

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

FRANCO DE SIMONI

Sul moto dei corpi rigidi con sospensione quasi-baricentrica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 11, n° 3-4 (1942), p. 197-210

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_3-4_197_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUL MOTO DEI CORPI RIGIDI CON SOSPENSIONE QUASI-BARICENTRICA

di FRANCO DE SIMONI (Livorno).

SUNTO. - L'A. studia nuovi casi limiti di integrazione di moti intorno ad un punto fisso, da lui denominati *sospensioni quasi-baricentriche*, con un nuovo metodo di integrazioni successive. Viene considerato il caso particolare in cui il momento d'impulso è parallelo alla risultante delle forze applicate, supposta costante.

§ 1. - Ipotesi per la sospensione quasi-baricentrica.

1. - Supponiamo di avere un corpo rigido mobile intorno ad un punto fisso O : posto che $G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ sia la terna principale centrale d'inerzia, scegliamo come riferimento mobile col corpo la terna $O(\xi, \eta, \zeta)$ con gli assi paralleli e orientati come quelli della terna precedente.

Fatta inoltre l'ipotesi che le forze applicate al corpo ammettano un'unica risultante \mathbf{F} , costante, applicata al baricentro G , sceglieremo come terna fissa di riferimento la $O(x, y, z)$ avente l'asse z parallelo alla linea d'azione della risultante \mathbf{F} , ma di verso opposto (fig. 1).

Assunte come variabili lagrangiane i tre angoli di EULERO, la funzione potenziale ha la forma

$$V = -F(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3),$$

dove (a, b, c) sono le coordinate di G rispetto ad $O(\xi, \eta, \zeta)$ e $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni direttori dell'asse z rispetto alla predetta terna, cioè:

$$(1) \quad \gamma_1 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta.$$

Siccome in tutte le considerazioni che seguono e per la postulazione delle ipotesi di sospensione quasi-baricentrica ha particolare interesse la distanza OG ,

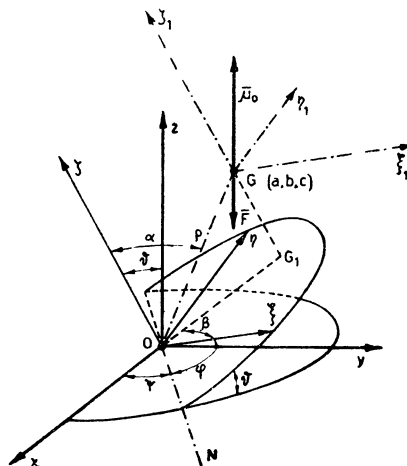


Fig. 1.

è bene assumere un riferimento polare sussidiario il cui polo sia O , asse polare $O\zeta$, semipiano polare $\xi\zeta$ (vedi fig. 1). Indicando allora con β ed α longitudine e colatitudine rispettivamente del punto G , si ha:

$$(2) \quad a = \varrho \operatorname{sen} \alpha \cos \beta, \quad b = \varrho \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad c = \varrho \cos \alpha,$$

con $\varrho = OG$. La funzione potenziale diventa allora:

$$V = -F\varrho(\gamma_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \gamma_2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \gamma_3 \cos \alpha),$$

nella quale espressione è evidente la dipendenza lineare di V da ϱ .

2. - Cerchiamo l'equazione dell'ellissoide d'inerzia relativo al centro di sospensione O , supponendo che quello principale centrale d'inerzia riferito agli assi (ξ_1, η_1, ζ_1) abbia l'equazione:

$$(3) \quad A\xi_1^2 + B\eta_1^2 + C\zeta_1^2 = 1.$$

Con considerazioni semplici si ha che i momenti d'inerzia relativi alla terna $O(\xi, \eta, \zeta)$ sono dati da

$$\begin{aligned} A' &= A + M\varrho^2(\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \alpha) = A + M\sigma_1 \varrho^2 \\ B' &= B + M\varrho^2(\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha) = B + M\sigma_2 \varrho^2 \\ C' &= C + M\varrho^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = C + M\sigma_3 \varrho^2, \end{aligned}$$

dove M è la massa del corpo in questione e con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ si sono indicate le quantità in parentesi, indipendenti da ϱ , essenzialmente positive.

I momenti misti d'inerzia risultano analogamente dati dalle espressioni

$$\begin{aligned} D' &= M\varrho^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = M\sigma_4 \varrho^2, \\ E' &= M\varrho^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \beta = M\sigma_5 \varrho^2, \\ F' &= M\varrho^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \beta = M\sigma_6 \varrho^2. \end{aligned}$$

Pertanto l'ellissoide d'inerzia relativo ad O , rispetto agli assi (ξ, η, ζ) ha per equazione:

$$(4) \quad (A + M\varrho^2 \sigma_1)\xi^2 + (B + M\varrho^2 \sigma_2)\eta^2 + (C + M\varrho^2 \sigma_3)\zeta^2 - 2M\varrho^2(\sigma_4 \eta \zeta + \sigma_5 \xi \zeta + \sigma_6 \xi \eta) = 1.$$

