

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SANDRO FAEDO

**Proprietà asintotiche delle estremanti degli integrali a  
campo di integrazione illimitato**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série, tome 11,  
n° 3-4 (1942), p. 119-131*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1942\\_2\\_11\\_3-4\\_119\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_3-4_119_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# PROPRIETÀ ASINTOTICHE DELLE ESTREMANTE DEGLI INTEGRALI A CAMPO DI INTEGRAZIONE ILLIMITATO

di SANDRO FAEDO (Roma) <sup>(1)</sup>.

Soltanto recentemente si sono avuti dei contributi al Calcolo delle Variazioni degli integrali a campo di integrazione illimitato, nell'indirizzo della Scuola Italiana di L. TONELLI.

Il problema è stato impostato da S. CINQUINI <sup>(2)</sup>, che ha dato inoltre alcuni teoremi di esistenza dell'estremo.

Successivamente, in due lavori <sup>(3)</sup> dedicati alla sistemazione teorica del metodo variazionale di M. PICONE, sono stato condotto a teoremi di esistenza e unicità per tale tipo di integrali.

In particolare mi sono occupato, fra l'altro, della seguente questione:

Se si cerca l'estremo di

$$I = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

nella classe delle funzioni  $y(x)$  assolutamente continue in  $(a, b)$ , per cui  $I$  esiste finito ed è

$$y(a) = c \quad (c \text{ costante assegnata}),$$

sotto note condizioni esso è fornito dalla estremale  $\bar{y}(x)$  per cui è

$$(1) \quad \bar{y}(a) = c,$$
$$(2) \quad [f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))]_{x=b} = 0 \quad (\text{condizione di trasversalità}).$$

Su tale estremale  $\bar{y}(x)$  è inoltre nulla la variazione prima  $\delta I$  di  $I$  per un incremento  $\delta \bar{y}(x)$  arbitrario (con  $\delta \bar{y}(0) = 0$ ) dato alla  $\bar{y}(x)$ , ed è

$$\delta I = [\delta \bar{y}(x) \cdot f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))]_{x=b} = 0.$$

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

<sup>(2)</sup> S. CINQUINI: *Una nuova estensione dei moderni metodi del Calcolo delle Variazioni*. Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. IX, 1940, pp. 253-262.

<sup>(3)</sup> S. FAEDO: *Contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione*. Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. X, 1941, pp. 139-155; *L'unicità delle successive approssimazioni nel metodo variazionale*. Memorie della R. Accademia d'Italia, Vol. XIII, fasc. 5, 1942, pp. 679-707.

Se invece si considera

$$I_{\infty} = \int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x)) dx$$

e se ne ricerca l'estremo nella classe ( $K$ ) delle funzioni  $y(x)$  assolutamente continue in ogni intervallo finito  $(a, a+M)$ , con  $M > 0$ , per cui  $y(a) = c$  e che rendono integrabile in  $(a, +\infty)$  la  $f(x, y, y')$ , ho dato <sup>(4)</sup> delle condizioni sotto le quali si può ancora asserire che l'estremo è fornito da una estremale  $\bar{y}(x)$ .

Per la determinazione di tale funzione si presenta ora l'inconveniente che, mentre sussiste ancora la (1), la condizione di trasversalità (2) sembra venga invece a perdere il suo significato.

Si domanda:

*Quale condizione, oltre alla (1), servirà a determinare l'estremale che effettivamente dà il minimo (o il massimo) ad  $I_{\infty}$  nella classe ( $K$ )?*

Si potrebbe pensare che la nuova condizione per l'estremale sia quella di rendere finito l'integrale generalizzato

$$\int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Ma, nel secondo dei lavori citati, ho provato con un esempio che tale condizione non è sempre sufficiente a determinare l'estremale.

