ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

SANDRO FAEDO

**Proprietà asintotiche delle estremanti degli integrali a campo di integrazione illimitato**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 11, nº 3-4 (1942), p. 119-131
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_3-4_119_0>

# PROPRIETÀ ASINTOTICHE DELLE ESTREMANTI DEGLI INTEGRALI A CAMPO DI INTEGRAZIONE ILLIMITATO

di SANDRO FAEDO (Roma) (¹).

Soltanto recentemente si sono avuti dei contributi al Calcolo delle Variazioni degli integrali a campo di integrazione illimitato, nell'indirizzo della Scuola Italiana di L. TONELLI.

Il problema è stato impostato da S. CINQUINI (²), che ha dato inoltre alcuni teoremi di esistenza dell'estremo.

Successivamente, in due lavori (³) dedicati alla sistemazione teorica del metodo variazionale di M. PICONE, sono stato condotto a teoremi di esistenza e unicità per tale tipo di integrali.

In particolare mi sono occupato, fra l'altro, della seguente questione:

Se si cerca l'estremo di

$$I=\int_a^b f(x,\, y(x),\; y'(x))\, dx$$

nella classe delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in $(a, b)$, per cui $I$ esiste finito ed è

$$y(a)=c \qquad (c \text{ costante assegnata}),$$

sotto note condizioni esso è fornito dalla estremale $\overline{y}(x)$ per cui è

$$(1) \qquad \overline{y}(a)=c,$$

$$(2) \qquad [f_{y'}(x,\, \overline{y}(x),\; \overline{y}'(x)]_{x=b}=0 \qquad (\textit{condizione di trasversalità}).$$

Su tale estremale $\overline{y}(x)$ è inoltre nulla la variazione prima $\delta I$ di $I$ per un incremento $\delta\overline{y}(x)$ arbitrario (con $\delta\overline{y}(0)=0$) dato alla $\overline{y}(x)$, ed è

$$\delta I=[\delta\overline{y}(x)\cdot f_{y'}(x,\, \overline{y}(x),\; \overline{y}'(x)]_{x=b}=0.$$

---

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(²) S. CINQUINI: *Una nuova estensione dei moderni metodi del Calcolo delle Variazioni.* Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. IX, 1940, pp. 253-262.

(³) S. FAEDO: *Contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione.* Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. X, 1941, pp. 139-155; *L'unicità delle successive approssimazioni nel metodo variazionale.* Memorie della R. Accademia d'Italia, Vol. XIII, fasc. 5, 1942, pp. 679-707.

Se invece si considera

$$I_\infty = \int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

e se ne ricerca l'estremo nella classe $(K)$ delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in ogni intervallo finito $(a, a+M)$, con $M>0$, per cui $y(a)=c$ e che rendono integrabile in $(a, +\infty)$ la $f(x, y, y')$, ho dato ([4]) delle condizioni sotto le quali si può ancora asserire che l'estremo è fornito da una estremale $\bar{y}(x)$.

Per la determinazione di tale funzione si presenta ora l'inconveniente che, mentre sussiste ancora la (1), la condizione di trasversalità (2) sembra venga invece a perdere il suo significato.

Si domanda:

*Quale condizione, oltre alla* (1), *servirà a determinare l'estremale che effettivamente dà il minimo* (*o il massimo*) *ad* $I_\infty$ *nella classe* $(K)$ ?

Si potrebbe pensare che la nuova condizione per l'estremale sia quella di rendere finito l'integrale generalizzato

$$\int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

Ma, nel secondo dei lavori citati, ho provato con un esempio che tale condizione non è sempre sufficiente a determinare l'estremale.

Invece ho potuto dimostrare ([5]) che, sotto opportune condizioni, su $\bar{y}(x)$ è ancora nulla la variazione prima di $I_\infty$, ossia che, se si dà a $\bar{y}(x)$ l'incremento $\delta\bar{y}(x)$ in guisa che $I_\infty$ rimanga finito e sia $\delta\bar{y}(0)=0$, è

$$\delta I_\infty = \int_a^{+\infty} [f_{\bar{y}}\, \delta\bar{y} + f_{\bar{y}'}\, \delta\bar{y}']\, dx = \lim_{x\to+\infty} [\delta\bar{y} \cdot f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)] = 0. \tag{3}$$

Ho dimostrato ([6]) inoltre che *l'annullarsi della variazione prima, insieme alla* (1), *determina completamente l'estremale che dà il minimo* (*o massimo*) *di* $I_\infty$ *in* $(K)$.