3. - Se ω è la velocità angolare istantanea e p, q, r le sue componenti secondo la terna mobile, la forza viva T , del sistema, è data da:

$$2T = A'p^2 + B'q^2 + C'r^2 - 2D'qr - 2E'pr - 2F'pq,$$

e quindi la funzione H di HAMILTON, essendo la T indipendente esplicitamente dal tempo t , ha l'espressione:

$$\begin{aligned} H = T - V &= \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + F(\gamma_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \gamma_2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \gamma_3 \cos \alpha)\varrho + \\ &+ \frac{M}{2}(\sigma_1 p^2 + \sigma_2 q^2 + \sigma_3 r^2 - 2\sigma_4 qr - 2\sigma_5 pr - 2\sigma_6 pq)\varrho^2, \end{aligned}$$

che possiamo brevemente indicare con la scrittura :

$$(5) \quad H = L_2 + L_1 \varrho + L_0 \varrho^2,$$

considerando la H ordinata secondo le potenze del parametro ϱ .

« Chiameremo *sospensione quasi-baricentrica* di un corpo quella per la quale la distanza ϱ , fra il punto di sospensione e il baricentro, è di un ordine di grandezza tale che il terzo termine della (5) sia trascurabile rispetto ai primi due ».

Dato che le tre funzioni L_2 , L_1 , L_0 sono del tutto indipendenti da ϱ , anche, naturalmente, per ciò che riguarda l'ordine di grandezza, questo equivale a dire che la distanza ϱ è supposta così piccola rispetto alle altre grandezze fisiche del problema, che, per ogni valore del tempo t , si può assumere come valore di H l'espressione $L_2 + L_1 \varrho$ invece della (5).

Dal punto di vista fisico significa che, dato un corpo di massa M , cui sia applicato un sistema di forze tali che la loro risultante \mathbf{F} passi per il baricentro G e sia costante (ad esempio il caso di un corpo pesante sotto l'azione del proprio peso \mathbf{G}) è possibile trovare almeno un punto O (e quindi infiniti), che distino tanto poco da G , che il contributo di energia dato dal termine $L_0 \varrho^2$ è trascurabile rispetto all'energia $L_2 + L_1 \varrho$ (⁴).

4. - Sotto tali ipotesi la funzione H può scriversi

$$(5') \quad H = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + F(\gamma_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \gamma_2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \gamma_3 \cos \alpha) \varrho,$$

e quindi la forza viva del sistema è data dall'espressione

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

che coincide con quella del caso di sospensione baricentrica.

L'ellissoide d'inerzia relativo ad O è quindi uguale a quello principale centrale d'inerzia e , relativamente agli assi (ξ, η, ζ) , ha l'equazione:

$$(4') \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1.$$

Vogliamo ora però far vedere in che relazione è il moto del corpo con sospensione quasi-baricentrica rispetto a quello dello stesso corpo sospeso al baricentro.

(⁴) Tale ipotesi è sempre verificata nei giroscopi sperimentali da laboratorio, nei quali il centro di sospensione non è mai rigorosamente il baricentro, ma un punto molto vicino ad esso. Pertanto tale sospensione va ritenuta *quasi-baricentrica* e non baricentrica.

§ 2. - **Integrazione delle equazioni del moto di un corpo con ellissoide rotondo con sospensione quasi-baricentrica qualunque, nell'ipotesi che il momento d'impulso μ_0 sia parallelo alla risultante delle forze applicate.**

5. - Se si suppone $A=B \neq C$ il sistema canonico hamiltoniano del moto in esame è:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\Theta}{A}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Phi}{C} - \frac{1}{A} \frac{\Psi - \Phi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \cotg \vartheta, \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{\Psi - \Phi \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta}, \\ \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{A} \frac{(\Psi - \Phi \cos \vartheta)(\Psi \cos \vartheta - \Phi)}{\sin^3 \vartheta} - F_Q \{ \cos \vartheta \sin \alpha \sin (\varphi + \beta) - \cos \alpha \sin \vartheta \}, \\ \frac{d\Phi}{dt} = -F_Q \sin \alpha \sin \vartheta \cos (\varphi + \beta), \\ \frac{d\Psi}{dt} = 0, \end{array} \right.$$

dove con Θ , Φ , Ψ si sono indicati i momenti cinetici, cioè

$$\Theta = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'}, \quad \Phi = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad \Psi = \frac{\partial T}{\partial \psi'} \quad (2).$$

