(b-a)^n}{n!} H, \quad |y'| \leqslant \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} H, ..., \quad |y^{(n-1)}| \leqslant (b-a) H,$$

risulti

$$|f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})| \leqslant H.$$

Allora, presi comunque n valori $x_1, x_2, ..., x_n$ con $a \leqslant x_1 < x_2 < .... < x_n \leqslant b$, l'equazione

$$y^{(n-1)}(x) = y^{(n-1)}(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})\, dx$$

ammette almeno una soluzione $y = y_0(x)$, $(x_1 \leqslant x \leqslant x_n)$ con $y_0(x)$ assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini e soddisfacente alle condizioni

$$y_0(x_i) = 0, \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Per la dimostrazione basta definire, con un noto artificio [21], una funzione $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ ponendo:

$$g = f, \text{ ove è } |f| \leqslant H; \qquad g = H, \text{ ove è } f > H; \qquad g = -H, \text{ ove è } f < -H.$$

Allora all'equazione

$$y^{(n-1)}(x) = y^{(n-1)}(x_1) + \int_{x_1}^{x} g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})\, dx$$

si può applicare un caso particolarissimo del nostro teorema citato in [3], e in modo evidente ne segue l'asserto.

---

[20] Nella « Posizione del problema » (n. 1, p. 205) lo SCORZA-DRAGONI suppone che in ogni porzione limitata la funzione f sia in modulo minore di una funzione della sola x integrabile, ma questa ipotesi, almeno per noi, è del tutto superflua, mentre lo SCORZA-DRAGONI non dice, in modo esplicito, di abbandonarla.

[21] Tale artificio è indicato anche dal prof. SCORZA-DRAGONI (n. 4, Osservazione II, p. 211), ma in modo inesatto, perchè lo SCORZA-DRAGONI pone: $g = f$, là dove $|f| \leqslant H$; $g = H$, là dove $|f| > H$.