Poichè l'incremento $\delta\bar{y}(x)$ non è arbitrario, ma tale che la funzione $\bar{y}(x)+\delta\bar{y}(x)$ appartenga ancora a $(K)$, non si può dalla (3) dedurre immediatamente che è sempre

$$\lim_{x\to+\infty} f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = 0,$$

come invece si fa per l'integrale $I$.

---

([4]) S. FAEDO: I° lavoro cit. in ([3]), pag. 152; II° lavoro cit. in ([3]), § 2, n. 1.

([5]) S. FAEDO: II° lavoro cit. in ([3]), § 2, nn. 2, 3, 4.

([6]) S. FAEDO: II° lavoro cit. in ([3]), § 2, n. 4.

Se invece si introducono delle ulteriori condizioni ([7]) si può dimostrare che la $\overline{y}(x)$ verifica la *condizione di trasversalità all'infinito*

$$\lim_{x \to +\infty} f_{y'}(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) = 0. \tag{4}$$

Si presenta quindi la seguente interessante questione:

« *Se* $I_\infty$ *ammette minimo (o massimo) fornito da un' estremale su cui è* $\delta I_\infty \equiv 0$, *si può sempre affermare che di conseguenza sussista la condizione di trasversalità all'infinito, in modo analogo a quanto accade per l'integrale* $I$? »

*A tale domanda si risponde negativamente* nel presente lavoro, mettendo così in luce una sostanziale diversità di comportamento fra gli integrali $I$ ed $I_\infty$.

Si vede ciò attraverso un esempio, che è assai significativo anche per ulteriori ricerche di nuove condizioni per l'esistenza dell'estremo di $I_\infty$. Infatti si dimostra l'esistenza del minimo per un integrale che non rientra in alcuno dei teoremi finora noti.

Si fanno infine delle considerazioni che vengono a spiegare la diversità di comportamento delle estremanti degli integrali $I$ ed $I_\infty$.

1. - La funzione

$$f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)})$$

sia definita e continua per ogni $x \geqslant 0$ e per ogni valore finito di

$$y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)}.$$

Supponiamo che esistano e siano continue le derivate

$$f_{y_i^{(r)}, y_j^{(s)}}, \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots, n \\ r, s = 0, 1, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Consideriamo

$$I = \int_0^X f(x, y_1(x), \ldots, y_n^{(x)}, \ldots, y_1^{(m)}(x), \ldots, y_n^{(m)}(x))\, dx$$

e supponiamo che $I$ possieda una minimante $\overline{C}(\overline{y}_1(x), \ldots, \overline{y}_n(x))$ che sia una estremale nella classe $(H)$ delle curve $C(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ di $S_{n+1}$ assolutamente continue con $y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}$ in $(0, X)$, tali da dare ad $I$ valore finito e per cui è

$$y_i^{(k)}(0) = c_{i,k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix},$$

dove $c_{i,k}$ sono numeri assegnati.

Per determinare le condizioni di trasversalità a cui soddisfa la curva $\overline{C}$, si usa procedere nel modo seguente:

---

([7]) S. FAEDO: II° lavoro cit. in ([3]), § 2, n. 5.

