

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LUIGI AMERIO

Sulla convergenza in media della serie $\sum_0^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 10, n° 3-4 (1941), p. 191-198

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_3-4_191_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA CONVERGENZA IN MEDIA DELLA SERIE $\sum_0^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ (*)

di LUIGI AMERIO (Roma).

È noto ⁽¹⁾ che se $\{\lambda_n\}$ è una successione di numeri reali soddisfacente alla condizione

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta > 0$$

e se $\{a_n\}$ è una successione di numeri complessi tale che la serie $\sum_0^{\infty} |a_n|^2$ sia convergente, la serie

$$(1) \quad \sum_0^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

converge in media in ogni intervallo finito $a \leq x \leq b$ a una funzione $F(x)$ a quadrato integrabile in $a^{-1}b$.

Si dimostra anzi che tale convergenza in media è uniforme nell'intervallo $(-\infty, \infty)$, nel senso che risulta

$$(2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_k^{k+1} \left| \sum_0^N a_n e^{i\lambda_n x} - F(x) \right|^2 dx = 0$$

uniformemente rispetto a k variabile in $(-\infty, \infty)$.

Scopo di questa Nota è di indicare delle condizioni relative alle successioni $\{\lambda_n\}$ e $\{a_n\}$, comprendenti, come caso particolare, quelle ora ricordate, per l'uniforme convergenza in media nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ della serie

$$\sum_0^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}.$$

A tale serie corrisponderà allora, per noti teoremi ⁽²⁾, una funzione $F(x)$ appartenente alla classe delle funzioni $\{S^2\}$ quasi periodiche secondo STEPHANOFF.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico della R. Università di Roma.

⁽¹⁾ V. ad es. C. PALEY and N. WIENER: *Fourier Transforms in the complex domain*, Am. Math. Soc. Vol. XIX, 1934, p. 123, Theorem XLI.

⁽²⁾ V. ad es. A. S. BESICOVITCH: *Almost periodic functions*, Cambridge, 1932, pp. 79, 81.

1. - Indicheremo, in quanto segue, con \bar{a}_n il coniugato di a_n .
 Posto poi, per $0 \leq N \leq R$, $p > 0$, $-\infty < k < \infty$,

$$S_{N,R}(k,p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p|x|} \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx$$

dimostriamo i seguenti teoremi.

TEOREMA I. - *Condizione necessaria e sufficiente per l'uniforme convergenza in media nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ della serie $\sum_0^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ è che risulti, per un valore $s > 0$,*

$$\lim_{\substack{N \\ R \} \rightarrow \infty} S_{N,R}(k,s) = 0$$

uniformemente rispetto a k variabile in $(-\infty, \infty)$.

Dimostrazione. - Siccome si ha, per $0 \leq N \leq R$, $-\infty < k < \infty$, $s > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_k^{k+1} \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx &= \int_0^1 \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx \leq \\ &\leq e^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|x|} \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx \end{aligned}$$

segue immediatamente che la condizione è sufficiente.

La condizione è necessaria. Preso $\varepsilon > 0$ e fissato un valore $s > 0$, si determini l'intero positivo M in modo che risulti, per $M \leq N \leq R$, $-\infty < k < \infty$,

$$(3) \quad \int_0^1 \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx < \varepsilon \frac{1-e^{-s}}{2}.$$

Si ha poi

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|x|} \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^1 \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx + \int_0^1 \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n(k-1)} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx \right\} + \\ &+ e^{-s} \left\{ \int_0^1 \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n(k+1)} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx + \int_0^1 \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n(k-2)} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx \right\} + \\ &+ \dots < \varepsilon \end{aligned}$$

per la (3).

TEOREMA II. - Se esistono un intero positivo T e un numero $s > 0$ tali che converga le serie

$$\sum_T^{\infty} \sum_T^n \frac{|a_n a_m|}{s^2 + (\lambda_n - \lambda_m)^2}$$

la serie $\sum_0^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ converga uniformemente in media nell'intervallo $(-\infty, \infty)$.

