Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Emilio Baiada

Un problema non regolare del calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 11, nº 1-2 (1942), p. 65-78
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_1-2_65_0>

UN PROBLEMA NON REGOLARE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI (*)

di EMILIO BAIADA (Pisa).

1. - INTRODUZIONE. - Il problema non regolare è stato studiato da molti e in particolare da L. TONELLI [1], C. CARATHEODORY [2] e N. BOGOLIOUBOFF [3]. Però questi autori si limitarono al caso in cui i vari piani d'appoggio multipli [4] non potevano avere tutta una regione di contatto con la figurativa.

MAC-SHANE in una serie di Note apparse nei « Transactions of the American Society » (Vol. 45) si occupa di questo problema anche in casi esclusi dai precedenti lavori. Egli giunge così ad alcuni teoremi il principale dei quali (theorem 1) ha l'enunciato seguente:

Detto « approach set » relativo al punto (x, y) l'insieme delle coppie (x', y') tali che per due coppie (x_1', y_1'), (x_2', y_2') qualunque di questo insieme sia:

$$F_{x'}(x, y, x_1', y_1') = F_{x'}(x, y, x_2', y_2'),$$
$$F_{y'}(x, y, x_1', y_1') = F_{y'}(x, y, x_2', y_2').$$

Se per ogni M si può fare corrispondere un numero positivo L_M tale che se:

$$\int_{\mathcal{C}} F(x, y, x', y')\, ds < M,$$

la lunghezza della curva $\mathcal{C}$ è minore di L_M.

Se inoltre ogni « approach set » relativo a uno stesso punto (x, y) è la somma d'un numero finito d'insiemi convessi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ordinabili in modo che se:

$$(x_i', y_i') \text{ è in } A_i; \quad (x_j', y_j') \text{ è in } A_j \quad \text{con} \quad i < j$$

è anche:

$$\Omega(x, y, x_i', y_i', x_j', y_j') < 0$$

esiste allora una curva minimante.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario di alta matematica della Scuola Normale Superiore in Pisa.

[1] L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. II, pag. 189 e seg.

[2] C. CARATHEODORY: *Über die Starken Maxima und Minima bei einfache Integralen.* Math. Annalen, 62 (1905) pagg. 449-505.

[3] N. BOGOLIOUBOFF: *Sur quelques méthodes nouvelles dans le Calcul des Variations.* Annali di Matematica, Serie IV, Tomo 7.

[4] Per le varie denominazioni vedere il seguito della Nota.

MAC-SHANE dà inoltre l'esempio in cui è

$$F=\sqrt{x'^2+y'^2}+y^2[4\sqrt{x'^2+y'^2}-\sqrt{x'^2+8y'^2}];$$

può osservarsi che questo esempio ricade nella competenza dei teoremi di CARATHEODORY - TONELLI, come è facile assicurarsi con brevi calcoli.

La dimostrazione del MAC-SHANE del teorema sopra riportato è laboriosa ed ha bisogno di alcuni risultati stabiliti dal MAC-SHANE stesso precedentemente. Inoltre la via seguita da Lui si allontana alquanto dai consueti metodi.

Faremo vedere come il risultato sopra indicato si possa raggiungere per via breve con i metodi comuni. Osserveremo inoltre come i ragionamenti fatti valgono anche in casi più generali di quello qui considerato solo per brevità e più generali anche del caso del MAC-SHANE.

2. - Sia $F(x, y, x', y')$ una funzione definita e continua per ogni x, y e per ogni x', y' non entrambi nulli. Sia inoltre positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x', e y' e ammetta le derivate $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{x'x'}$, $F_{x'y'}$, $F_{y'y'}$, F_x, F_y continue. $F(x, y, x', y')$ sia anche sempre positiva là dove è definita.

Supporremo inoltre che:

I. La figurativa $u=F(x_0, y_0, x', y')$ relativa a un punto qualunque $P_0\equiv(x_0, y_0)$ abbia almeno un piano d'appoggio [5] e resti tutta al di sopra di tale piano.

II. In ciascun punto P_0 esistano le estreme direzioni orientate [5] d'appoggio relative al piano d'appoggio multiplo [5] della figurativa e, se $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ sono gli angoli che definiscono due direzioni orientate d'appoggio qualunque, sia:

$$\begin{aligned}\Omega(x_0, y_0, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = F_x(x_0, y_0, \cos\theta^{(2)}, \operatorname{sen}\theta^{(2)})\cos\theta^{(1)} + \\ + F_y(x_0, y_0, \cos\theta^{(2)}, \operatorname{sen}\theta^{(2)})\operatorname{sen}\theta^{(1)} - \\ - F_x(x_0, y_0, \cos\theta^{(1)}, \operatorname{sen}\theta^{(1)})\cos\theta^{(2)} - \\ - F_y(x_0, y_0, \cos\theta^{(1)}, \operatorname{sen}\theta^{(1)})\operatorname{sen}\theta^{(2)} \neq 0.\end{aligned}$$

Per semplificare i ragionamenti fatti nel seguito, supporremo che di piani d'appoggio multiplo ne esista al più uno solo.