Se $\eta(x)$ è una funzione assolutamente continua in $(0, X)$ con $\eta^{(m)}(x)$, esiste finito

$$(5) \quad I(\varepsilon)=\int^{X} f(x, \bar{y}_1+\varepsilon\eta, \bar{y}_2,\ldots, \bar{y}_n,\ldots, \bar{y}_1^{(m)}+\varepsilon\eta^{(m)}, \bar{y}_2^{(m)},\ldots, \bar{y}_n^{(m)})=$$

$$=\int_0^X f(x, \bar{y}_1,\ldots, \bar{y}_n,\ldots, \bar{y}_1^{(m)},\ldots, \bar{y}_n^{(m)})\,dx+\varepsilon\int_0^X [f_{\bar{y}_1}\eta+f_{\bar{y}_1'}\eta'+\ldots+f_{\bar{y}_1^{(m)}}\eta^{(m)}]\,dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^X \left\{\sum_{r,s}^{0\ldots m}\eta^{(r)}\eta^{(s)}f_{\bar{y}_1^{(r)},\bar{y}_1^{(s)}}\right\}dx$$

(dove le $f_{\bar{y}_1^{(r)},\bar{y}_1^{(s)}}$ sono calcolate in un punto conveniente).

Poichè $I(\varepsilon)$ ha un minimo per $\varepsilon=0$, è

$$\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0$$

ossia

$$\int_0^X \left[f_{\bar{y}_1}\eta+f_{\bar{y}'}\eta'+\ldots+f_{\bar{y}^{(m)}}\eta^{(m)}\right]dx=0,$$

qualunque sia la $\eta(x)$; di qui, tenuto conto che $\bar{C}$ è un'estremale e per un fondamentale lemma di P. DU BOIS REYMOND, seguono immediatamente le condizioni di trasversalità per $x=X$.

Consideriamo ora la classe $(K)$ di curve di $S_{n+1}$ $C(y_1(x),\ldots, y_n(x))$ tali che:

1°) $y_1(x),\ldots, y_n(x)$ siano assolutamente continue con $y_1^{(m-1)}(x),\ldots, y_n^{(m-1)}(x)$ in ogni intervallo finito $(0, X)$;

2°) esista finito

$$I_\infty=\int_0^{+\infty} f[x, y_1(x),\ldots, y_n(x),\ldots, y_1^{(m)}(x),\ldots, y_n^{(m)}(x)]\,dx\ ;$$

3°) sia, per $x=0$,

$$y_i^{(k)}=c_{i,k}, \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2,\ldots, n \\ k=0, 1,\ldots, m-1\end{pmatrix}.$$

Supponiamo che $I_\infty$ abbia in $(K)$ una minimante che sia un estremale [8]. Se si vogliono ottenere le condizioni di trasversalità all'infinito in modo analogo a come si fa per l'integrale $I$, ho già dimostrato [9] che si presentano le seguenti nuove difficoltà:

---

[8] Cfr. nota [4].

[9] S. FAEDO: II° lavoro cit. in [3], § 2, n. 3.

*a*) $I_\infty(\varepsilon)$ può non essere finito per tutti i valori di $\varepsilon$ nell'intorno di $\varepsilon=0$.

*b*) Può darsi che non esista

$$\left(\frac{d I_\infty(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.$$

*c*) Pur essendo finito $I_\infty(\varepsilon)$, possono non essere finiti

$$\int_0^{+\infty}\left[f_{\bar{y}_1}\eta+f_{\bar{y}_1'}\eta'+\dots+f_{\bar{y}_1^{(m)}}\eta^{(m)}\right]dx$$

e

$$\int_0^{+\infty}\left\{\sum_{r,s}^{0\dots m}\eta^{(r)}\eta^{(s)}f_{\bar{y}_1^{(r)},\bar{y}_1^{(s)}}\right\}dx,$$

e quindi non sussiste la relazione analoga alla (5).

2. - Supponiamo ora che $f(x, y_1,\dots, y_n,\dots, y_1^{(m)},\dots, y_n^{(m)})$ sia un polinomio di secondo grado in $y_1,\dots, y_n,\dots, y_1^{(m)},\dots, y_n^{(m)}$ con coefficienti funzioni continue di $x$ in ogni intervallo finito $(0, X)$. Inoltre la forma quadratica in

$$y_1,\dots, y_n,\dots, y_1^{(m)},\dots, y_n^{(m)}$$

che si ottiene dalla $f(x, y_1,\dots, y_n,\dots, y_1^{(m)},\dots, y_n^{(m)})$ trascurando i termini di grado inferiore al secondo, sia sempre semidefinita positiva per ogni $x\geqslant 0$.