Dimostrazione. - Per il teorema I, basterà dimostrare che, nelle ipotesi poste, risulta

$$(4) \quad \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} S_{N,R}(k, s) = 0$$

uniformemente rispetto a k variabile nell'intervallo $(-\infty, \infty)$.

Ora si ha

$$\begin{aligned} (5) \quad S_{N,R}(k, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|x|} \left| \sum_N^R a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|x|} \left(\sum_N^R a_n e^{i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x} \right) \left(\sum_N^R \bar{a}_n e^{-i\lambda_n k} e^{-i\lambda_n x} \right) dx = \\ &= \sum_{n,m}^{N \dots R} a_n \bar{a}_m e^{ik(\lambda_n - \lambda_m)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|x|} e^{i(\lambda_n - \lambda_m)x} dx = \\ &= 2 \sum_{n,m}^{N \dots R} a_n \bar{a}_m e^{ik(\lambda_n - \lambda_m)} \int_0^{\infty} e^{-sx} \cos(\lambda_n - \lambda_m)x dx = \\ &= 2s \sum_{n,m}^{N \dots R} \frac{a_n \bar{a}_m e^{ik(\lambda_n - \lambda_m)}}{s^2 + (\lambda_n - \lambda_m)^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$(6) \quad 0 \leq S_{N,R}(k, s) \leq \frac{2}{s} \sum_N^R |a_n|^2 + 4s \sum_{N+1}^R \sum_N^{n-1} \frac{|a_n a_m|}{s^2 + (\lambda_n - \lambda_m)^2}.$$

Siccome è convergente la serie

$$\sum_T^{\infty} \sum_T^n \frac{|a_n a_m|}{s^2 + (\lambda_n - \lambda_m)^2},$$

fissato $\varepsilon > 0$, si può determinare $M \geq T$ in modo che per $N \geq M$ risulti

$$\sum_N^{\infty} \sum_T^n \frac{|a_n a_m|}{s^2 + (\lambda_n - \lambda_m)^2} < \frac{\varepsilon}{4s}$$

e quindi, per la (6),

$$0 \leq S_{N,R}(k, s) < \varepsilon$$

che dimostra la (4).

2. - Indicheremo ora alcune conseguenze dei teoremi I e II nell'ipotesi che le successioni $\{a_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ soddisfino a particolari condizioni.

TEOREMA III. - Se la successione $\{\lambda_n\}$ soddisfa alla condizione

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta > 0,$$

condizione necessaria e sufficiente per l'uniforme convergenza in media nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ della serie $\sum_0^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ è che converga la serie

$$\sum_0^{\infty} |a_n|^2.$$

Dimostrazione. - Si deduce dalla (5), per $p > 0$,

$$(7) \quad \frac{2}{p} \left(\sum_N^R |a_n|^2 - 2 \sum_{N+1}^R \sum_N^{n-1} \frac{|a_n a_m|}{1 + \left(\frac{\lambda_n - \lambda_m}{p}\right)^2} \right) \leq S_{N,R}(k, p) \leq \\ \leq \frac{2}{p} \left(\sum_N^R |a_n|^2 + 2 \sum_{N+1}^R \sum_N^{n-1} \frac{|a_n a_m|}{1 + \left(\frac{\lambda_n - \lambda_m}{p}\right)^2} \right).$$

Si ha poi

$$(8) \quad \sum_{N+1}^R \sum_N^{n-1} \frac{|a_n a_m|}{1 + \left(\frac{\lambda_n - \lambda_m}{p}\right)^2} \leq \sum_{N+1}^R \sum_N^{n-1} \frac{|a_n a_m|}{1 + \left(\frac{(n-m)\delta}{p}\right)^2} \leq \\ \leq \frac{1}{2} \left\{ \sum_{N+1}^R |a_n|^2 \sum_N^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{(n-m)\delta}{p}\right)^2} + \sum_N^{R-1} |a_m|^2 \sum_{m+1}^R \frac{1}{1 + \left(\frac{(n-m)\delta}{p}\right)^2} \right\} \leq \\ \leq \sum_N^R |a_n|^2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu\delta}{p}\right)^2}$$

e siccome è

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_1^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu\delta}{p}\right)^2} = 0$$

si può determinare $s > 0$ in modo che risulti

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu\delta}{s}\right)^2} < \frac{1}{4}.$$

Per le (7), (8) si ottiene

$$\frac{1}{s} \sum_N^R |a_n|^2 \leq S_{N,R}(k, s) \leq \frac{3}{s} \sum_N^R |a_n|^2$$

e quindi, per il teorema I, la tesi è dimostrata.