Studieremo il problema di minimo dell'integrale:

$$I_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} F(x, y, x', y')\, ds,$$

[dove, al posto di x, y, si mettono $x(s), y(s)$; essendo $x=x(s)$, $y=y(s)$ le equazioni parametriche della curva $\mathfrak{C}$, e al posto di x', y' le $x'(s), y'(s)$ dove esistono,

(5) Per queste denominazioni vedere L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. II, pag. 191 e seg.

ed 1 dove non esistono] in una classe K di curve continue e rettificabili completa [6].

A tale uopo consideriamo l'integrale ausiliare:

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} G(x, y, x', y')\, ds,$$

dove la funzione G è definita nel seguente modo:

1°) la G sia in ogni punto (x, y) positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili x', y'.

2°) indicati con $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$ gli angoli che definiscono le estreme direzioni orientate d'appoggio relativamente al punto (x, y), per ogni θ corrispondente a una direzione orientata appartenente al maggiore dei due angoli definiti dalle estreme direzioni orientate d'appoggio, poniamo:

$$G(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = F(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta), \tag{1}$$

mentre per ogni altro θ sia:

$$\begin{aligned} G(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) &= F_{x'}(x, y, \cos\theta^{(1)}, \operatorname{sen}\theta^{(1)}) \cos\theta + \\ &+ F_{y'}(x, y, \cos\theta^{(1)}, \operatorname{sen}\theta^{(1)}) \operatorname{sen}\theta = F_{x'}(x, y, \cos\theta^{(2)}, \operatorname{sen}\theta^{(2)}) \cos\theta + \\ &+ F_{y'}(x, y, \cos\theta^{(2)}, \operatorname{sen}\theta^{(2)}) \operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Da questa definizione risulta che la funzione G è rispetto alle variabili x, y, x', y' finita e continua insieme con le sue derivate parziali del primo ordine; esistono finite e continue anche tutte le altre derivate parziali seconde ammesse per la F se si eccettuano al più, per ogni punto (x, y) quelle coppie (x', y') corrispondenti alle estreme direzioni orientate d'appoggio. La G è, per ogni coppia x', y' di numeri non ambedue nulli, positiva come la F. Risulta infine che la figurativa della funzione G relativa ad un qualsiasi punto volge la concavità verso la direzione positiva dell'asse u, senza mai ridursi a un piano.

In virtù di teoremi noti [7] il problema di minimo dell'integrale $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$ sulla classe K ammette soluzione.

Indicheremo nel seguito con $\mathfrak{C}_0 \equiv (x = x_0(s)\,;\ y = y_0(s))$ una di queste curve minimanti.

Ora siccome:

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}} \leqslant \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$$

se è:

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}_0} = \mathfrak{F}_{\mathfrak{C}_0},$$

anche il problema relativo all'integrale $\mathfrak{J}$ sulla classe K ammette $\mathfrak{C}_0$ per curva minimante.

---

[6] Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Vol. II, pag. 1.

[7] Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Vol. II, pag. 12.

3. - Introduciamo la seguente ipotesi:

Le funzioni $\theta^{(1)}(x, y)$ e $\theta^{(2)}(x, y)$ del paragrafo precedente siano continue con derivate parziali rispetto a x e a y finite. Queste ipotesi sono sicuramente soddisfatte se [8] $F_1(x, y, \cos\theta^{(1)}, \operatorname{sen}\theta^{(1)})$, $F_1(x, y, \cos\theta^{(2)}, \operatorname{sen}\theta^{(2)}) \neq 0$.

La funzione G sarà continua rispetto a x, y ed avrà derivate finite rispetto a x e a y. Nel caso che θ sia interno al massimo angolo d'appoggio si può scrivere, per la (2):

$$(1') \qquad G(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \\ = \frac{\cos\theta[\operatorname{sen}\theta^{(1)} F(\theta^{(2)}) - \operatorname{sen}\theta^{(2)} F(\theta^{(1)})] - \operatorname{sen}\theta[\cos\theta^{(1)} F(\theta^{(2)}) - \cos\theta^{(2)} F(\theta^{(1)})]}{\cos\theta^{(2)}\operatorname{sen}\theta^{(1)} - \cos\theta^{(1)}\operatorname{sen}\theta^{(2)}}$$

ossia:

$$(2') \qquad G(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = F(\theta^{(2)})\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \vartheta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})} + F(\theta^{(1)})\frac{\operatorname{sen}(\theta - \theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})}$$

dove per abbreviare la scrittura abbiamo sottinteso che:

$$F(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = F(\theta).$$

Analogamente, nel seguito porremo:

$$F_{x'}(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = F_{x'}(\theta)$$
$$F_{y'}(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = F_{y'}(\theta),$$

e

$$F_x(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = F_x(\theta)$$
$$F_y(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = F_y(\theta),$$

quando ciò non darà luogo a possibili confusioni.