Invece ho potuto dimostrare <sup>(5)</sup> che, sotto opportune condizioni, su  $\bar{y}(x)$  è ancora nulla la variazione prima di  $I_{\infty}$ , ossia che, se si dà a  $\bar{y}(x)$  l'incremento  $\delta\bar{y}(x)$  in guisa che  $I_{\infty}$  rimanga finito e sia  $\delta\bar{y}(0) = 0$ , è

$$(3) \quad \delta I_{\infty} = \int_a^{+\infty} [f_y \delta\bar{y} + f_{y'} \delta\bar{y}'] dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\delta\bar{y} \cdot f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))] = 0.$$

Ho dimostrato <sup>(6)</sup> inoltre che *l'annullarsi della variazione prima, insieme alla (1), determina completamente l'estremale che dà il minimo (o massimo) di  $I_{\infty}$  in ( $K$ )*.

Poichè l'incremento  $\delta\bar{y}(x)$  non è arbitrario, ma tale che la funzione  $\bar{y}(x) + \delta\bar{y}(x)$  appartenga ancora a ( $K$ ), non si può dalla (3) dedurre immediatamente che è sempre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = 0,$$

come invece si fa per l'integrale  $I$ .

<sup>(4)</sup> S. FAEDO: I° lavoro cit. in <sup>(3)</sup>, pag. 152; II° lavoro cit. in <sup>(3)</sup>, § 2, n. 1.

<sup>(5)</sup> S. FAEDO: II° lavoro cit. in <sup>(3)</sup>, § 2, nn. 2, 3, 4.

<sup>(6)</sup> S. FAEDO: II° lavoro cit. in <sup>(3)</sup>, § 2, n. 4.

Se invece si introducono delle ulteriori condizioni <sup>(7)</sup> si può dimostrare che la  $\bar{y}(x)$  verifica la *condizione di trasversalità all'infinito*

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = 0.$$

Si presenta quindi la seguente interessante questione :

« Se  $I_\infty$  ammette minimo (o massimo) fornito da un'estremale su cui è  $\delta I_\infty \equiv 0$ , si può sempre affermare che di conseguenza sussista la condizione di trasversalità all'infinito, in modo analogo a quanto accade per l'integrale  $I$ ? »

A tale domanda si risponde negativamente nel presente lavoro, mettendo così in luce una sostanziale diversità di comportamento fra gli integrali  $I$  ed  $I_\infty$ .

Si vede ciò attraverso un esempio, che è assai significativo anche per ulteriori ricerche di nuove condizioni per l'esistenza dell'estremo di  $I_\infty$ . Infatti si dimostra l'esistenza del minimo per un integrale che non rientra in alcuno dei teoremi finora noti.

Si fanno infine delle considerazioni che vengono a spiegare la diversità di comportamento delle estremanti degli integrali  $I$  ed  $I_\infty$ .

#### 1. - La funzione

$$f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$$

sia definita e continua per ogni  $x \geq 0$  e per ogni valore finito di

$$y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}.$$

Supponiamo che esistano e siano continue le derivate

$$f_{y_i^{(r)}, y_j^{(s)}}, \quad \left( \begin{array}{l} i, j = 1, 2, \dots, n \\ r, s = 0, 1, \dots, m \end{array} \right).$$

Consideriamo

$$I = \int_0^X f(x, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots, y_1'(x), \dots, y_n'(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)) dx$$

e supponiamo che  $I$  possieda una minimante  $\bar{C}(\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x))$  che sia una estremale nella classe  $(H)$  delle curve  $C(y_1(x), \dots, y_n(x))$  di  $S_{n+1}$  assolutamente continue con  $y_1^{(m-1)}, \dots, y_n^{(m-1)}$  in  $(0, X)$ , tali da dare ad  $I$  valore finito e per cui è

$$y_i^{(k)}(0) = c_{i,k} \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 0, 1, \dots, m-1 \end{array} \right),$$

dove  $c_{i,k}$  sono numeri assegnati.

Per determinare le condizioni di trasversalità a cui soddisfa la curva  $\bar{C}$ , si usa procedere nel modo seguente :

(7) S. FAEDO : II° lavoro cit. in (3), § 2, n. 5.