6. - *Se la sospensione è baricentrica* il sistema (S) si riduce alla forma seguente:

$$(S_0) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta_0}{dt} = \frac{\Theta_0}{A}, \\ \frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{\Phi_0}{C} - \frac{1}{A} \frac{\Psi_0 - \Phi_0 \cos \vartheta_0}{\sin \vartheta_0} \cotg \vartheta_0, \\ \frac{d\psi_0}{dt} = \frac{\Psi_0 - \Phi_0 \cos \vartheta_0}{A \sin^2 \vartheta_0}, \\ \frac{d\Theta_0}{dt} = \frac{1}{A} \frac{(\Psi_0 - \Phi_0 \cos \vartheta_0)(\Psi_0 \cos \vartheta_0 - \Phi_0)}{\sin^3 \vartheta_0}, \\ \frac{d\Phi_0}{dt} = 0, \\ \frac{d\Psi_0}{dt} = 0, \end{array} \right.$$

dove abbiamo contrassegnato le tre coppie di parametri coniugati (hamiltoniani) con un indice 0 per distinguerle da quelle del sistema precedente. Si noti subito

(2) Vedi DE SIMONI: *Sull'integrazione del moto di un solido intorno ad un punto fisso col metodo di Hamilton-Jacobi*. Boll. U.M.I., vol. I, II serie, pp. 122-128.

che (S_0) è il sistema hamiltoniano del caso classico di EULERO-POINSON con l'ipotesi della rotondità dell'ellissoide centrale d'inerzia.

I valori dei sei parametri coniugati si ricavano immediatamente con quadrature elementari.

Ricordando che $\Phi_0 = Cr$ ⁽³⁾, si ha, per la penultima equazione di (S_0) , che:

$$\Phi_0 = Cr_0 = \text{costante},$$

cioè la componente r , della velocità angolare istantanea ω , secondo l'asse ζ è costante ed è data dal momento cinetico Φ_0 , costante, diviso per il momento d'inerzia relativo all'asse ζ . Siccome inoltre è $\Phi_0 = l \cos \vartheta_0$ se, come si è supposto, l'asse z è nella direzione del momento d'impulso μ_0 , si ha:

$$\cos \vartheta_0 = \frac{Cr_0}{l} = \text{costante},$$

ed il moto è una precessione regolare.

Pertanto per la prima equazione di (S_0) è $\Theta_0 = 0$.

L'interpretazione della costante Ψ_0 si ha ricordando che, per il Teorema della conservazione del momento d'impulso, se l è il modulo del momento μ_0 risulta ⁽⁴⁾, sempre per l'ipotesi che l'asse z sia nella direzione e nel verso del momento d'impulso:

$$\Theta_0 \cos \varphi_0 + A_0 \sin \varphi_0 = l \sin \varphi_0 \cos \varphi_0$$

in cui:

$$A_0 = \frac{\Psi_0 - \Phi_0 \cos \vartheta}{\sin \vartheta},$$

e pertanto:

$$\Psi_0 = l = \text{mod } \mu_0$$

cioè il momento cinetico Ψ_0 è eguale al modulo del momento d'impulso μ_0 .

I rimanenti valori di φ_0 e ψ_0 si ricavano con una quadratura: poste le condizioni iniziali che per $t=0$ sia $\varphi_0(0)=0$; $\psi_0(0)=0$, si ha:

$$\varphi_0 = r_0 \left(1 - \frac{C}{A}\right) t, \quad \psi_0 = \frac{l}{A} t,$$

cioè gli angoli di precessione ψ_0 e di rotazione propria φ_0 variano con legge lineare e quindi le rotazioni intorno agli assi z e ζ sono uniformi. Essendo inoltre $\frac{d\vartheta_0}{dt} = 0$, non c'è alcuna rotazione intorno alla linea dei nodi ON .

Concludendo, i valori delle tre coppie di parametri coniugati *del caso baricentrico, nell'ipotesi che il momento d'impulso μ_0 abbia la stessa orienta-*

⁽³⁾ Cfr. loco citato §§ 4-5. Le notazioni di tale nota sono qui conservate.

⁽⁴⁾ Cfr. loco citato relazioni (13).

zione dell'asse fisso z , sono:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_0 = 0, \quad \vartheta_0 = \arccos \frac{Cr_0}{l}, \quad (0 \leq \vartheta_0 \leq \pi), \\ \Phi_0 = Cr_0, \quad \varphi_0 = r_0 \left(1 - \frac{C}{A}\right) t, \\ \Psi_0 = l, \quad \psi_0 = \frac{l}{A} t. \end{array} \right.$$

Le componenti della velocità angolare istantanea ω sui tre assi mobili (ξ, η, ζ) sono date dalle espressioni:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 = \psi_0' \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 + \vartheta_0' \cos \varphi_0, \\ q_0 = \psi_0' \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 - \vartheta_0' \sin \varphi_0, \\ r_0 = \psi_0' \cos \vartheta_0 + \varphi_0', \end{array} \right.$$

quindi nel caso in esame hanno l'espressione:

$$(7') \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{\sqrt{l^2 - C^2 r_0^2}}{A} \sin r_0 \left(1 - \frac{C}{A}\right) t, \\ q_0 = \frac{\sqrt{l^2 - C^2 r_0^2}}{A} \cos r_0 \left(1 - \frac{C}{A}\right) t, \\ r_0 = r_0, \end{array} \right.$$

e quindi il modulo di tale velocità angolare istantanea è costante e dato da:

$$\omega = \sqrt{\frac{l^2 - C^2 r_0^2}{A^2} + r_0^2} = \frac{1}{A} \sqrt{l^2 + r_0^2 (A^2 - C^2)}.$$

7. - Se si suppone che *il punto di sospensione O non coincida con il baricentro*, ma si trovi in un intorno sferico del punto G , tale che sia soddisfatta la condizione del § 1, n. 3, i valori dei sei parametri coniugati non conservano i valori dati dal sistema (6) ma mutano, come vedremo.