Avremo quindi:

$$G_x(\theta) = F_x(\theta^{(2)})\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})} + F_x(\theta^{(1)})\frac{\operatorname{sen}(\theta - \theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})} +$$
$$+ \frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial x}\left[-F_{x'}(\theta^{(2)})\operatorname{sen}\theta^{(2)} + F_{y'}(\theta^{(2)})\cos\theta^{(2)}\right]\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})} +$$
$$+ F(\theta^{(2)})\frac{\cos(\theta^{(1)} - \theta)\dfrac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x} - \operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)}) - \cos(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta)\left(\dfrac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x} - \dfrac{\partial\theta^{(2)}}{\partial x}\right)}{\operatorname{sen}^2(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})} +$$
$$+ \frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x}\left[-F_{x'}(\theta^{(1)})\operatorname{sen}\theta^{(1)} + F_{y'}(\theta^{(1)})\cos\theta^{(1)}\right]\frac{\operatorname{sen}(\theta - \theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})} -$$
$$- F(\theta^{(1)})\frac{\cos(\theta - \theta^{(2)})\dfrac{\partial\theta^{(2)}}{\partial x} - \operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)}) + \cos(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})\operatorname{sen}(\theta - \theta^{(2)})\left(\dfrac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x} - \dfrac{\partial\theta^{(2)}}{\partial x}\right)}{\operatorname{sen}^2(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})}.$$

Ma pensando alla (1′) le due parentesi quadre vengono rispettivamente uguali a:

$$\frac{F(\theta^{(1)}) - \cos(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})F(\theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})}, \qquad \frac{-F(\theta^{(2)}) + \cos(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})F(\theta^{(1)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})},$$

---

[8] Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. II, pag. 194-195.

ed eseguendo i calcoli rimane:

$$(3)\qquad G_x(\theta)=F_x(\theta^{(2)})\,\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}+F_x(\theta^{(1)})\,\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})},$$

e analogamente:

$$(4)\qquad G_y(\theta)=F_y(\theta^{(2)})\,\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}+F_y(\theta^{(1)})\,\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}.$$

Sappiamo allora che la curva minimante $\mathcal{C}_0$ soddisfa quasi ovunque alle equazioni di EULERO - LAGRANGE:

$$(5)\qquad \begin{cases} G_{x'}[x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta]-\int G_x(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,ds=C_1 \\ G_{y'}[x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta]-\int G_y(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,ds=C_2. \end{cases}$$

Consideriamo l'insieme E dei punti della curva $\mathcal{C}_0$ tali che in essi esista la tangente orientata interna al massimo angolo d'appoggio; è dunque su E:

$$G_{x'}(\theta)=F_{x'}(\theta^{(1)}),$$
$$G_{y'}(\theta)=F_{y'}(\theta^{(1)}),$$

e valgono le formule (3), (4). L'insieme E dei punti di $\mathcal{C}_0$ deve soddisfare alle:

$$(5')\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}G_{x'}-G_x=0 \\ \dfrac{d}{ds}G_{y'}-G_y=0 \end{cases}$$

quasi dappertutto: dove G_x e G_y hanno le espressioni (3), (4). Ma per il calcolo stesso fatto al principio di questo paragrafo, in ogni punto di E, siccome è:

$$G_{x'}(\theta)=F(\theta^{(2)})\,\frac{\operatorname{sen}\theta^{(1)}}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}-F(\theta^{(1)})\,\frac{\operatorname{sen}\theta^{(2)}}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})},$$

risulta:

$$\frac{d}{dx}G_{x'}=F_x(\theta^{(2)})\,\frac{\operatorname{sen}\theta^{(1)}}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}-F_x(\theta^{(1)})\,\frac{\operatorname{sen}\theta^{(2)}}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})},$$
$$\frac{d}{dy}G_{x'}=F_y(\theta^{(2)})\,\frac{\operatorname{sen}\theta^{(1)}}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}-F_y(\theta^{(1)})\,\frac{\operatorname{sen}\theta^{(2)}}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})};$$

e quindi:

$$\frac{d}{ds}G_{x'}=\frac{\cos\theta\,[F_x(\theta^{(2)})\operatorname{sen}\theta^{(1)}-F_x(\theta^{(1)})\operatorname{sen}\theta^{(2)}]+\operatorname{sen}\theta\,[F_y(\theta^{(2)})\operatorname{sen}\theta^{(1)}-F_y(\theta^{(1)})\operatorname{sen}\theta^{(2)}]}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}$$

così che la prima delle (5′) diventa:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}\,\Omega(x, y)=0$$

e analogamente la seconda delle (5′) dopo un calcolo analogo diventa:

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}\,\Omega(x, y)=0.$$

Perciò se l'insieme E non fosse di misura nulla ciò andrebbe a contradire l'ipotesi II del paragrafo 2.