TEOREMA IV. - *Se la successione* $\{\lambda_n\}$ *soddisfa alla condizione*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > 0$$

e se le serie

$$\sum_0^{\infty} |a_n|^2, \quad \sum_0^{\infty} \frac{|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

sono convergenti, la serie $\sum_0^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ converge uniformemente in media nell'intervallo $(-\infty, \infty)$.

Dimostrazione. - Posto

$$S_{N,R}(k, 1) = S_{N,R}(k)$$

basterà provare, per il teorema I, che risulta

$$\lim_{\substack{N \\ R} \rightarrow \infty} S_{N,R}(k) = 0$$

uniformemente rispetto a k variabile in $(-\infty, \infty)$.

Ora si ha, per la (5),

$$\begin{aligned} (9) \quad 0 \leq S_{N,R}(k) &\leq 2 \sum_N^R |a_n|^2 + 4 \sum_{N+1}^R \frac{|a_n a_{n-1}|}{1 + (\lambda_n - \lambda_{n-1})^2} + \\ &+ 4 \sum_{N+2}^R |a_n| \sum_N^{n-2} \frac{|a_m|}{1 + (\lambda_n - \lambda_m)^2} \leq \\ &\leq 6 \sum_N^R |a_n|^2 + 4 \sum_{N+2}^R |a_n| \sum_N^{n-2} \frac{|a_m|}{1 + (\lambda_n - \lambda_m)^2}. \end{aligned}$$

Definiamo, nell'intervallo $0 \rightarrow \infty$, una funzione $g(x)$, ponendo $g(n) = \lambda_n$ per $n = 0, 1, \dots$, e facendo variare la $g(x)$, per $n \leq x \leq n+1$, linearmente tra i valori λ_n e λ_{n+1} .

Siccome è $\lambda_{n+1} > \lambda_n$

la funzione $g(x)$ è crescente.

Inoltre, per $n > m$, $n-1 \leq x \leq n$, $m \leq y \leq m+1$, risulta

$$\lambda_n - \lambda_m \geq |g(x) - g(y)|$$

e quindi

$$(10) \quad \frac{1}{1 + (\lambda_n - \lambda_m)^2} \leq \int_{n-1}^n dx \int_m^{m+1} \frac{dy}{1 + (g(x) - g(y))^2}.$$

Poniamo ora $\varphi_1(x) = |a_n|$ per $n-1 \leq x < n$, $\varphi_2(y) = |a_m|$ per $m \leq y < m+1$, con $n=1, 2, \dots$; $m=0, 1, \dots$

Si ottiene dalla (10),

$$\frac{|a_n a_m|}{1 + (\lambda_n - \lambda_m)^2} \leq \int_{n-1}^n \varphi_1(x) dx \int_m^{m+1} \frac{\varphi_2(y) dy}{1 + (g(x) - g(y))^2}$$

e quindi

$$(11) \quad \sum_{N+2}^R |a_n| \sum_N^{n-2} \frac{|a_m|}{1 + (\lambda_n - \lambda_m)^2} \leq \int_N^R \varphi_1(x) dx \int_N^x \frac{\varphi_2(y) dy}{1 + (g(x) - g(y))^2} = J_{N,R}.$$