L'integrazione però del sistema hamiltoniano può esser fatta per approssimazioni successive con un metodo da noi indicato ⁽⁵⁾, dato che sono valide tutte le condizioni poste dal predetto Teorema ed è quindi possibile ottenere i parametri coniugati del moto, sviluppati in serie di potenze intere positive di q .

Nella nota citata si è posto in evidenza che per ottenere i coefficienti di tale sviluppo è necessario risolvere vari sistemi di equazioni differenziali lineari.

⁽⁵⁾ Cfr. FRANCO DE SIMONI: *Su un metodo d'integrazione di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine dipendenti da un parametro*. Boll. dell'U. M. I., Anno III, seconda serie, pp. 300-307.

Essi si ottengono sviluppando in serie le funzioni che costituiscono il secondo membro delle equazioni di (S).

Supponiamo che gli sviluppi in serie di potenze di ϱ dei parametri coniugati siano:

$$\begin{aligned} \Theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n \varrho^n, & \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \varrho^n, & \Psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \varrho^n, \\ \vartheta &= \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n \varrho^n, & \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \varrho^n, & \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \varrho^n, \end{aligned}$$

in cui i valori per $n=0$ sono dati dalle (6).

Data l'ipotesi che la sospensione è quasi-baricentrica, le potenze di ϱ superiori alla prima sono trascurabili e si può ritenere che le soluzioni del caso in esame siano date dai valori:

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_0 + \varrho \Theta_1, & \Phi &= \Phi_0 + \varrho \Phi_1, & \Psi &= \Psi_0 + \varrho \Psi_1, \\ \vartheta &= \vartheta_0 + \varrho \vartheta_1, & \varphi &= \varphi_0 + \varrho \varphi_1, & \psi &= \psi_0 + \varrho \psi_1. \end{aligned}$$

Per l'integrazione delle equazioni del moto restano allora da determinare le funzioni con indice 1 ed esse soddisfano al sistema lineare di forma normale:

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\vartheta_1}{dt} &= \frac{\Theta_1}{A}, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \left(\frac{1}{C} - \frac{C^2 r_0^2 \lambda^2}{A} \right) \Phi_1 + \frac{l^2 \lambda}{A} \vartheta_1, \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{C r_0 \lambda^2 l}{A} \Phi_1 + \frac{C r_0 \lambda (1-2l)}{A} \vartheta_1, \\ \frac{d\Theta_1}{dt} &= -\frac{l^2}{A} \vartheta_1 - \frac{l^2 \lambda}{A} \Phi_1 - \frac{F C r_0 \operatorname{sen} \alpha}{l} \operatorname{sen} \left[r_0 \left(1 - \frac{A}{C} \right) t + \beta \right] + \frac{F \cos \alpha}{l \lambda}, \\ \frac{d\Phi_1}{dt} &= -\frac{F \operatorname{sen} \alpha}{l \lambda} \cos \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right], \\ \Psi_1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Per ottenere il sistema (S₁) si opera come segue: consideriamo una qualsiasi delle equazioni del sistema (S₀), ad esempio la

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{A} \frac{l - \Phi \cos \vartheta}{\operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

e pensiamo di aver sostituito ai parametri coniugati gli sviluppi precedentemente scritti. Il secondo membro risulterà così una funzione di ϱ che indicheremo per brevità con $f(\varrho)$. Determinando allora la $\frac{df}{d\varrho}$, si ha:

$$\frac{df}{d\varrho} = \frac{1}{A} \frac{\left(-\frac{d\Phi}{d\varrho} \cos \vartheta + \Phi \operatorname{sen} \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varrho} \right) \operatorname{sen} \vartheta - 2 \cos \vartheta (l - \Phi \cos \vartheta) \frac{d\vartheta}{d\varrho}}{\operatorname{sen}^3 \vartheta},$$

che calcoliamo per $\varrho=0$, tenendo presenti gli sviluppi precedenti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varrho}{df}\right)_{\varrho=0} &= \frac{1}{A} \frac{(-\Phi_1 \cos \vartheta_0 + \Phi_0 \vartheta_1 \operatorname{sen} \vartheta_0) \operatorname{sen} \vartheta_0 - 2\vartheta_1 (l - \Phi_0 \cos \vartheta_0) \cos \vartheta_0}{\operatorname{sen}^3 \vartheta_0} = \\ &= -\frac{1}{A} \frac{\cos \vartheta_0}{\operatorname{sen}^2 \vartheta_0} \Phi_1 + \frac{1}{A} \left\{ \frac{\Phi_0}{\operatorname{sen} \vartheta_0} - 2(l - \Phi_0 \cos \vartheta_0) \frac{\cos \vartheta_0}{\operatorname{sen}^3 \vartheta_0} \right\} \vartheta_1, \end{aligned}$$