Risulta così dimostrato che $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}_0} = \mathfrak{F}_{\mathcal{C}_0}$, e l'esistenza della curva minimante ne discende immediatamente.

4. - Nel paragrafo precedente avevamo supposto per potere svolgere i calcoli, che le funzioni $\theta^{(1)}(x, y)$, $\theta^{(2)}(x, y)$ definite nel § 2, oltre che ad essere continue avessero derivate parziali rispetto a x e y finite.

Vogliamo ora fare vedere che questa ipotesi può allargarsi opportunamente, mantenendo ancora validi i risultati del detto paragrafo, come pure l'esistenza della minimante.

Supponiamo precisamente che le funzioni $\theta^{(1)}(x, y)$, $\theta^{(2)}(x, y)$ siano continue e a rapporto incrementale rispetto a x e rispetto a y limitato, cioè :

$$\left| \frac{\theta^{(1)}(x+h, y) - \theta^{(1)}(x, y)}{x} \right| < M,$$

$$\left| \frac{\theta^{(2)}(x+h, y) - \theta^{(2)}(x, y)}{h} \right| < M, \quad \text{qualunque sia } h\,;$$

e le analoghe

$$\left| \frac{\theta^{(1)}(x, y+k) - \theta^{(1)}(x, y)}{k} \right| < M,$$

$$\left| \frac{\theta^{(2)}(x, y+k) - \theta^{(2)}(x, y)}{k} \right| < M, \quad \text{qualunque sia } k.$$

Faremo vedere che l'espressione (2') della G è derivabile rispetto a x e a y e valgono le formule (3) e (4).

Porremo per semplicità di notazioni:

$$F[x, y, \cos \theta^{(1)}(x, y), \operatorname{sen} \theta^{(1)}(x, y)] = F[x, y, \theta^{(1)}(x, y)]$$

e tutte le notazioni analoghe a questa e di evidente significato, poichè ciò non porta a dubbi di sorta. Avremo se :

$$R = \frac{G(x+h, y) - G(x, y)}{h},$$

$$R = \frac{1}{h} \Big\{ F[x+h, y, \theta^{(2)}(x+h, y)] \frac{\operatorname{sen}\,(\theta^{(1)}(x+h, y) - \theta)}{\operatorname{sen}\,(\theta^{(1)}(x+h, y) - \theta^{(2)}(x+h, y))} +$$
$$+ F[x+h, y, \theta^{(1)}(x+h, y)] \frac{\operatorname{sen}\,(\theta - \theta^{(2)}(x+h, y))}{\operatorname{sen}\,(\theta^{(1)}(x+h, y) - \theta^{(2)}(x+h, y))} -$$
$$- F[x, y, \theta^{(2)}(x, y) \frac{\operatorname{sen}\,(\theta^{(1)}(x, y) - \theta)}{\operatorname{sen}\,(\theta^{(1)}(x, y) - \theta)} - F[x, y, \theta^{(1)}(x, y)] \frac{\operatorname{sen}\,(\theta - \theta^{(2)}(x, y))}{\operatorname{sen}\,(\theta^{(1)}(x, y) - \theta^{(2)}(x, y))} \Big\},$$

aggiungiamo e togliamo la quantità:

$$\frac{1}{h}\left\{ F[x, y, \theta^{(2)}(x+h, y)] \frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))} + \right.$$
$$\left. + F[x, y, \theta^{(1)}(x+h, y)] \frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h, y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))} \right\},$$

otteniamo:

$$R=\frac{1}{h}\left\{ F[x+h, y, \theta^{(2)}(x+h, y)]-F[x, y, \theta^{(2)}(x+h, y)]\right\} \frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))} +$$
$$\frac{1}{h}\left\{ F[x+h, y, \theta^{(1)}(x+h, y)]-F[x, y, \theta^{(1)}(x+h, y)]\right\} \frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h, y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))} + U,$$

dove abbiamo posto:

$$U=\frac{1}{h}\left\{ F[x, y, \theta^{(2)}(x+h, y)] \frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))} - \right.$$
$$- F[x, y, \theta^{(2)}(x, y)] \frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x, y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x, y)-\theta^{(2)}(x, y))} +$$
$$+ F[x, y, \theta^{(1)}(x+h, y)] \frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h, y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))} -$$
$$\left. - F[x, y, \theta^{(1)}(x, y)] \frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x, y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x, y)-\theta^{(2)}(x, y))} \right\}.$$