Supponiamo che $(K)$ sia non vuota e che in essa esista una minimante $\bar{C}(\bar{y}_1(x),\dots, \bar{y}_n(x))$ che sia una estremale.

In tali condizioni ho dimostrato ([10]) il seguente teorema:

« *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una estremale $\bar{C}$ sia una estremante di $I_\infty$ in $(K)$ è che sia*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\eta_i\left(f_{\bar{y}_i'}-\frac{d}{dx}f_{\bar{y}_i''}+\dots+(-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}f_{\bar{y}_i^{(m)}}\right)+\right.$$
$$\left.+\eta_i'\left(f_{\bar{y}_i''}-\frac{d}{dx}f_{\bar{y}_i'''}+\dots+(-1)^{m-2}\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}f_{\bar{y}_i^{(m)}}\right)+\dots+\eta_i^{(m-1)}f_{\bar{y}_i^{(m)}}\right]=0, \tag{6}$$
$$(i=1, 2,\dots, n),$$

*dove le $\eta_i(x)$ $(i=1, 2,\dots, n)$ sono tali che la curva*

$$\bar{C}+\delta\bar{C}(\bar{y}_1+\eta_1, \bar{y}_2+\eta_2,\dots, \bar{y}_n+\eta_n)$$

*sia ancora una curva di $(K)$* ».

*Se $\bar{C}(\bar{y}_1,\dots, \bar{y}_n)$ verifica le* (6) *diremo che su essa è identicamente nulla la variazione prima di $I_\infty$.*

---

([10]) S. FAEDO: II° lav. cit. in ([3]), § 2, n. 4.

Qualora su $\overline{C}$ sia anche

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_{\overline{y}_i'}-\frac{d}{dx}f_{\overline{y}_i''}+\dots+(-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}f_{\overline{y}_i^{(m)}}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_{\overline{y}_i''}-\frac{d}{dx}f_{\overline{y}_i'''}+\dots+(-1)^{m-2}\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}f_{\overline{y}_i^{(m)}}\right)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_{\overline{y}_i^{(m)}}=0 \end{array}\right. \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

*diremo che $\overline{C}$ verifica le condizioni di trasversalità all'infinito.*

Se oltre alle ipotesi finora fatte, la $f(x, y_1,\dots, y_n,\dots, y_1^{(m)},\dots, y_n^{(m)})$ è tale che sia definita positiva la forma quadratica in $y_1^{(m)},\dots, y_n^{(m)}$ che si ottiene dalla $f(x, y_1,\dots, y_n,\dots, y_1^{(m)},\dots, y_n^{(m)})$ trascurando i termini di grado inferiore al secondo in $y_1^{(m)},\dots, y_n^{(m)}$, ho anche dimostrato ([11]) che *in* $(K)$ *esiste (al più) una sola estremale su cui è nulla la variazione prima di* $I_\infty$.

3. - Per costruire un esempio in cui la minimante non verifica le condizioni di trasversalità all'infinito (7) è utile premettere il seguente

LEMMA. - *Se $y(x)$ è assolutamente continua in ogni intervallo finito* $(0, X)$, *con* $X>0$, *ed esiste finito*

$$\mathfrak{J}=\int_0^{+\infty}(y^2+y'^2)\,dx,$$

*ne segue che necessariamente è*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=0.$$

Se esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$, tale limite è certamente nullo altrimenti $\mathfrak{J}$ non potrebbe essere finito.

Supponiamo, se possibile, che non esista $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

Si può allora determinare $\varepsilon>0$ tale che, comunque grande si prenda $X$, si trovi sempre qualche $x$, con $x\geqslant X$, per cui è

$$|\,y(x)\,|\geqslant\varepsilon.$$

Indichiamo con $D_1, D_2,\dots, D_m,\dots$ gli intervalli chiusi dell'asse delle $x$ in cui è sempre $|\,y(x)\,|\geqslant\varepsilon$, ordinati come si susseguono nel verso positivo dell'asse $x$; tali intervalli (che possono ridursi anche a punti isolati), per quanto si è premesso, esistono certamente e sono infiniti.