Se  $\eta(x)$  è una funzione assolutamente continua in  $(0, X)$  con  $\eta^{(m)}(x)$ , esiste finito

$$(5) \quad I(\varepsilon) = \int_0^X f(x, \bar{y}_1 + \varepsilon\eta, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n, \dots, \bar{y}_1^{(m)} + \varepsilon\eta^{(m)}, \bar{y}_2^{(m)}, \dots, \bar{y}_n^{(m)}) = \\ = \int_0^X f(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \dots, \bar{y}_1^{(m)}, \dots, \bar{y}_n^{(m)}) dx + \varepsilon \int_0^X [f_{y_1}^- \eta + f_{y_1}^- \eta' + \dots + f_{y_1}^{-(m)} \eta^{(m)}] dx + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^X \left\{ \sum_{r,s}^{0 \dots m} \eta^{(r)} \eta^{(s)} f_{y_1^{(r)} y_1^{(s)}}^- \right\} dx$$

(dove le  $f_{y_1^{(r)} y_1^{(s)}}^-$  sono calcolate in un punto conveniente).

Poichè  $I(\varepsilon)$  ha un minimo per  $\varepsilon=0$ , è

$$\left( \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0$$

ossia

$$\int_0^X [f_{y_1}^- \eta + f_{y_1}^- \eta' + \dots + f_{y_1}^{-(m)} \eta^{(m)}] dx = 0,$$

qualunque sia la  $\eta(x)$ ; di qui, tenuto conto che  $\bar{C}$  è un'estremale e per un fondamentale lemma di P. DU BOIS REYMOND, seguono immediatamente le condizioni di trasversalità per  $x=X$ .

Consideriamo ora la classe  $(K)$  di curve di  $S_{n+1}$   $C(y_1(x), \dots, y_n(x))$  tali che:

1°)  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  siano assolutamente continue con  $y_1^{(m-1)}(x), \dots, y_n^{(m-1)}(x)$  in ogni intervallo finito  $(0, X)$ ;

2°) esista finito

$$I_\infty = \int_0^{+\infty} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx ;$$

3°) sia, per  $x=0$ ,

$$y_i^{(k)} = c_{i,k}, \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, n \\ k=0, 1, \dots, m-1 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che  $I_\infty$  abbia in  $(K)$  una minimante che sia un'estremale <sup>(8)</sup>. Se si vogliono ottenere le condizioni di trasversalità all'infinito in modo analogo a come si fa per l'integrale  $I$ , ho già dimostrato <sup>(9)</sup> che si presentano le seguenti nuove difficoltà:

<sup>(8)</sup> Cfr. nota <sup>(4)</sup>.

<sup>(9)</sup> S. FAEDO: II° lavoro cit. in <sup>(3)</sup>, § 2, n. 3.

- a)  $I_\infty(\varepsilon)$  può non essere finito per tutti i valori di  $\varepsilon$  nell'intorno di  $\varepsilon=0$ .  
 b) Può darsi che non esista

$$\left(\frac{dI_\infty(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.$$

- c) Pur essendo finito  $I_\infty(\varepsilon)$ , possono non essere finiti

$$\int_0^{+\infty} \left[ f_{\bar{y}_1} \eta + f_{\bar{y}_2} \eta' + \dots + f_{\bar{y}_1^{(n)}} \eta^{(m)} \right] dx$$

e

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \sum_{r,s}^{0\dots m} \eta^{(r)} \eta^{(s)} f_{\bar{y}_1^{(r)}, \bar{y}_1^{(s)}} \right\} dx,$$

e quindi non sussiste la relazione analoga alla (5).

2. - Supponiamo ora che  $f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$  sia un polinomio di secondo grado in  $y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$  con coefficienti funzioni continue di  $x$  in ogni intervallo finito  $(0, X)$ . Inoltre la forma quadratica in

$$y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$$

che si ottiene dalla  $f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$  trascurando i termini di grado inferiore al secondo, sia sempre semidefinita positiva per ogni  $x \geq 0$ .