che, dopo trasformazioni algebriche, avendo posto:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{l^2 - C^2 r_0^2}},$$

dà:

$$\left(\frac{df}{d\varrho}\right)_{\varrho=0} = -\frac{C r_0 \lambda^2 l}{A} \Phi_1 + \frac{C r_0 \lambda (1 - 2l)}{A} \vartheta_1,$$

e quindi, per le osservazioni della nota citata e per lo sviluppo in serie di MAC LAURIN, si ha la terza equazione del sistema (S_1).

8. - Integriamo (S_1) con la condizione iniziale che per $t=0$ sia:

$$\vartheta_1(0) = \varphi_1(0) = \psi_1(0) = \Theta_1(0) = \Phi_1(0) = 0,$$

e ciò sarà possibile per sole quadrature. Infatti dalla 5^a equazione di (S_1) possiamo ricavare $\Phi_1(t)$ con una quadratura e si ha: ⁽⁶⁾

$$\Phi_1(t) = -\frac{AF \operatorname{sen} \alpha}{l \lambda r_0 (A - C)} \left\{ \operatorname{sen} \left[r_0 \left(1 - \frac{A}{C} \right) t + \beta \right] - \operatorname{sen} \beta \right\};$$

mentre dalla quarta equazione otterremo la $\Theta_1(t)$ che sostituita nella prima ci darà $\vartheta_1(t)$ e, dalla conoscenza di questa, avremo le altre per quadrature elementari.

Per la 4^a, derivando totalmente rispetto a t , abbiamo

$$\frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} + \frac{l^2}{A} \frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{l^2 \lambda}{A} \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{FC r_0 (A - C) \operatorname{sen} \alpha}{A l} \cos \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right],$$

che, con l'ausilio della 1^a e 5^a equazione, si riduce all'equazione differenziale lineare del 2° ordine, nella quale il 1° membro ha i coefficienti costanti:

$$(8) \quad \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} + \frac{l^2}{A^2} \Theta_1 = \frac{F \operatorname{sen} \alpha [l^2 - C r_0^2 (A - C)]}{A l} \cos \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right],$$

⁽⁶⁾ In tutte le espressioni che si ottengono figura l'intensità F della risultante delle forze applicate \mathbf{F} . Dato che al § 2 si è fatta l'ipotesi che l'asse z abbia la stessa orientazione del momento d'impulso μ_0 , mentre al § 1 abbiamo posto che z ed \mathbf{F} abbiano versi opposti, riterremo $F > 0$ se la risultante \mathbf{F} ed il momento μ_0 sono paralleli e discordi; $F < 0$ se paralleli e concordi.

il cui integrale è:

$$\Theta_1 = M \cos \left(\frac{l}{A} t + \varepsilon \right) + N \cos \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right],$$

in cui M , N , ε sono costanti di integrazione ottenute in base ai valori iniziali:

$$\Theta_1(0) = 0, \quad \left(\frac{d\Theta_1}{dt} \right)_{t=0} = \frac{F \cos \alpha}{l\lambda} - \frac{FCr_0 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{l}$$

ed hanno i valori:

$$(9) \quad \begin{cases} N = \frac{AF[l^2 - Cr_0^2(A-C)] \operatorname{sen} \alpha}{l[l^2 - r_0^2(A-C)^2]}, \\ tg \varepsilon = \frac{[l^2 - r_0^2(A-C)^2] (\cos \alpha - Cr_0 \lambda \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + r_0(A-C) tg \beta}{l\lambda \operatorname{sen} \alpha [l^2 - Cr_0^2(A-C)]} + \frac{r_0(A-C)}{l} tg \beta, \\ M = -N \cos \beta \sqrt{1 + tg^2 \varepsilon}, \quad (0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Dalla 1^a equazione si ottiene allora:

$$\vartheta_1 = \frac{M}{l} \operatorname{sen} \left(\frac{l}{A} t + \varepsilon \right) + \frac{N}{r_0(A-C)} \operatorname{sen} \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right] - \left(\frac{M}{l} \operatorname{sen} \varepsilon + \frac{N}{r_0(A-C)} \operatorname{sen} \beta \right).$$