([11]) S. FAEDO: II° lavoro citato in ([3]), § 3.

Con $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ indichiamo gli intervalli aperti dell'asse $x$ in cui è

$$\frac{\varepsilon}{2} < | y(x) | < \varepsilon,$$

disposti nell'ordine in cui si susseguono sull'asse $x$.

Essendo $\mathfrak{J}$ finito i $d_n$ esistono certamente. Inoltre la serie delle lunghezze dei $d_n$ è convergente, avendosi

$$\mathfrak{J} = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2)\, dx \geqslant \int_0^{+\infty} y^2\, dx > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{d_n} y^2\, dx > \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} d_n,$$

ossia

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \frac{4\mathfrak{J}}{\varepsilon^2}. \tag{8}$$

Fra $D_m$ e $D_{m+1}$ cadono necessariamente dei $d_n$. Esistono inoltre infinite coppie $(D_m, D_{m+1})$ fra cui cade più di un $d_n$.

Infatti, se fra $D_m$ e $D_{m+1}$ cade un solo $d_n$, questo $d_n$ ricopre tutto l'intervallo compreso fra $D_m$ e $D_{m+1}$ ed in tutto l'intervallo $D_m + D_{m+1} + d_n$ è $| y(x) | > \frac{\varepsilon}{2}$. Se fossero in numero finito le coppie $(D_m, D_{m+1})$ fra cui cade più di un $d_n$, soppressi gli intervalli di $(0, +\infty)$ che sono compresi fra tali coppie, rimarrebbe un insieme di intervalli di lunghezza complessiva non finita in cui è sempre $| y(x) | > \frac{\varepsilon}{2}$; ma allora $\mathfrak{J}$ non sarebbe finito.

Indichiamo con

$$(\overline{D}_1, \overline{D}_2), \ldots, (\overline{D}_m, \overline{D}_{m+1}), \ldots$$

le infinite coppie di $D_m$ consecutivi fra cui cade più di un $d_n$.

Nel secondo estremo di $\overline{D}_m$ $| y(x) |$ ha per valore $\varepsilon$. Sia $d_m \equiv (a_m, b_m)$ il primo dei $d_n$ compresi fra $\overline{D}_m$ e $\overline{D}_{m+1}$.

$a_m$ coincide col secondo estremo di $D_m$ ed è $| y(b_m) | = \frac{\varepsilon}{2}$.

Infatti, per la definizione dei $d_m$, negli estremi di tali intervalli $| y(x) |$ può assumere soltanto i due valori $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}$. Ma, se fosse $| y(b_m) | = \varepsilon$, $b_m$ sarebbe il primo estremo di $\overline{D}_{m+1}$ e quindi fra $\overline{D}_m$ e $\overline{D}_{m+1}$ si avrebbe un solo $d_n$.

Si ha così

$$| y(a_m) | = \varepsilon, \qquad | y(b_m) | = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo

$$\int_{a_m}^{b_m} z'^2(x)\, dx.$$

Nella classe delle curve $z=z(x)$ assolutamente continue in $(a_m, b_m)$ per cui è

$$|z(a_m)|=\varepsilon \qquad |z(b_m)|=\frac{\varepsilon}{2},$$

l'integrale

$$\int_{a_m}^{b_m} z'^2(x)\,dx$$

possiede minimo, fornito dal segmento rettilineo passante per i punti $(x=a_m, z=\varepsilon)$, $\left(x=b_m, z=\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Per tale retta è

$$|z'(x)|=\frac{\varepsilon}{2(b_m-a_m)}.$$

Perciò è

$$\int_{a_m}^{b_m} y'^2(x)\,dx \geqslant \int_{a_m}^{b_m} \frac{\varepsilon^2}{4(b_m-a_m)^2}\,dx=\frac{\varepsilon}{4\,d_m}$$

e, per la (8),

$$\int_{a_m}^{b_m} y'^2(x)\,dx \geqslant \frac{\varepsilon^2}{4d_m} > \frac{\varepsilon^2}{4\sum\limits_{m=1}^{\infty} d_m} > \frac{\varepsilon^4}{16\,\mathfrak{J}}.$$