Supponiamo che  $(K)$  sia non vuota e che in essa esista una minimante  $\bar{C}(\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x))$  che sia una estremale.

In tali condizioni ho dimostrato <sup>(10)</sup> il seguente teorema :

« Condizione necessaria e sufficiente affinché una estremale  $\bar{C}$  sia una estremante di  $I_\infty$  in  $(K)$  è che sia

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \eta_i \left( f_{\bar{y}_i'} - \frac{d}{dx} f_{\bar{y}_i''} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f_{\bar{y}_i^{(m)}} \right) + \right. \\ \left. + \eta_i' \left( f_{\bar{y}_i''} - \frac{d}{dx} f_{\bar{y}_i'''} + \dots + (-1)^{m-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} f_{\bar{y}_i^{(m)}} \right) + \dots + \eta_i^{(m-1)} f_{\bar{y}_i^{(m)}} \right] = 0, \\ (i=1, 2, \dots, n),$$

dove le  $\eta_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) sono tali che la curva

$$\bar{C} + \delta \bar{C}(\bar{y}_1 + \eta_1, \bar{y}_2 + \eta_2, \dots, \bar{y}_n + \eta_n)$$

sia ancora una curva di  $(K)$  ».

Se  $\bar{C}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  verifica le (6) diremo che su essa è identicamente nulla la variazione prima di  $I_\infty$ .

<sup>(10)</sup> S. FAEDO : II° lav. cit. in (3), § 2, n. 4.

Qualora su  $\bar{C}$  sia anche

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f_{y_i'} - \frac{d}{dx} f_{y_i''} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f_{y_i^{(m)}} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f_{y_i''} - \frac{d}{dx} f_{y_i'''} + \dots + (-1)^{m-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} f_{y_i^{(m)}} \right) = 0 \\ \vdots \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{y_i^{(m)}} = 0 \end{array} \right. \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

diremo che  $\bar{C}$  verifica le condizioni di trasversalità all'infinito.

Se oltre alle ipotesi finora fatte, la  $f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$  è tale che sia definita positiva la forma quadratica in  $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$  che si ottiene dalla  $f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$  trascurando i termini di grado inferiore al secondo in  $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ , ho anche dimostrato <sup>(1)</sup> che in  $(K)$  esiste (al più) una sola estrema su cui è nulla la variazione prima di  $I_\infty$ .

3. - Per costruire un esempio in cui la minimante non verifica le condizioni di trasversalità all'infinito (7) è utile premettere il seguente

LEMMA. - Se  $y(x)$  è assolutamente continua in ogni intervallo finito  $(0, X)$ , con  $X > 0$ , ed esiste finito

$$\mathfrak{J} = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2) dx,$$

ne segue che necessariamente è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

Se esiste  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ , tale limite è certamente nullo altrimenti  $\mathfrak{J}$  non potrebbe essere finito.

Supponiamo, se possibile, che non esista  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ .

Si può allora determinare  $\varepsilon > 0$  tale che, comunque grande si prenda  $X$ , si trovi sempre qualche  $x$ , con  $x \geq X$ , per cui è

$$|y(x)| \geq \varepsilon.$$

Indichiamo con  $D_1, D_2, \dots, D_m, \dots$  gli intervalli chiusi dell'asse delle  $x$  in cui è sempre  $|y(x)| \geq \varepsilon$ , ordinati come si susseguono nel verso positivo dell'asse  $x$ ; tali intervalli (che possono ridursi anche a punti isolati), per quanto si è pre-messo, esistono certamente e sono infiniti.

<sup>(1)</sup> S. FAEDO: II° lavoro citato in (3), § 3.

Con  $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$  indichiamo gli intervalli aperti dell'asse  $x$  in cui è

$$\frac{\varepsilon}{2} < |y(x)| < \varepsilon,$$

disposti nell'ordine in cui si susseguono sull'asse  $x$ .