Aggiungiamo e togliamo nel secondo membro dell'espressione di U, la quantità:

$$\frac{1}{h}\left\{ F[x, y, \theta^{(2)}(x, y)] \frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))} + \right.$$
$$\left. + F[x, y, \theta^{(1)}(x, y)] \frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h, y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))} \right\},$$

avremo:

$$U=\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))}\left\{ F[x, y, \theta^{(2)}(x+h, y)]-F[x, y, \theta^{(2)}(x, y)]\right\}\frac{1}{h} +$$
$$+ \frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h, y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, x)-\theta^{(2)}(x+h, y))}\left\{ F[x, y, \theta^{(1)}(x+h, y)]-F[x, y, \theta^{(1)}(x, y)]\right\}\frac{1}{h} + S,$$

con:

$$S=F[x, y, \theta^{(2)}(x, y)]\left\{ \frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(1)}(x+h, y))} - \frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x, y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))}\right\}\frac{1}{h} +$$
$$+ F[x, y, \theta^{(1)}(x, y)]\left\{ \frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h, y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))} - \frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h, y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h, y)-\theta^{(2)}(x+h, y))}\right\}\frac{1}{h}.$$

Ora siccome F è derivabile rispetto a x', y' con derivate continue, si ha la formula:

$$F[x, y, t+k]-F[x, y, t]=kF_t[x, y, t]+k\,\varepsilon(k),$$

dove $\varepsilon(k)$ è infinitesimo con k. Quindi indicato con T la quantità $U-S$ avremo:

$$T=\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))}\left\{\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}[-F_{x'}(\theta^{(2)})\operatorname{sen}\theta^{(2)}+F_{y'}(\theta^{(2)})\cos\theta^{(2)}]+\right.$$
$$\left.+\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}\,\varepsilon_1(\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)\right\}+$$
$$+\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h,y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))}\left\{\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)}{h}[-F_{x'}(\theta^{(1)})\operatorname{sen}\theta^{(1)}+F_{y'}(\theta^{(1)})\cos\theta^{(1)}]+\right.$$
$$\left.+\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)}{h}\,\varepsilon_2(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y))\right\},$$

e ricordando a cosa sono uguali le parentesi quadre (come abbiamo fatto nel paragrafo 3) otteniamo:

$$T=\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))}\cdot\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}\cdot\frac{F(\theta^{(1)})-\cos(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))F(\theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}+$$
$$+\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h,y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))}\cdot\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)}{h}\cdot\frac{-F(\theta^{(2)})+\cos(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))F(\theta^{(1)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}+$$
$$+\varphi+\psi,$$

dove:

$$\varphi=\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))}\,\varepsilon(\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)),$$
$$\psi=\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)}{h}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h,y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))}\,\varepsilon(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)).$$

Per S si può scrivere:

$$S=F[x,y,\theta^{(2)}(x,y)]\,\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))\frac{1}{h}\{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta)-\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta)\}}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}-$$
$$-F[x,y,\theta^{(2)}(x,y)]\,\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta)\frac{1}{h}\{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))-\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))\}}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}+$$
$$+F[x,y,\theta^{(1)}(x,y)]\,\frac{\operatorname{sen}\theta((^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))\frac{1}{h}\{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h,y))-\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x,y))\}}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}-$$
$$-F[x,y,\theta^{(1)}(x,y)]\,\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x,y))\frac{1}{h}\{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))-\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))\}}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}.$$

Ora sappiamo che:

$$\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta)-\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta)=\cos(\theta^{(1)}(x,y)-\theta)\cdot$$
$$\cdot(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y))+(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y))\,\sigma_1,$$

e

$$\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h,y))-\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x,y))=$$
$$=-\cos(\theta-\theta^{(2)}(x,y)(\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y))+(\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y))\,\sigma_2$$

$$\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))-\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))=$$
$$=\cos(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))\cdot[(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y))-(\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y))]+$$
$$+[(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y))-(\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y))]\,\sigma_3,$$

dove σ_1, σ_2, σ_3 sono infinitesimi con h. Con ciò si potrà ancora scrivere:

$$S=F[x,y,\theta^{(2)}(x,y)]\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))\cdot\cos(\theta^{(1)}(x,y)-\theta)}{\operatorname{sen}\theta((^{1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\cdot\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}\cdot\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)}{h}+$$

$$+F[x,y,\theta^{(2)}(x,y)]\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta)\cdot\cos(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\cdot\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}\cdot\left\{\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)}{h}-\right.$$
$$\left.-\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}\right\}+f+g-$$

$$-F[x,y,\theta^{(1)}(x,y)]\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))\cdot\cos(\theta-\theta^{(2)}(x,y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\cdot\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}\cdot\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}-$$

$$-F[x,y,\theta^{(1)}(x,y)]\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x,y))\cdot\cos(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\cdot\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}\left\{\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)}{h}-\right.$$
$$\left.-\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}\right\}+f'+g'.$$