Ne segue quindi

$$\mathfrak{J}=\int_0^{+\infty}(y^2+y'^2)\,dx \geqslant \int_0^{+\infty} y'^2 dx \geqslant \sum_{m=1}^{\infty}\int_{a_m}^{b_m} y'^2\,dx=\infty$$

essendo, qualunque sia $m$,

$$\int_{a_m}^{b_m} y'^2\,dx > \frac{\varepsilon^4}{16\,\mathfrak{J}}.$$

Quindi dall'ipotesi che non esista $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ segue che necessariamente $\mathfrak{J}$ non è finito.

Il lemma è così completamente dimostrato.

4. - Consideriamo

$$I_\infty=\int_0^{+\infty}(y^2+y'^2+2y')\,dx.$$

Indichiamo con $(K)$ la classe delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in ogni intervallo $(0, X)$, per cui $I_\infty$ risulta finito e tali che sia

$$y(0)=c, \qquad (c \text{ costante assegnata}).$$

Anzitutto $(K)$ non è vuota perchè ad essa appartiene

$$y=\bar{y}=ce^{-x}. \tag{9}$$

*Dimostriamo che in* $(K)$ $I_\infty$ *ammette minimo*, fornito appunto dalla (9).

Se $C[(y=y(x)]$ è una curva di $(K)$, si ha

$$(10)\quad \int_0^{+\infty}(y^2+y'^2+2y')\,dx-\int_0^{+\infty}(\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')\,dx=2\int_0^{+\infty}[(y-\bar{y})\,\bar{y}+(y'-\bar{y}')(\bar{y}'+1)]\,dx+ \\ +\int_0^{+\infty}[(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2]\,dx\,.$$

Integrando per parti si ottiene

$$2\int_0^{+\infty}(y'-\bar{y}')(\bar{y}'+1)\,dx=2\lim_{x\to+\infty}(y-\bar{y})(\bar{y}+1)-2\int_0^{+\infty}(y-\bar{y})\,\bar{y}''\,dx$$

e quindi

$$(11)\quad 2\int_0^{+\infty}[(y-\bar{y})\,\bar{y}+(y'-\bar{y}')(\bar{y}'+1)]\,dx=2\lim_{x\to+\infty}(y-\bar{y})(\bar{y}+1)+2\int_0^{+\infty}(y-\bar{y})(\bar{y}-\bar{y}'')\,dx= \\ =2\lim_{x\to+\infty}y(x)\,[\bar{y}(x)+1],$$

perchè $y=\bar{y}(x)$ è un'estremale e verifica l'equazione di EULERO $y-y''=0$ ed è $\lim_{x\to\infty}\bar{y}(x)=0$.

Dalle (10) e (11) si ha

$$(12)\quad \int_0^{+\infty}(y^2+y'^2+2y')\,dx-\int_0^{+\infty}(\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')\,dx=2\lim_{x\to+\infty}y(x)\,[\bar{y}(x)+1]+ \\ +\int_0^{\infty}[(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2]\,dx\,.$$

Se $y(x)$ è una funzione di $(K)$ per cui inoltre esiste finito

$$\int_0^{+\infty}[(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2]\,dx$$

si ha, per il lemma premesso,

$$\lim_{x\to+\infty}(y-\bar{y})=0$$

e quindi segue dalla (12)

$$\int_0^{+\infty}(y^2+y'^2+2y')\,dx-\int_0^{+\infty}(\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')\,dx=\int_0^{+\infty}(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2)\,dx\geqslant 0.$$

Se di $y(x)$ si sa soltanto che appartiene a $(K)$, segue ancora necessariamente

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)\,[\bar{y}(x)+1]=0.$$

Infatti, in tal caso,

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)\,[\bar{y}(x)+1]$$

non può mai essere indeterminato perchè è

$$2\lim_{x\to+\infty} y(x)\,[\bar{y}(x)+1]=\int_0^{+\infty}(y^2+y'^2+2y')\,dx-$$
$$-\int_0^{+\infty}(\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')\,dx-\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x}[(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2]\,dx.$$

Se poi fosse

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)\,[\bar{y}(x)+1]=+\infty$$

dalla (12) seguirebbe immediatamente che $y(x)$ non dà valore finito ad $I_\infty$ e quindi non appartiene a $(K)$.