Essendo  $\mathcal{J}$  finito i  $d_n$  esistono certamente. Inoltre la serie delle lunghezze dei  $d_n$  è convergente, avendosi

$$\mathcal{J} = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2) dx \geq \int_0^{+\infty} y^2 dx > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{d_n} y^2 dx > \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} d_n,$$

ossia

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n < \frac{4\mathcal{J}}{\varepsilon^2}.$$

Fra  $D_m$  e  $D_{m+1}$  cadono necessariamente dei  $d_n$ . Esistono inoltre infinite coppie  $(D_m, D_{m+1})$  fra cui cade più di un  $d_n$ .

Infatti, se fra  $D_m$  e  $D_{m+1}$  cade un solo  $d_n$ , questo  $d_n$  ricopre tutto l'intervallo compreso fra  $D_m$  e  $D_{m+1}$  ed in tutto l'intervallo  $D_m + D_{m+1} + d_n$  è  $|y(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$ . Se fossero in numero finito le coppie  $(D_m, D_{m+1})$  fra cui cade più di un  $d_n$ , soppressi gli intervalli di  $(0, +\infty)$  che sono compresi fra tali coppie, rimarrebbe un insieme di intervalli di lunghezza complessiva non finita in cui è sempre  $|y(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$ ; ma allora  $\mathcal{J}$  non sarebbe finito.

Indichiamo con

$$(\bar{D}_1, \bar{D}_2), \dots, (\bar{D}_m, \bar{D}_{m+1}), \dots$$

le infinite coppie di  $D_m$  consecutivi fra cui cade più di un  $d_n$ .

Nel secondo estremo di  $\bar{D}_m$   $|y(x)|$  ha per valore  $\varepsilon$ . Sia  $d_m \equiv (a_m, b_m)$  il primo dei  $d_n$  compresi fra  $\bar{D}_m$  e  $\bar{D}_{m+1}$ .

$a_m$  coincide col secondo estremo di  $D_m$  ed è  $|y(b_m)| = \frac{\varepsilon}{2}$ .

Infatti, per la definizione dei  $d_m$ , negli estremi di tali intervalli  $|y(x)|$  può assumere soltanto i due valori  $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}$ . Ma, se fosse  $|y(b_m)| = \varepsilon$ ,  $b_m$  sarebbe il primo estremo di  $\bar{D}_{m+1}$  e quindi fra  $\bar{D}_m$  e  $\bar{D}_{m+1}$  si avrebbe un solo  $d_n$ .

Si ha così

$$|y(a_m)| = \varepsilon, \quad |y(b_m)| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo

$$\int_{a_m}^{b_m} z'^2(x) dx.$$



Nella classe delle curve  $z=z(x)$  assolutamente continue in  $(a_m, b_m)$  per cui è

$$|z(a_m)| = \varepsilon \quad |z(b_m)| = \frac{\varepsilon}{2},$$

l'integrale

$$\int_{a_m}^{b_m} z'^2(x) dx$$

possiede minimo, fornito dal segmento rettilineo passante per i punti  $(x=a_m, z=\varepsilon)$ ,  $(x=b_m, z=\frac{\varepsilon}{2})$ . Per tale retta è

$$|z'(x)| = \frac{\varepsilon}{2(b_m - a_m)}.$$

Perciò è

$$\int_{a_m}^{b_m} y'^2(x) dx \geq \int_{a_m}^{b_m} \frac{\varepsilon^2}{4(b_m - a_m)^2} dx = \frac{\varepsilon}{4d_m}$$

e, per la (8),

$$\int_{a_m}^{b_m} y'^2(x) dx \geq \frac{\varepsilon^2}{4d_m} > \frac{\varepsilon^2}{4 \sum_{m=1}^{\infty} d_m} > \frac{\varepsilon^4}{16\mathcal{J}}.$$

Ne segue quindi

$$\mathcal{J} = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2) dx \geq \int_0^{+\infty} y'^2 dx \geq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{a_m}^{b_m} y'^2 dx = \infty$$

essendo, qualunque sia  $m$ ,

$$\int_{a_m}^{b_m} y'^2 dx > \frac{\varepsilon^4}{16\mathcal{J}}.$$

Quindi dall'ipotesi che non esista  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$  segue che necessariamente  $\mathcal{J}$  non è finito.