Dove:

$$f=\frac{F[x,y,\theta^{(2)}(x,y)]}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))}\left\{\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)\theta^{(1)}(x,y)}{h}\right\}\sigma_1,$$

$$g=\frac{F[x,y,\theta^{(1)}(x,y)]\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\cdot\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}\left\{\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)}{h}-\right.$$
$$\left.-\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}\right\}\sigma_3$$

$$f'=\frac{F[x,y,\theta^{(1)}(x,y)]}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))}\cdot\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}\cdot\sigma_2$$

$$g'=\frac{F[x,y,\theta^{(1)}(x,y)]\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x,y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\cdot\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}\left\{\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)}{h}-\right.$$
$$\left.-\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}\right\}\sigma_3.$$

Si osserva subito che siccome φ, ψ, f, g, f', g', tendono a zero per h tendente a zero è dunque:

$$\lim_{h\to 0}U=\lim_{h\to 0}T+S=0.$$

Infatti:

$$T+S=\frac{\cos(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))\cdot F(\theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\cdot\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}\cdot$$

$$\cdot\frac{\theta^{(2)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x,y)}{h}\left\{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta)-\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta)\right\}+$$

$$+\frac{\cos(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))\cdot F(\theta^{(1)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))\cdot\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x,y)-\theta^{(2)}(x,y))}\cdot$$

$$\cdot\frac{\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(1)}(x,y)}{h}\left\{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h,y))-\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x,y))\right\}+$$

$$+\varphi+\psi+f+f'+g+g'.$$

Cosicchè il rapporto incrementale R ha limite se ha limite la quantità:

$$R_1=\frac{F[x+h,y,\theta^{(2)}(x+h,y)]-F[x,y,\theta^{(2)}(x+h,y)]}{h}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))}+$$

$$+\frac{F[x+h,y,\theta^{(1)}(x+h,y)]-F[x,y,\theta^{(1)}(x+h,y)]}{h}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)}(x+h,y))}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}(x+h,y)-\theta^{(2)}(x+h,y))}.$$

e quindi:

$$\lim_{h\to0}R=\lim_{h\to0}R_1=F_x[\theta^{(2)}]\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}+F_x[\theta^{(1)}]\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}\tag{5}$$

come si era affermato.

OSSERVAZIONE. - Questo risultato rimane valido anche nel caso in cui $\theta^{(1)}(x,y)$, $\theta^{(2)}(x,y)$, pensati come funzioni della sola x, siano assolutamente continue e quasi dappertutto a rapporto incrementale limitato. Infatti la funzione G per quanto si è visto sopra ammette quasi dappertutto la derivata rispetto a x:

$$G_x=F_x[\theta^{(2)}]\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}+F_x[\theta^{(1)}]\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}\tag{6}$$

e siccome G è assolutamente continua (9) avremo:

$$G=\int\left\{F_x[\theta^{(2)}]\frac{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}+F_x[\theta^{(1)}]\frac{\operatorname{sen}(\theta-\theta^{(2)})}{\operatorname{sen}(\theta^{(1)}-\theta^{(2)})}\right\}dx$$

e vale così ovunque la formula fondamentale (6). Analogamente rispetto ad y.

5. - Supporremo ora che le direzioni orientate d'appoggio si distribuiscano in un numero finito di intervalli. Per rendere più semplici i ragionamenti supporremo trattarsi di due soli intervalli:

$$\underline{\theta}^{(1)}\vdash\!\dashv\bar{\theta}^{(1)};\qquad \underline{\theta}^{(2)}\vdash\!\dashv\bar{\theta}^{(2)}$$

L'angolo $\underline{\theta}^{(1)}$ è funzione semicontinua inferiormente del punto P.

(9) Ved. per es. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I. pag. 66, osservazione.

Infatti sia $\underline{\theta}$ il minimo limite di $\underline{\theta}^{(1)}(x, y)$ nel punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$. Comunque preso $\varepsilon > 0$ si può determinare un $\varrho > 0$ tale che per tutti i punti P del cerchio $\Gamma \equiv (P_0, \varrho)$ e per $|\theta^{(1)} - \underline{\theta}| < \varrho$, sia:

$$| F_{x'}(x, y, \theta^{(1)}) - F_{x'}(x_0, y_0, \underline{\theta}) | < \varepsilon,$$
$$| F_{y'}(x, y, \theta^{(1)}) - F_{y'}(x_0, y_0, \underline{\theta}) | < \varepsilon.$$