Nemmeno può $y(\bar{y}+1)$ tendere, per $x\to\infty$, a un limite finito non nullo, perchè in tal caso sarebbe finito

$$\int_0^{+\infty}[(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2]\,dx$$

e quindi, per il lemma, dovrebbe invece essere $\lim_{x\to+\infty}(y-\bar{y})=0$.

Infine non può essere

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)\,[\bar{y}(x)+1]=-\infty.$$

Infatti, preso $M>0$ ad arbitrio, si potrebbe determinare $x_0$ tale che per $x\geqslant x_0$ sia sempre

$$y^2(x)>|\,\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}'\,|+M+1$$

e quindi

$$(y^2+y'^2+2y')-(\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')>M+1+y'^2+2y'=M+(1+y')^2\geqslant M,$$

per $x\geqslant x_0$; ne seguirebbe quindi che $I_\infty$ non è finito e perciò $y=y(x)$ non appartiene a $(K)$.

Si è così dimostrato che se $y(x)$ è una qualunque funzione di $(K)$ è sempre

$$\int_0^{+\infty}(y^2+y'^2+2y')\,dx=\int_0^{+\infty}(\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')\,dx+\int_0^{+\infty}\{(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2\}\,dx.$$

Questa uguaglianza prova che $I_\infty$ ammette in $(K)$ minimo fornito dalla estremale

$$y=\bar{y}=ce^{-x}.$$

**5.** - L'esistenza del minimo per l'integrale

$$\int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y')\, dx$$

non poteva dedursi dai teoremi di esistenza dati da S. CINQUINI e da me nei lavori già citati.

Infatti in tali teoremi si considerano integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x, y, y')\, dx$$

in cui è sempre, qualunque siano $y$, $y'$ e $a \leqslant x < +\infty$,

$$f(x, y, y') \geqslant \psi(x),$$

con $\psi(x)$ tale che sia finito

$$\int_a^{+\infty} \psi(x)\, dx.$$

La funzione integranda $y^2 + y'^2 + 2y'$ non soddisfa evidentemente a questa condizione.

**6.** - Al funzionale

$$I_\infty = \int_0^{+\infty} f(y, y')\, dx = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y')\, dx,$$

considerato nel n. 4, si possono applicare i risultati rammentati nel n. 2. Si ha quindi che sulla estremale $y = \overline{y}$ che minimizza $I_\infty$ in $(K)$ è nulla la variazione prima di $I_\infty$.

Andiamo a calcolare tale variazione $\delta I_\infty$.

Se diamo alla $\overline{y} = c \cdot e^{-x}$ l'incremento $\delta\overline{y}$ in guisa che $I_\infty$ sia ancora finito e sia $\delta\overline{y}(0) = 0$, si ha [cfr. 11]

$$\delta I_\infty = \int_0^{+\infty} \left(\delta\overline{y}\, f_{\overline{y}} + \delta\overline{y}' f_{\overline{y}'}\right) dx = \lim_{x \to +\infty} \left(\delta\overline{y} \cdot f_{\overline{y}'}\right) = 0.$$

Ma è

$$f_{\overline{y}'} = 2(\overline{y}' + 1) = 2(1 - ce^{-x})$$

ed è

$$\lim_{x \to +\infty} f_{\overline{y}'} = 2.$$

*Sulla estremale che minimizza $I_\infty$ in $(K)$ è bensì nulla la variazione prima di $I_\infty$, ma non è soddisfatta la condizione di trasversalità all'infinito che*, per la (7), *in questo caso esigerebbe che fosse*

$$\lim_{x \to \infty} f_{\bar{y}'} = 0.$$

Per il funzionale $I_\infty$ sussiste anche il teorema di unicità per le estremali ricordato nel n. 2.