Con il cambiamento di variabili

$$g(x) = t, \quad g(y) = u$$

otteniamo, indicando con $\omega(t)$ la funzione inversa di $g(x)$,

$$(12) \quad \begin{aligned} J_{N,R} &= \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} \varphi_1(\omega(t)) \omega'(t) dt \int_{\lambda_N}^t \frac{\varphi_2(\omega(u)) \omega'(u)}{1 + (t-u)^2} du \\ &= \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} h_1(t) dt \int_{\lambda_N}^t \frac{h_2(u)}{1 + (t-u)^2} du \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \varphi_1(\omega(t)) \omega'(t) \\ h_2(u) &= \varphi_2(\omega(u)) \omega'(u). \end{aligned}$$

Dalla (12) si ricava, con la trasformazione $t-u=z$,

$$(13) \quad \begin{aligned} J_{N,R} &= \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} h_1(t) dt \int_0^{t-\lambda_N} \frac{h_2(t-z)}{1+z^2} dz = \int_0^{\lambda_R-\lambda_N} \frac{dz}{1+z^2} \int_{\lambda_N+z}^{\lambda_R} h_1(t) h_2(t-z) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} \{ h_1^2(t) + h_2^2(t) \} dt = \frac{\pi}{4} \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} \{ h_1^2(t) + h_2^2(t) \} dt. \end{aligned}$$

Ora si ha

$$(14) \quad \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} h_1^2(t) dt = \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} \varphi_1^2(\omega(t)) \omega'^2(t) dt = \sum_N^{R-1} \frac{|a_{n+1}|^2}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

perchè, per $\lambda_n < t < \lambda_{n+1}$, risulta $\varphi_1(\omega(t)) = |a_{n+1}|$, $\omega'(t) = \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$.

In modo analogo si ottiene

$$(15) \quad \int_{\lambda_N}^{\lambda_R} h_2^2(t) dt = \sum_N^{R-1} \frac{|a_n|^2}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

Per le (9), (11), (13), (14), (15), si ricava

$$0 \leq S_{N,R}(k) \leq 6 \sum_N^R |a_n|^2 + \pi \sum_N^R \frac{|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

e quindi il teorema è dimostrato.

Indichiamo ora alcuni corollari del teorema IV.

COROLLARIO I. - *Il teorema IV è valido se la successione $\{\lambda_n\}$ soddisfa alla condizione*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq c_n > 0$$

con

$$c_0 \geq c_1 \geq \dots \geq c_n \geq \dots$$

e se è convergente la serie

$$\sum_0^{\infty} \frac{|a_n|^2}{c_n}.$$

In particolare è valido il teorema IV se risulta

$$0 < \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq \lambda_n - \lambda_{n-1}$$

e se converge la serie

$$\sum_0^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

Dimostrazione. - Basta osservare che si ha

$$\frac{|a_{n+1}|^2}{c_n} \leq \frac{|a_{n+1}|^2}{c_{n+1}}.$$

COROLLARIO II. - *Il teorema IV è valido se risulta*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq H \{ (n+1)^\beta - n^\beta \}$$

con $H > 0$, $0 < \beta \leq 1$, e se converge la serie

$$\sum_1^{\infty} n^{1-\beta} |a_n|^2.$$

Dimostrazione. - Basta evidentemente considerare il caso in cui sia $0 < \beta < 1$.

In tale ipotesi osserviamo che, posto, per $x > 0$,

$$f(x) = (x+1)^\beta - x^\beta,$$

si ha, essendo $0 < \beta < 1$,

$$f'(x) = \beta \left\{ \frac{1}{(x+1)^{1-\beta}} - \frac{1}{x^{1-\beta}} \right\} < 0$$

e quindi, per $n=1, 2, \dots$,

$$(n+1)^\beta - n^\beta \leq n^\beta - (n-1)^\beta.$$

Siccome poi risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\beta} \left\{ (n+1)^\beta - n^\beta \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta - 1 \right\} = \beta,$$

per il corollario I la tesi è provata.

COROLLARIO III. - *Il teorema IV vale se risulta*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq H \{ \log(n+2) - \log(n+1) \}$$

con $H > 0$, e se converge la serie

$$\sum_1^{\infty} n |a_n|^2.$$

Dimostrazione. - Si ha, per $n=1, \dots$,

$$\log(n+2) - \log(n+1) = \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n$$

e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$