Il lemma è così completamente dimostrato.

4. - Consideriamo

$$I_{\infty} = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y') dx.$$

Indichiamo con  $(K)$  la classe delle funzioni  $y(x)$  assolutamente continue in ogni intervallo  $(0, X)$ , per cui  $I_{\infty}$  risulta finito e tali che sia

$$y(0) = c, \quad (c \text{ costante assegnata}).$$

Anzitutto  $(K)$  non è vuota perchè ad essa appartiene

$$(9) \quad y = \bar{y} = ce^{-x}.$$

Dimostriamo che in  $(K)$   $I_\infty$  ammette minimo, fornito appunto dalla (9).

Se  $C[(y=y(x))]$  è una curva di  $(K)$ , si ha

$$(10) \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y') dx - \int_0^{+\infty} (\bar{y}^2 + \bar{y}'^2 + 2\bar{y}') dx = 2 \int_0^{+\infty} [(y - \bar{y})\bar{y} + (y' - \bar{y}')(\bar{y}' + 1)] dx + \\ + \int_0^{+\infty} [(y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2] dx.$$

Integrando per parti si ottiene

$$2 \int_0^{+\infty} (y' - \bar{y}')(\bar{y}' + 1) dx = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y})(\bar{y}' + 1) - 2 \int_0^{+\infty} (y - \bar{y})\bar{y}'' dx$$

e quindi

$$(11) 2 \int_0^{+\infty} [(y - \bar{y})\bar{y} + (y' - \bar{y}')(\bar{y}' + 1)] dx = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y})(\bar{y}' + 1) + 2 \int_0^{+\infty} (y - \bar{y})(\bar{y} - \bar{y}'') dx = \\ = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) [\bar{y}(x) + 1],$$

perchè  $y = \bar{y}(x)$  è un'estremale e verifica l'equazione di EULERO  $y - y'' = 0$  ed è  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{y}(x) = 0$ .

Dalle (10) e (11) si ha

$$(12) \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y') dx - \int_0^{+\infty} (\bar{y}^2 + \bar{y}'^2 + 2\bar{y}') dx = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) [\bar{y}(x) + 1] + \\ + \int_0^{+\infty} [(y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2] dx.$$

Se  $y(x)$  è una funzione di  $(K)$  per cui inoltre esiste finito

$$\int_0^{+\infty} [(y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2] dx$$

si ha, per il lemma premesso,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y}) = 0$$

e quindi segue dalla (12)

$$\int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y') dx - \int_0^{+\infty} (\bar{y}^2 + \bar{y}'^2 + 2\bar{y}') dx = \int_0^{+\infty} (y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2 dx \geq 0.$$

Se di  $y(x)$  si sa soltanto che appartiene a  $(K)$ , segue ancora necessariamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) [\bar{y}(x) + 1] = 0.$$

Infatti, in tal caso,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) [\bar{y}(x) + 1]$$

non può mai essere indeterminato perchè è

$$2 \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) [\bar{y}(x) + 1] = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y') dx - \\ - \int_0^{+\infty} (\bar{y}^2 + \bar{y}'^2 + 2\bar{y}') dx - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x [(y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2] dx.$$

Se poi fosse

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) [\bar{y}(x) + 1] = +\infty$$

dalla (12) seguirebbe immediatamente che  $y(x)$  non dà valore finito ad  $I_\infty$  e quindi non appartiene a  $(K)$ .