Ciò si può del resto verificare direttamente nel modo seguente:

Le estremali verificanti la condizione iniziale $y(0) = c$ sono date da

$$y = he^x + (c-h)\,e^{-x}.$$

Su tali estremali è

$$f_{y'} = 2(y'+1) = 2\,[he^x + (h-c)\,e^{-x} + 1]\,;$$

quindi

$$\lim_{x \to \infty} f_{y'} = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad h = 0 \\ \pm\infty & \text{se} \quad h \neq 0. \end{cases}$$

Di qui segue facilmente che l'unica estremale per cui sia

$$\delta I_\infty = \lim_{x \to \infty} (\delta_y \cdot f_{y'}) = 0,$$

qualunque sia $\delta y$ in modo che $y + \delta y$ appartenga ancora a $(K)$, è quella per cui è $h = 0$.

7. - L'esempio dato nel n. 6 mostra la diversità di comportamento degli integrali $I$ ed $I_\infty$ (definiti nel n. 1), rispetto alle condizioni di trasversalità nel secondo estremo dei rispettivi intervalli di integrazione. Vediamo di renderci ragione di tale apparente discordanza.

S. CINQUINI [12] ha osservato che il problema di ricercare l'estremo dell'integrale $I_\infty$ ha senso quando si consideri una classe di curve che non sia soggetta a vincoli all'infinito, come è appunto la classe $(K)$ definita nel n. 1.

Il CINQUINI ha mostrato che non si può in generale porre il problema di ricercare l'estremo di $I_\infty$ nella sottoclasse $(K')$ di $(K)$ le cui curve abbiano un prefissato comportamento all'infinito, perchè generalmente tale estremo non esiste.

Mentre per l'integrale

$$I = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

[12] S. CINQUINI: loc. cit. in [2], nota a piè di pagina 253.

si può cercare il minimo nella classe $(K_1)$ di curve piane che congiungono i punti $A \equiv (a, \alpha)$, $B \equiv (b, \beta)$, non ammette in generale minimo l'integrale

$$\int_a^{+\infty} f(x, y, y')\, dx$$

nella classe di curve passanti per $A$ e tali che sia

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \beta .$$

Per questo si ricerca l'estremo degli integrali $I_\infty$ nella già detta classe $(K)$ di curve, e tale problema si presenta come l'estensione della ricerca dell'estremo di $I$ nella classe delle curve passanti per il solo punto $A$ ; e qui interviene la condizione di trasversalità per $x = b$.

In realtà però la classe $(K)$ è vincolata a dare valore finito all'integrale generalizzato $I_\infty$ ; in taluni casi ciò può portare a obbligare le curve di $(K)$ ad avere tutte uno stesso comportamento all'infinito, ossia che, se $y = y(x)$ e $y = y_1(x)$ sono due qualsiasi curve di $(K)$, debba sempre essere

$$\lim_{x \to +\infty} (y - y_1) = 0.$$

In tali casi la classe $(K)$ può essere pensata come quella delle curve $y = y(x)$ passanti per $A$ e per cui è

$$\lim_{x \to +\infty} (y - y_1) = 0 ;$$

quindi $(K)$ si può pensare anche come estensione della $(K_1)$ di $I$.

Si comprende così come possa, in questi casi, venire a mancare per l'estremante di $I_\infty$ la condizione di trasversalità all'infinito.

Nell'esempio che abbiamo dato nel n. 4, abbiamo definita la classe $(K)$ relativa all'integrale

$$I_\infty = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y')\, dx$$

come quella delle curve $y = y(x)$, con $y(x)$ assolutamente continua in ogni intervallo finito $(0, X)$, per cui è $y(0) = c$ e che danno valore finito ad $I_\infty$.

Abbiamo poi dimostrato che se $y = y(x)$ è una gualunque curva di $(K)$, è sempre $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Quindi la classe $(K)$ si può anche definire come quella delle curve $y = y(x)$, che danno valore finito ad $I_\infty$, sono assolutamente continue su ogni intervallo finito e sono tali che sia

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = c \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0. \end{array} \right. \tag{13}$$

Appare così chiaro che la minimante non deve soddisfare a condizioni di trasversalità all'infinito, e che essa è pienamente determinata dalle (13).