Ma per la definizione stessa di minimo limite esistono certamente in Γ dei punti (x, y) per cui:

$$| \underline{\theta}^{(1)}(x, y) - \underline{\theta} | < \varrho$$

e siccome in questi punti è:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} F_{x'}(x, y, \underline{\theta}^{(1)}(x, y)) = F_{x'}(x, y, \underline{\theta}^{(2)}(x, y)) \\ F_{y'}(x, y, \underline{\theta}^{(1)}(x, y)) = F_{y'}(x, y, \underline{\theta}^{(2)}(x, y)) \end{cases}$$

sarà, sempre per questi stessi punti:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} |F_{x'}(x, y, \underline{\theta}^{(2)}(x, y)) - F_{x'}(x_0, y_0, \underline{\theta}) | < \varepsilon \\ |F_{y'}(x, y, \underline{\theta}^{(2)}(x, y)) - F_{y'}(x_0, y_0, \underline{\theta}) | < \varepsilon . \end{cases}$$

Diamo a ε la successione di valori $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$ e in corrispondenza ad essa consideriamo, come abbiamo fatto sopra per ε, i cerchi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \ldots$ di raggi $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n, \ldots$ e indichiamo con E_n l'insieme dei punti di Γ_n in cui valgono le (1), (2). Nessuno di questi E_n è vuoto.

Possiamo inoltre sempre supporre che $\lim_{n \to \infty} \varrho_n = 0$ e quindi che gli insiemi E_n si accumulino intorno al punto P_0.

Indichiamo con ε_n l'insieme dei valori $\underline{\theta}^{(2)}$ relativi ai punti di E_n. La successione:

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots, \quad \varepsilon_n, \ldots$$

ammette certamente almeno un elemento d'accumulazione che indichiamo con $\theta^{*(2)}$, e sarà:

$$F_{x'}(x_0, y_0, \theta^{*(2)}) = F_{x'}(x_0, y_0, \underline{\theta})$$
$$F_{y'}(x_0, y_0, \theta^{*(2)}) = F_{y'}(x_0, y_0, \underline{\theta}),$$

e quindi $\underline{\theta}$ definisce una direzione orientata d'appoggio onde sarà per le nostre ipotesi:

$$\overline{\theta}^{(1)}(x, y) \geqslant \underline{\theta} \geqslant \underline{\theta}^{(1)}(x, y) .$$

L'asserto viene così provato.

Analogamente si dimostrerebbe che $\underline{\theta}^{(2)}(x, y)$ è semi-continua inferiormente, mentre $\overline{\theta}^{(1)}(x, y)$, $\overline{\theta}^{(2)}(x, y)$ sono semi-continue superiormente.

6. - Definiamo anche in questo caso l'integrale ausiliare $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}$, e $\mathcal{C}_0$ indichi una minimante per il problema di minimo relativo a questo integrale, supposte verificate le ipotesi già enunciate che ci permettono di assicurarne l'esistenza.

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto di $\mathcal{C}_0$ in cui:

$$\bar{\theta}^{(1)}(x_0, y_0) < \underline{\theta}^{(2)}(x_0, y_0)$$

e posto:

$$\bar{\theta}^{(2)}(x_0, y_0) - \underline{\theta}^{(1)}(x_0, y_0) = \delta,$$

esiste per quanto si è visto nel paragrafo precedente tutto un intorno di P_0 in cui:

$$\underline{\theta}^{(2)}(x, y) - \bar{\theta}^{(1)}(x, y) \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Ora per un risultato noto ([10]) è possibile determinare una successione non crescente di funzioni continue a rapporto incrementale limitato:

$$\theta_1^{(1)}(x, y) \geqslant \theta_2^{(1)}(x, y) \geqslant \dots \geqslant \theta_n^{(1)}(x, y) \geqslant \dots$$

che tende a $\bar{\theta}^{(1)}(x, y)$;
e un'altra successione non decrescente di funzioni pure a rapporto incrementale limitato:

$$\theta_1^{(2)}(x, y) \leqslant \theta_2^{(2)}(x, y) \leqslant \dots \leqslant \theta_n^{(2)}(x, y) \leqslant \dots$$

che tende invece a $\underline{\theta}^{(2)}(x, y)$.

Esisterà certamente un n per cui in tutto un intorno Γ di P_0 sia

$$\bar{\theta}^{(1)}(x, y) \leqslant \theta_n^{(1)}(x, y) < \theta_n^{(2)}(x, y) \leqslant \underline{\theta}^{(2)}(x, y).$$

Consideriamo la figurativa relativa al punto $P \equiv (x, y)$ e portate sul piano d'appoggio, le rette d'appoggio definite dalle direzioni orientate $\theta_n^{(1)}(x, y)$, $\theta_n^{(2)}(x, y)$, si costruisca una superficie conica avente per vertice l'origine degli assi e tangente lungo queste rette d'appoggio al piano d'appoggio multiplo e che inoltre risulti completamente compresa tra il piano d'appoggio stesso e la parte rientrante della figurativa. Supporremo che questa superficie verifichi tutte le condizioni di continuità e derivabilità opportune. Il problema di minimo per l'integrale la cui relativa figurativa è quella ottenuta sostituendo nella figurativa della funzione F alla parte rientrante della figurativa stessa la superficie conica definita sopra, ha lo stesso integrale ausiliare. Quindi se $\mathcal{C}_0'$ è un arco di $\mathcal{C}_0$ interno