Nemmeno può  $y(\bar{y} + 1)$  tendere, per  $x \rightarrow \infty$ , a un limite finito non nullo, perchè in tal caso sarebbe finito

$$\int_0^{+\infty} [(y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2] dx$$

e quindi, per il lemma, dovrebbe invece essere  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y}) = 0$ .

Infine non può essere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) [\bar{y}(x) + 1] = -\infty.$$

Infatti, preso  $M > 0$  ad arbitrio, si potrebbe determinare  $x_0$  tale che per  $x \geq x_0$  sia sempre

$$y^2(x) > |\bar{y}^2 + \bar{y}'^2 + 2\bar{y}'| + M + 1$$

e quindi

$$(y^2 + y'^2 + 2y') - (\bar{y}^2 + \bar{y}'^2 + 2\bar{y}') > M + 1 + y'^2 + 2y' = M + (1 + y')^2 \geq M,$$

per  $x \geq x_0$ ; ne seguirebbe quindi che  $I_\infty$  non è finito e perciò  $y = y(x)$  non appartiene a  $(K)$ .

Si è così dimostrato che se  $y(x)$  è una qualunque funzione di  $(K)$  è sempre

$$\int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y') dx = \int_0^{+\infty} (\bar{y}^2 + \bar{y}'^2 + 2\bar{y}') dx + \int_0^{+\infty} \{ (y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2 \} dx.$$

Questa uguaglianza prova che  $I_\infty$  ammette in  $(K)$  minimo fornito dalla estrema

$$y = \bar{y} = ce^{-x}.$$

5. - L'esistenza del minimo per l'integrale

$$\int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y') dx$$

non poteva dedursi dai teoremi di esistenza dati da S. CINQUINI e da me nei lavori già citati.

Infatti in tali teoremi si considerano integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x, y, y') dx$$

in cui è sempre, qualunque siano  $y$ ,  $y'$  e  $a \leq x < +\infty$ ,

$$f(x, y, y') \geq \psi(x),$$

con  $\psi(x)$  tale che sia finito

$$\int_a^{+\infty} \psi(x) dx.$$

La funzione integranda  $y^2 + y'^2 + 2y'$  non soddisfa evidentemente a questa condizione.

6. - Al funzionale

$$I_\infty = \int_0^{+\infty} f(y, y') dx = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y') dx,$$

considerato nel n. 4, si possono applicare i risultati rammentati nel n. 2. Si ha quindi che sulla estrema  $y = \bar{y}$  che minimizza  $I_\infty$  in  $(K)$  è nulla la variazione prima di  $I_\infty$ .

Andiamo a calcolare tale variazione  $\delta I_\infty$ .

Se diamo alla  $\bar{y} = c \cdot e^{-x}$  l'incremento  $\delta \bar{y}$  in guisa che  $I_\infty$  sia ancora finito e sia  $\delta \bar{y}(0) = 0$ , si ha [cfr. 11]

$$\delta I_\infty = \int_0^{+\infty} (\delta \bar{y} f_{\bar{y}} + \delta \bar{y}' f_{\bar{y}'}) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\delta \bar{y} \cdot f_{\bar{y}'}) = 0.$$

Ma è

$$f_{\bar{y}'} = 2(\bar{y}' + 1) = 2(1 - ce^{-x})$$

ed è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\bar{y}'} = 2.$$

*Sulla estrema che minimizza  $I_\infty$  in  $(K)$  è bensì nulla la variazione prima di  $I_\infty$ , ma non è soddisfatta la condizione di trasversalità all'infinito che, per la (7), in questo caso esigerebbe che fosse*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{y'} = 0.$$

Per il funzionale  $I_\infty$  sussiste anche il teorema di unicità per le estremali ricordato nel n. 2.