La 2^a e 3^a equazione si integrano ora senz'altro e danno:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = M\lambda \left[\cos \left(\frac{l}{A} t + \varepsilon \right) - \cos \varepsilon \right] - \frac{A^2}{r_0^2(A-C)^2} \left\{ \frac{N l^2 \lambda}{A^2} - \left(\frac{1}{C} - \frac{C^2 r_0^2 \lambda^2}{A} \right) \frac{F \operatorname{sen} \alpha}{l\lambda} \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ \cos \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right] - \cos \beta \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{C} - \frac{C^2 r_0^2 \lambda^2}{A} \right) \frac{AF \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{l\lambda r_0(A-C)} - \right. \\ \left. - \frac{l^2 \lambda}{A} \left(\frac{M}{l} \operatorname{sen} \varepsilon + \frac{N}{r_0(A-C)} \operatorname{sen} \beta \right) \right\} t, \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\begin{aligned} \psi_1 = - \frac{C\lambda [N(1-2l) - AF \operatorname{sen} \alpha]}{r_0(A-C)^2} \left\{ \cos \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right] - \cos \beta \right\} - \\ - \frac{MCr_0 \lambda (1-2l)}{l^2} \left\{ \cos \left(\frac{l}{A} t + \varepsilon \right) - \cos \varepsilon \right\} - \\ - C\lambda \left\{ \frac{r_0(1-2l)}{A} \left[\frac{M}{l} \operatorname{sen} \varepsilon + \frac{N}{r_0(A-C)} \operatorname{sen} \beta \right] + \frac{F \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{(A-C)} \right\} t. \end{aligned}$$

9. - Se, come si è supposto nel ragionamento iniziale, noi riteniamo quasi-baricentrica la sospensione quando le potenze di q superiori alla prima sono trascurabili rispetto ai dati fisici del problema, i parametri coniugati, nel caso

di una sospensione quasi-baricentrica soddisfacente alle ipotesi poste, hanno i valori :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = \varrho \left\{ M \cos \left(\frac{l}{A} t + \varepsilon \right) + N \cos \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right] \right\}, \\ \Phi = Cr_0 + \frac{AF \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{l \lambda r_0 (A - C)} \varrho - \varrho \frac{AF \operatorname{sen} \alpha}{l \lambda r_0 (A - C)} \operatorname{sen} \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right], \\ \Psi = l, \\ \vartheta = \arccos \frac{Cr_0}{l} + \frac{M}{l} \varrho \operatorname{sen} \left(\frac{l}{A} t + \varepsilon \right) + \frac{N}{r_0 (A - C)} \varrho \operatorname{sen} \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right] - K_0 \varrho, \\ \varphi = \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) + K_1 \varrho \right] t + M \lambda \varrho \cos \left(\frac{l}{A} t + \varepsilon \right) - K_2 \varrho \cos \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right] + K_3 \varrho, \\ \psi = \left(\frac{l}{A} - K_4 \varrho \right) t - K_5 \varrho \cos \left(\frac{l}{A} t + \varepsilon \right) - K_6 \varrho \cos \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) t + \beta \right] + K_7 \varrho, \end{array} \right.$$

avendo posto :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_0 = \frac{M}{l} \operatorname{sen} \varepsilon + \frac{N}{r_0 (A - C)} \operatorname{sen} \beta, \\ K_1 = \left(\frac{1}{C} - \frac{C^2 r_0^2 \lambda^2}{A} \right) \frac{AF \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{l \lambda r_0 (A - C)} - \frac{l^2 \lambda}{A} \left[\frac{M}{l} \operatorname{sen} \varepsilon + \frac{N}{r_0 (A - C)} \operatorname{sen} \beta \right], \\ K_2 = \frac{A^2}{r_0^2 (A - C)^2} \left[\frac{N l^2 \lambda}{A^2} - \left(\frac{1}{C} - \frac{C^2 r_0^2 \lambda^2}{A} \right) \frac{F \operatorname{sen} \alpha}{l \lambda} \right], \\ K_3 = -M \lambda \cos \varepsilon + K_2 \cos \beta, \\ K_4 = C \lambda \left\{ \frac{r_0 (1 - 2l)}{A} \left[\frac{M}{l} \operatorname{sen} \varepsilon + \frac{N}{r_0 (A - C)} \operatorname{sen} \beta \right] + \frac{F \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{(A - C)} \right\}, \\ K_5 = \frac{M C r_0 \lambda (1 - 2l)}{l^2}, \\ K_6 = \frac{C \lambda [N (1 - 2l) - A F \operatorname{sen} \alpha]}{r_0 (A - C)^2}, \\ K_7 = K_5 \cos \varepsilon + K_6 \cos \beta, \end{array} \right.$$

e ricordando le (9).

10. - Dal confronto delle (10) con le (6) risulta che i parametri coniugati del moto con sospensione quasi-baricentrica differiscono da quelli del moto con sospensione baricentrica (nelle ipotesi iniziali poste), oltrechè per termini costanti o lineari in t , anche per termini periodici sinusoidali aventi le due uniche pulsazioni

$$r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right), \quad \frac{l}{A},$$

che rappresentano le velocità degli angoli di EULERO φ e ψ . Questo fatto porta che, nel caso della sospensione quasi-baricentrica, al moto di precessione regolare della sospensione baricentrica si sovrappongono dei moti di tipo essenzialmente

diversi, cioè armonici, le cui pulsazioni sono date dalle velocità angolari costanti di precessione, intorno all'asse z , e di rotazione propria, intorno all'asse ζ .