([10]) Vedere per es. C. CARATHEODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 2° Auflage § 367.

all'intorno Γ, $\mathcal{C}_0'$ è minimante anche per questo nuovo problema. Valgono però adesso i risultati del § 4 e quindi in quasi tutto $\mathcal{C}_0'$ è:

$$F(x, y, x', y') = G(x, y, x', y'). \tag{3}$$

L'insieme dei punti di $\mathcal{C}_0$ su cui $F \neq G$ si può dunque rinchiudere in una successione al più numerabile di intervalli in cui quasi dappertutto vale la (3), perciò $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}_0} = \mathfrak{F}_{\mathcal{C}_0}$ il teorema d'esistenza è così provato.

OSSERVAZIONE. - Il risultato ottenuto in questo paragrafo vale, lasciando inalterato il ragionamento fatto anche se la F non sia definita positiva, purchè il problema di minimo relativo all'integrale ausiliario ammetta soluzione. Nell'ipotesi del MAC - SHANE, potendosi limitare le considerazioni alle curve di lunghezza minore d'un numero fisso, il problema ausiliario, essendo $\int G\, ds$ quasi regolare positivo ([11]) ammette soluzione.

7. - Supponiamo ora invece che il piano d'appoggio multiplo della figurativa relativa al punto $P \equiv (x, y)$ abbia soltanto due direzioni orientate d'appoggio $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$ (in cui per esempio non sia ne $F_1(x_0, y_0, \cos\theta^{(1)} \operatorname{sen}\theta^{(2)}) = 0$ ne $F_1(x_0, y_0, \cos\theta^{(2)}, \operatorname{sen}\theta^{(2)}) = 0$ per non ritrovarsi in un caso noto).

$\theta^{(1)}(x, y)$, $\theta^{(2)}(x, y)$ sono delle funzioni continue. Preso un $\varepsilon > 0$ potremo quindi definire due funzioni $\theta^{(1)}(x, y)$ e $\theta^{(2)}(x, y)$ continue tali che:

$$\theta^{(1)}(x, y) < \bar{\theta}^{(1)}(x, y) < \underline{\theta}^{(2)}(x, y) < \theta^{(2)}(x, y)$$

e inoltre che

$$| \theta^{(1)}(x, y) - \bar{\theta}^{(1)}(x, y) | < \varepsilon$$
$$| \underline{\theta}^{(2)}(x, y) - \theta^{(2)}(x, y) | < \varepsilon.$$

Consideriamo ora la superficie conica Γ di vertice l'origine degli assi, coincidente con la figurativa $z = F(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ per ogni θ esterno a $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$, coincidente con il piano d'appoggio multiplo per $\theta^{(1)}(x, y) \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}^{(1)}(x, y)$ e per $\theta^{(2)}(x, y) \leqslant \theta \leqslant \theta^{(2)}(x, y)$. Per θ compreso tra $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$ la superficie Γ sia compresa tra la parte rientrante della figurativa della funzione F e il piano d'appoggio stesso.

Faremo inoltre in modo che questa superficie conica soddisfi a tutte le condizioni di continuità e di derivabilità opportune.

Consideriamo allora la funzione $F_\varepsilon(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ che abbia questa superficie conica come figurativa. Sono soddisfatte per F_ε le ipotesi del paragrafo precedente. Per il problema di minimo relativo al funzionale $\mathfrak{I}^{(\varepsilon)}_{\mathcal{C}} = \int F_\varepsilon\, ds$, esisterà

([11]) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I pag. 292.

perciò una curva minimante che indicheremo con $\mathfrak{C}_\varepsilon^{(0)}$. Osserveremo d'altra parte che:

$$\mathfrak{J}^{(\varepsilon)}_{\mathfrak{C}} \leqslant \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}.$$

Qualunque sia ε, $\mathfrak{C}_\varepsilon^{(0)}$ coincide sempre con la minimante del problema ausiliare considerato nei paragrafi precedenti e quindi $\mathfrak{C}_\varepsilon^{(0)}$ non varia con ε. Per ciò l'angolo θ della direzione orientata della tangente alla $\mathfrak{C}_\varepsilon^{(0)}$ non deve appartenere all'intervallo aperto $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$. Sarà quindi:

$$\mathfrak{J}^{(\varepsilon)}_{\mathfrak{C}_\varepsilon^{(0)}} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}_\varepsilon^{(0)}}$$

così chè $\mathfrak{C}_\varepsilon^{(0)}$ è minimante per il problema relativo alla funzione F. Anche in questo caso il teorema è dimostrato.