Ciò si può del resto verificare direttamente nel modo seguente :

Le estremali verificanti la condizione iniziale  $y(0)=c$  sono date da

$$y = h e^x + (c - h) e^{-x}.$$

Su tali estremali è

$$f_{y'} = 2(y' + 1) = 2[h e^x + (h - c) e^{-x} + 1];$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{y'} = \begin{cases} 2 & \text{se } h = 0 \\ \pm \infty & \text{se } h \neq 0. \end{cases}$$

Di qui segue facilmente che l'unica estrema per cui sia

$$\delta I_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} (\delta y \cdot f_{y'}) = 0,$$

qualunque sia  $\delta y$  in modo che  $y + \delta y$  appartenga ancora a  $(K)$ , è quella per cui è  $h=0$ .

7. - L'esempio dato nel n. 6 mostra la diversità di comportamento degli integrali  $I$  ed  $I_\infty$  (definiti nel n. 1), rispetto alle condizioni di trasversalità nel secondo estremo dei rispettivi intervalli di integrazione. Vediamo di renderci ragione di tale apparente discordanza.

S. CINQUINI <sup>(12)</sup> ha osservato che il problema di ricercare l'estremo dell'integrale  $I_\infty$  ha senso quando si consideri una classe di curve che non sia soggetta a vincoli all'infinito, come è appunto la classe  $(K)$  definita nel n. 1.

Il CINQUINI ha mostrato che non si può in generale porre il problema di ricercare l'estremo di  $I_\infty$  nella sottoclasse  $(K')$  di  $(K)$  le cui curve abbiano un prefissato comportamento all'infinito, perchè generalmente tale estremo non esiste.

Mentre per l'integrale

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

<sup>(12)</sup> S. CINQUINI: loc. cit. in <sup>(2)</sup>, nota a piè di pagina 253.

si può cercare il minimo nella classe  $(K_1)$  di curve piane che congiungono i punti  $A \equiv (a, a)$ ,  $B \equiv (b, \beta)$ , non ammette in generale minimo l'integrale

$$\int_a^{+\infty} f(x, y, y') dx$$

nella classe di curve passanti per  $A$  e tali che sia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \beta.$$

Per questo si ricerca l'estremo degli integrali  $I_\infty$  nella già detta classe  $(K)$  di curve, e tale problema si presenta come l'estensione della ricerca dell'estremo di  $I$  nella classe delle curve passanti per il solo punto  $A$ ; e qui interviene la condizione di trasversalità per  $x=b$ .

In realtà però la classe  $(K)$  è vincolata a dare valore finito all'integrale generalizzato  $I_\infty$ ; in taluni casi ciò può portare a obbligare le curve di  $(K)$  ad avere tutte uno stesso comportamento all'infinito, ossia che, se  $y=y(x)$  e  $y=y_1(x)$  sono due qualsiasi curve di  $(K)$ , debba sempre essere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - y_1) = 0.$$

In tali casi la classe  $(K)$  può essere pensata come quella delle curve  $y=y(x)$  passanti per  $A$  e per cui è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - y_1) = 0;$$

quindi  $(K)$  si può pensare anche come estensione della  $(K_1)$  di  $I$ .

Si comprende così come possa, in questi casi, venire a mancare per l'estremante di  $I_\infty$  la condizione di trasversalità all'infinito.

Nell'esempio che abbiamo dato nel n. 4, abbiamo definita la classe  $(K)$  relativa all'integrale

$$I_\infty = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y') dx$$

come quella delle curve  $y=y(x)$ , con  $y(x)$  assolutamente continua in ogni intervallo finito  $(0, X)$ , per cui è  $y(0)=c$  e che danno valore finito ad  $I_\infty$ .

Abbiamo poi dimostrato che se  $y=y(x)$  è una qualunque curva di  $(K)$ , è sempre  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .

Quindi la classe  $(K)$  si può anche definire come quella delle curve  $y=y(x)$ , che danno valore finito ad  $I_\infty$ , sono assolutamente continue su ogni intervallo finito e sono tali che sia

$$(13) \quad \begin{cases} y(0) = c \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

Appare così chiaro che la minimante non deve soddisfare a condizioni di trasversalità all'infinito, e che essa è pienamente determinata dalle (13).