Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Mauro Picone

Nota al precedente lavoro

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 10, nº 2 (1941), p. 153-155

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_2_153_0>

NOTA AL PRECEDENTE LAVORO

di MAURO PICONE (Roma).

Il metodo variazionale d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali che reggono i fenomeni di propagazione, applicato per un intervallo infinito di tempo, vuole conseguire la conoscenza del comportamento, al crescere indefinito del tempo, delle strutture, delle correnti fluide o elettriche, del calore, ecc., sotto l'azione di assegnate sollecitazioni dinamiche. È ovvia l'importanza fondamentale di tale conoscenza, che, col detto metodo e col valore dei suoi collaboratori, è stata già in molti casi conquistata dall'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo (1).

Il precedente lavoro del Dott. FAEDO apporta un contributo essenziale al metodo, fissandone il campo di applicabilità che risulta praticamente illimitato.

Si può fondatamente ora sperare che l'accertato comportamento, al tendere del tempo all'infinito, delle successive approssimazioni fornite dal metodo stesso possa portare alla conquista di criteri generali per lo studio dei fenomeni di propagazione, atti a consentire, senza calcolo, sicure risposte di stabilità.

E al riguardo parmi utile notare il seguente teorema generale, interessante le questioni di propagazione del calore, che già discende dai risultati del FAEDO.

Siano $\theta(t)$, $p(t)$, $q(t)$ *funzioni reali e continue nell'intervallo* $(0, \infty)$ *e sia* $\theta(t) \neq 0$. *Se la funzione*

$$\frac{q\theta}{p}$$

riesce di quadrato sommabile nell'intervallo $(0, \infty)$, *la seguente equazione differenziale*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{\theta}\frac{d\theta}{dt}\frac{dy}{dt} - p^2 y = q, \tag{1}$$

possiede sempre una soluzione verificante la condizione:

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

(1) Si veda in proposito, oltre ai lavori citati dal FAEDO nella Memoria precedente, la Memoria del Ten. Gen. G. A. Ing. AMEDEO FIORE, Direttore Generale degli Studi e delle Esperienze del Ministero dell'Aeronautica, presentata alla XXVIII Riunione della S. I. P. S. (Pisa, Ottobre 1939-XVII), dal titolo: *Gli studi teorici e le realizzazioni pratiche dell'Aeronautica italiana durante gli anni XIV - XV - XVI e XVII dell' E. F.*

per la quale i prodotti

$$\theta p y, \qquad \theta \frac{dy}{dt}, \tag{3}$$

riescono di quadrato sommabile nell'intervallo $(0, \infty)$.

Se invero, si assume una qualsivoglia funzione continua e positiva $\varrho(x)$, tale che il prodotto $\theta^2 \varrho$ sia sommabile nell'intervallo $(0, \infty)$, si ha, secondo i risultati di FAEDO, che il seguente funzionale:

$$\int_0^\infty \theta^2 \left(y'^2 + p^2 y^2 + 2qy + \frac{q^2}{p^2} + \varrho \right) dt, \tag{4}$$

nella classe delle funzioni $y(t)$, verificanti la (2), assolutamente continue in ogni intervallo finito di tempo, per le quali:

$$\theta^2 \left(y'^2 + p^2 y^2 + 2qy + \frac{q^2}{p^2} \right), \tag{5}$$

riesce sommabile nell'intervallo $(0, \infty)$, ha minimo, conseguito dalle soluzioni dell'equazione di EULERO relativa al funzionale stesso, che è, appunto, l'equazione (1). Ora dalla sommabilità in $(0, \infty)$ di (5) e di $(q\theta / p)^2$, segue quella dei prodotti (3), e viceversa.

Si ha pure che:

Se per una certa costante positiva k è, in $(0, \infty)$

$$| p(t) | \geqslant k,$$

è unica la soluzione della (1) *verificante la* (2) *e per la quale i prodotti* (3) *riescono di quadrato sommabile in* $(0, \infty)$.

Detta, invero, $u(t)$ la soluzione, dall'equazione

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{du}{dt} - p^2 u = 0, \tag{6}$$

verificante le condizioni iniziali

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = 1,$$

se esistessero due delle indicate soluzioni della (1), dovrebbero

$$\theta p u \quad \text{e} \quad \theta u'$$

essi pure risultare di quadrato sommabile in $(0, \infty)$. Ne seguirebbe la sommabilità in $(0, \infty)$ di $\theta p u \cdot \theta u' = \theta^2 p u u'$ e quindi di $\theta^2 u u'$, ciò che è assurdo poichè dalla (6) si deduce:

$$\Big[\theta^2 u u' \Big]_{t=T} = \int_0^T \theta^2 u'^2 dt + \int_0^T \theta^2 p^2 u^2 dt.$$

Per $p \equiv 1$, $\theta \equiv 1$ si ha, dunque, in particolare, che, supposto q^2 sommabile nell'intervallo $(0, \infty)$, esiste, ed è unica, una soluzione delle equazioni

$$y'' - y = q, \qquad y(0) = 0, \tag{7}$$

per la quale y^2 e y'^2 riescono sommabili nell'intervallo $(0, \infty)$. Per tale equazione, però, basta già, come subito si riconosce, la condizione di sommabilità di y^2 o di y'^2 per individuarne la soluzione, la quale risulta data da

$$y = \frac{e^{-t}}{2} \int_0^\infty q(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau - \frac{e^t}{2} \int_t^\infty q(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau - \frac{e^{-t}}{2} \int_0^t q(\tau)\, e^{\tau}\, d\tau.$$

Si ha, dunque, la seguente elementare proposizione: se $q(t)$ è di quadrato sommabile nell'intervallo $(0, \infty)$, tali risultano pure le sue trasformate

$$q_1(t) = e^t \int_t^\infty q(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau, \qquad q_2(t) = e^{-t} \int_0^t q(\tau)\, e^{\tau}\, d\tau. \tag{8}$$

Essa può, naturalmente, dimostrarsi direttamente, ed eccone una semplice dimostrazione, dovuta al Prof. MIRANDA, dalla quale si deduce anche che:

$$\int_0^\infty q_1^2\, dt \leqslant \int_0^\infty q^2 dt, \qquad \int_0^\infty q_2^2\, dt \leqslant \int_0^\infty q^2 dt.$$

Considerando, per es., la q_1, si ha:

$$q_1(t) = \int_0^\infty q(t+\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau,$$

$$q_1^2(t) \leqslant \int_0^\infty q^2(t+\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau,$$

$$\int_0^T q_1^2(t)\, dt \leqslant \int_0^T dt \int_0^\infty q^2(t+\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau = \int_0^\infty e^{-\tau}\, d\tau \int_0^T q^2(t+\tau)\, dt \leqslant \int_0^\infty q^2(t)\, dt.$$

La stessa dimostrazione, basandosi sulla disuguaglianza di HÖLDER, anzicchè su quella di SCHWARZ, vale per la seguente proposizione più generale: se con $\alpha \geqslant 1$, la potenza $|q(t)|^\alpha$ è sommabile nell'intervallo $(0, \infty)$, tali riescono pure le potenze α^{me} dei valori assoluti delle trasformate (8) e si ha:

$$\int_0^\infty |q_1|^\alpha dt \leqslant \int_0^\infty |q|^\alpha dt, \qquad \int_0^\infty |q_2|^\alpha dt \leqslant \int_0^\infty |q|^\alpha dt.$$