Le ampiezze e le fasi iniziali di tali moti armonici dipendono dalla posizione di O rispetto agli assi principali centrali d'inerzia $G\xi_1, G\eta_1, G\zeta_1$. Infatti le fasi iniziali dei moti armonici con pulsazione eguale alla velocità angolare di rotazione propria risultano β e $\frac{\pi}{2} + \beta$, essendo β la longitudine di G rispetto al sistema polare $(O, \zeta, \xi\zeta)$, e quelle dei moti armonici con pulsazione eguale alla velocità angolare di precessione sono date da ε e $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, ed ε è funzione di α e β , colatitudine e longitudine di G nel predetto sistema polare.

Si ha la prova di tale asserto considerando il caso, di notevole interesse, in cui il punto di sospensione O , si trova sull'asse di simmetria del corpo $G\zeta_1$.

Tale caso è evidentemente il limite di quello di LAGRANGE quando si suppone che la distanza OG è sufficientemente piccola.

§ 3. - Caso di simmetria.

11. - Supponiamo che il punto di sospensione O sia sull'asse principale centrale d'inerzia ζ_1 , dimodochè risulti $\zeta \equiv \zeta_1$ e le coordinate di G rispetto alla terna $O(\xi, \eta, \zeta)$ siano $(0, 0, \varrho)$. Supporremo $\varrho > 0$ e orienteremo l'asse z nella stessa direzione e verso del momento d'impulso μ_0 (vedi fig. 1).

La funzione potenziale prende ora la forma :

$$V = -F\varrho \cos \vartheta$$

e quindi, nell'ipotesi che ϱ sia di dimensioni tali da soddisfare a quanto si è detto nel § 1, n. 3, il sistema hamiltoniano di equazioni diventa :

$$(S^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\Theta}{A}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Phi}{C} - \frac{1}{A} \frac{\Psi - \Phi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \cotg \vartheta, \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{\Psi - \Phi \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta}, \\ \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{A} \frac{(\Psi - \Phi \cos \vartheta)(\Psi \cos \vartheta - \Phi)}{\sin^3 \vartheta} + F\varrho \sin \vartheta, \\ \frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad \frac{d\Psi}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

I due parametri Φ e Ψ risultano costanti : $\Phi = \text{cost.}$ esprime che la componente, secondo l'asse ζ , della velocità angolare ω è costante ; $\Psi = \text{cost.}$ che è costante il momento d'impulso μ_0 che, secondo l'ipotesi già fatta, ha la stessa orientazione dell'asse z .

Siccome per $\varrho=0$ il sistema (S^*) coincide col sistema (S_0), valgono ancora le (6).

Supponiamo ora che le tre coppie di parametri coniugati abbiano la forma

$$\Theta = \Theta_0 + \varrho \Theta_1, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \varrho \vartheta_1, \quad \text{ecc.}$$

cioè supponiamo che siano trascurabili tutte le potenze di ϱ oltre la prima. Il secondo sistema d'approssimazione è, con le solite notazioni :

$$(S_1^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{\Theta_1}{A}, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{l^2 \lambda}{A} \vartheta_1, \\ \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{Cr_0 \lambda (1-2l)}{A} \vartheta_1, \\ \frac{d\Theta_1}{dt} = -\frac{l^2}{A} \vartheta_1 + \frac{F}{l\lambda}, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Psi_1 = 0. \end{array} \right.$$

12. - Ponendo, come già facemmo (n. 8), che per $t=0$ sia :

$$\vartheta_1(0) = \varphi_1(0) = \psi_1(0) = \Theta_1(0) = 0,$$

potremo integrare il sistema (S_1^*) con sole quadrature.

Derivando la 4^a equazione totalmente rispetto al tempo si ha :

$$(12) \quad \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} + \frac{l^2}{A^2} \Theta_1 = 0,$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti, la quale, poste le condizioni iniziali :

$$\Theta_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{d\Theta_1}{dt} \right)_{t=0} = \frac{F}{l\lambda},$$

ammette l'integrale :

$$\Theta_1 = \frac{AF}{l^2 \lambda} \operatorname{sen} \frac{l}{A} t.$$

Sostituendo la precedente nella prima equazione di (S_1^*) si ha

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{F}{l^2 \lambda} \operatorname{sen} \frac{l}{A} t,$$

che integrata ci dà, per la condizione iniziale posta :

$$\vartheta_1 = \frac{AF}{l^3 \lambda} \left(1 - \cos \frac{l}{A} t \right).$$

E in maniera analoga si ottiene :

$$\varphi_1 = \frac{F}{l} t - \frac{AF}{l^2} \operatorname{sen} \frac{l}{A} t,$$

$$\psi_1 = \frac{FCr_0(1-2l)}{l^3} t - \frac{AFCr_0(1-2l)}{l^4} \operatorname{sen} \frac{l}{A} t.$$

Concludendo, i valori delle tre coppie di parametri coniugati nel caso di simmetria sono, in prima approssimazione :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = \frac{AF\rho}{l^2\lambda} \operatorname{sen} \frac{l}{A} t, \quad \Phi = Cr_0, \quad \Psi = l, \\ \vartheta = \arccos \frac{Cr_0}{l} + \frac{AF\rho}{l^3\lambda} \left(1 - \cos \frac{l}{A} t\right), \\ \varphi = \left[r_0 \left(1 - \frac{C}{A}\right) + \frac{F\rho}{l} \right] t + \frac{AF\rho}{l^2} \operatorname{sen} \frac{l}{A} t, \\ \psi = \left[\frac{l}{A} + \frac{CFr_0(1-2l)\rho}{l^3} \right] t - \frac{AFCr_0(1-2l)\rho}{l^4} \operatorname{sen} \frac{l}{A} t. \end{array} \right.$$

13. - OSSERVAZIONE. - Si noti che il caso di simmetria si ottiene quando O è sull'asse principale centrale d'inerzia. Se si considera la posizione fatta per le coordinate del baricentro G :

$$a = \rho \operatorname{sen} \alpha \cos \beta, \quad b = \rho \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad c = \rho \cos \alpha,$$

si ha la terna $(0, 0, \rho)$ se ad α si dà il valore zero ed a β un valore qualsiasi.

Posto allora $\alpha=0$, si ottiene subito il sistema (S^*) dal sistema (S) , e il sistema (S_1^*) dal sistema (S_1) .

Anche i valori (13) si possono ottenere dalle (10). Osserviamo infatti che per $\alpha=0$ e β qualunque, la (8) si riduce alla (12); corrispondentemente i valori di N, M, ε , forniti nel caso generale dalle (9), diventano :

$$N=0, \quad M = -\frac{AF}{l^2\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2},$$

gli ultimi due ottenuti con calcolo diretto dalla (12). Posti tali valori, nelle (11) si ha :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_0 = -\frac{AF}{l^3\lambda}, \\ K_1 = \frac{F}{l}, \\ K_2 = K_3 = K_6 = K_7 = 0, \\ K_4 = -\frac{CFr_0(1-2l)}{l^3}, \\ K_5 = -\frac{AFCr_0(1-2l)}{l^4}, \end{array} \right.$$

e quindi dalle (10) le (13).

14. - Esaminando i valori delle tre coppie di parametri coniugati in confronto con quelli del caso generale, si può dire che nel caso di simmetria influisce sui valori dei parametri solo la velocità di precessione $\frac{l}{A}$, inquantochè le com-

ponenti armoniche hanno come unica pulsazione l'espressione $\frac{l}{A}$. La velocità di rotazione propria $r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right)$ non compare più.

Fisicamente si può schematizzare il moto così. Consideriamo i tre assi: $O\zeta$ fisso nel corpo (asse di simmetria e di rotazione spontanea stabile), Oz nella direzione e nel verso del momento d'impulso, ON linea dei nodi. Il corpo ha:

1) intorno all'asse $O\zeta$ un moto rotatorio uniforme di velocità angolare

$$r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right) + \frac{F}{l} \varrho,$$

composto con un moto oscillatorio armonico di ampiezza

$$\frac{A F}{l^3 \lambda} \varrho,$$

il cui ordine di grandezza è $\ll \varrho$;

2) intorno all'asse Oz un moto rotatorio uniforme di velocità angolare

$$\frac{l}{A} + \frac{C F r_0 (1 - 2l)}{l^3} \varrho,$$

composto con un moto oscillatorio armonico avente egual frequenza del precedente ma di ampiezza

$$\frac{A F C r_0 (1 - 2l)}{l^4} \varrho$$

ed i due moti oscillatori sono in opposizione;

3) intorno alla linea dei nodi soltanto un moto oscillatorio armonico avente sempre la stessa frequenza dei precedenti e ampiezza

$$\frac{A F}{l^2} \varrho.$$

Infine l'angolo ϑ , che nella sospensione baricentrica aveva il valore costante $\arcsin \frac{C r_0}{l}$, nel caso presente oscilla fra i due valori

$$\arcsin \frac{C r_0}{l}, \quad \arcsin \frac{C r_0}{l} + \frac{2 A F \varrho}{l^3 \lambda}.$$

15. - Riservandoci di considerare in un'altra Nota l'integrazione delle equazioni del moto di sospensione quasi-baricentrica con ipotesi diverse e più generali, facciamo per ora rilevare che l'equazione (8) del n. 8, che entra nell'integrazione del sistema (S_1), è interpretabile come l'equazione differenziale delle oscillazioni forzate (non smorzate) di un sistema ad un sol grado di libertà, essendo la forza esterna di tipo sinusoidale. E come il passaggio dal caso generale a quello particolare (in cui il punto di sospensione del solido è sull'asse di rotazione $G\zeta_1$) è accompagnato dalla perdita di una pulsazione — quella eguale alla velocità di rotazione propria nella precessione regolare della sospensione baricentrica —, così (nel fenomeno oscillatorio) il passaggio dal moto forzato al moto libero si accompagna alla perdita dell'oscillazione armonica prodotta dalla forza esterna.